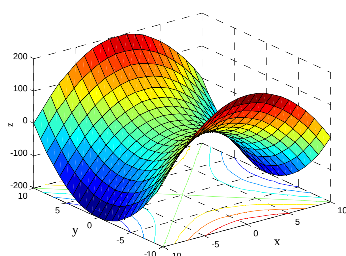
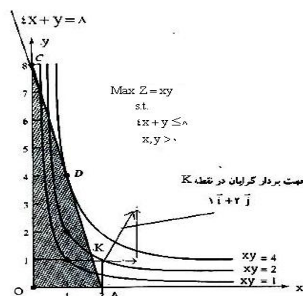
نوشتاری برای معرفی

برنامه ریزی غیر خطی





حمید بازرگان تیر ماه۱۴۰۱

فهرست کلی

فهرست تفصیلی

 معرفی چند مسأله کلاسیک غیر خطی و چند روش خطی سازی ۴۲۷

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

آنچه پیش رو دارید حاصل تدریس چند نیمسال یک درس بهینه سازی غیرخطی (NLP) از کتب ۳ مقطع تحصیل مولف درداخل و خارج و کتابهای مختلف دیگر به یک گروه دانشجوی ارشد مهندسی است، که شاید انتشار آن بدون فایده نباشد. رویکرد نوشتار کاربردی همراه با استفاده از نرم افزار است. امید است گامی کوچک در آشنا کردن دانشجویان مهندسی با کاربرد این شاخه برنامه ریزی ریاضی و مسایل و تعدادی الگوریتم حل آنها برداشته شده باشد. دانشحویان پس از این آشنایی می توانند به کتاب‌های فراوان موجود مراجعه نمایند

در برنامه ریزی ریاضی یک تابع در حضور یا عدم حضور تعدادی محدودیت کمینه یا بیشینه می گردد. حال خاصی از آن، برنامه ریزی خطی(LP) است و کاربرد زیادی در زمینه‌های مختلف دارد شامل مدلی ریاضیاتی است که تمام توابع آن خطی باشند. اگر مدل خطی نباشد بامدل برنامه ریزی غیر خطی (NLP) مواجهیم. گرچه راه‌هایی وجود دارد که بتوان برخی مدلهای غیرخطی را به مدلهای خطی تبدیل کرد و حل نمود اما خیلی از مسائل دنیای واقعی این قابلیت را ندارند و غیرخطی باقی مانده و لاجرم با تکنیک‌های خاص خود باید حل شوند و مقادیر بهینهٔ متغیرهای آن تعیین گردد. تکنیکهای برنامه ریزی غیر خطی، که در زمینه های مختلف(مهندسی هوا فضا، مهندسی برق، مهندسی صنایع، مهندسی سازه، مهندسی شیمی، چشم پزشکی[۱]، مدیریت، بازرگانی، فیزیک...) کاربرد دارد، عموماً الگوریتمی بوده و طی چندین تکرار به حل مدل می‌پردازد.

نوشتار حاضر ضمن مدل کردن چند مساله واقعی و آشنا نمودن با روش حل ترسیمی به چندین الگوریتم کلاسیک حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی بامحدودیت و بدون محدودیت می پردازد. تقسیم بندی فصل ها چنین است.

---

[۱] به عنوان نمونه مراجعه شود به عامری و دیگران(۱۳۹۵)

در **فصل۱**

به کلیات و مفاهیم مقدماتی(تعریف برنامه ریزی غیر خطی و حل ترسیمی، تعریف منحنی های هم تراز، گرادیان، هشیان، انواع تحدب...) پرداخته می شود.

فصل ۲

که بهینه سازی غیر خطی یک متغیره بدون محدودیت نام گرفته چند الگوریتم کمینه سازی یا بیشینه سازی یک تابع تک متغیره غیرخطی بدون حضور هیچ محدودیت را توضیح می دهد.

فصل ۳

ضمن ارائه چند تعریف(نقطه ساکن، نقطه زینی، و...) و چند قضیه پیرامون توابع چند متغیره، به الگوریتم مختصات دوره ای (cyclic coordinates) و الگوریتم جستجو هوک+جیوز در بهینه سازی مسایل غیر خطی چند متغیره بی محدودیت می پردازد.

در**فصل ۴**

به مدلهای برنامه‌ریزی غیرخطی با محدودیت پرداخته شده، شرطهای کاروش کان تاکر و شرطهای فریتز جان برای بهینگی مدلهای غیر خطی تشریح و دو الگوریتم امتداد شدنی برای حل مسائل NLP با محدودیت، توضیح داده می شود.

در **فصل ۵**

مبحث دوگان مسایل غیر خطی مورد بحث قرار گرفته واستفاده از نقطه زینی تابع لاگرانژین در موضوع بهینگی را شرح می دهد . بدست آوردن جواب مساله دوآلِ یک NLP هم دراین فصل آمده است.

فصل ۶

به مسایلNLP کوادراتیک و روش ولف برای حل برخی از آنها، مدل‌های تفکیک پذیر و نیز تفکیک پذیر کردن عبارات ، تقریب خطی برای یک نوع مسأله تفکیک پذیر و حل مساله خطی حاصله پرداخته و نیز چند تکنیک را برای خطی کردن عبارات غیر خطی توضیح می دهد.

فصل ۷

اجمالاً به کاربرد نرم افزار در برنامه ریزی غیر خطی می‌پردازد.

در ضمن لازم می‌داند ازآقای دکتر ترابی که سالها قبل در دانشگاه صنعتی شریف تدریس این درس را به عهده داشتند ونیز دکتر شومان و دکتر مزومدر در دانشگاه پیتسیورگ یاد نماید وهمچنین از دانشجویان عزیزی که که برخی اشکالات را تذکر دادند به ویژه خانم مهندس نسرین عامری و آقای مهندس حجت اسدی و نیز خانمها مهندس پریسا شجاعی، مهندس بتول علیزاده و مهندس آرزو عظیمی تشکر نماید. البته اذعان می‌نمایدکه این نوشتار نیاز به بازنگری و ویرایش بیشتر دارد ولی شاید دراین حد هم بتواند در آشنا کردن با کاربرد برنامه ریزی خطی نقشی داشته باشد. در پایان چند لینک مرتبط که امکان استفاده دارد ذیلاً معرفی می گردد.

AMPL	www.ampl.com
Excel Solver Add-Ins	www.frontsys.com
GAMS	www.gams.com
na-net Newsletter	www.net lib. org/na-net
Net Lib	www.netlib.org
Numerical Recipes home page	www.nr. Com
Optimization Technology Center	www.ece.nwu.edu/ OTC
Optimization Software Guide	www-fp.mcs.anl.gov/otc/ Guide /SoftwareGuide/index.html
SIAG OPT home page	www.siam.org/siagsjsiagop /siagop.htm
Soci. for Industrial & Applied Math (SIAM)	http://epubs.siam.org/doi/abs/١٠,١١٣٧/١,٩٧٨١٦١١٩٧١٢٠٠.bm
گروه شبیه سازی و کنترل صنعتی شریف	http://www.sina.sharif.ir/~pishvaie/Articles/OptimizationArticles/Semester_۹۲۹۳_۲/COVER۰۷_Part٪۲۰I.pdf

حمید بازرگان
بخش مهندسی صنایع دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان تیر ۱۴۰۱
bazargan@uk.ac.ir

۱

کلیات و مفاهیم اولیه

هر کس هندسه نمی داند وارد نشود

(کتیبه سردر آکادمی افلاطون)

“No one ignorant of geometry shall enter ”

(Door inscription at Plato’s academy)



کلیات ومفاهیم اولیه

هدف فصل

در این فصل به تعریف برنامه ریزی غیر خطی و انواع آن ، تعریف منحنــی هـای هـم تراز، گرادیان، هشیان، حل ترسیمی مسایل غیر خطی دو متغیره، تعریف تابع نرم و انواع توابع محدب پرداخته شده و اصطلاحاتی چون برنامه ریزی   محدب و جستجوی خطی و ناحیه اعتماد تعریف می شود.

۱–۱مقدمه

بهینه سازی یا برنامه‌ریزی غیر خطی[۱] در حضور محدودیت عبارت است از یک تکنیک ریاضی جهت تخصیص منابع محدود موجود به بهترین صورتِ ممکن در حالی که حداقل یک تابع در مدل ریاضی مربوطه غیرخطی باشد.

این برنامه ریزی شاخه ای از مبحث موسوم به تحقیق در عملیات است. اصطلاح تحقیق در عملیات ظاهراً از فعالیت‌ها وراه‌حل‌هایی ناشی می‌شود که گروهی از

[۱] کلمه برنامه ریزی معادل Programming است که در اینجا به معنای بهینه سازی است

دانشمندان انگلیسی در جنگ جهانی دوم در مسائل جنگی انجام داده بودند تا مؤثرترین روش استفاده از منابع محدود نظامی را بیابند. بعبارت دیگر اینها به تحقیق در عملیات نظامی جهت بهینه کردن استفاده از آنها پرداخته بودند. این رشته تصمیم‌گیری از آغاز بعنوان رشته‌ای شناخته شده است که اطلاعات علمی را به منظور تعیین بهترین نحوه استفاده از منابع محدود بکار می‌گیرد.

پس از مسائل جنگی موسسات تجاری و صنعتی در صدد استفاده از روش‌های تحقیق در عملیات برآمدند. کامپیوترهای دیجیتال در موفقیت روش تحقیق در عملیات (O.R.) بسیار مؤثر بودند.

اکنون این فعالیت‌ها از کاربردهای تجاری و نظامی و صنعتی فراتر رفته و در بسیاری از رشته‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تقسیم‌بندی مدلهای ریاضی تحقیق در عملیات

همانطور که می دانید در تحقیق در عملیات از مدل برای برنامه‌ریزی هرچه بهتر سیستم‌های نظامی، صنعتی، تجاری، مدیریتی، اقتصادی، شهرسازی، ساختمانی، حمل‌ونقل،... موجود یا مربوط به آینده استفاده میشود. مدل‌های برنامه‌ریزی(بهینه سازی) از نظر تقسیم‌بندی ریاضی به چند دسته تقسیم می‌شوند از جمله:

۱- برنامه‌ریزی خطی

۲- برنامه‌ریزی با اعداد صحیح .

۳- برنامه‌ریزی پویا

۴- برنامه ریزی غیرخطی

۵-برنامه ریزی آرمانی

۱-۲ تعریف مساله برنامه ریزی غیرخطی

برنامه ریزی غیرخطی به بهینه سازی یک تابع هدف در حضور محدودیت های بصورت تساوی و نامساوی می‌پردازد اگر تمام توابع خطی باشند ما با یک برنامه ریزی خطی (L.P.) مواجهیم. در غیراینصورت مساله برنامه ریزی غیرخطی (NLP[1]) خوانده می‌شود ارائه الگوریتم‌های کارآمدو نرم‌افزارهای قوی، وجود کامپیوترهای پرسرعت و

[1] Non-Linear Programming

مدیران و کارآمد، برنامه ریزی خطی را یک ابزار مهم حل مسائل در زمینه‌های مختلف ساخته است. اما بسیاری از مسائل را در دنیای واقعی نمی‌توان با یک L.P تقریب زده حل کرد زیرا تابع هدف و محدودیت‌ها خطی نمی‌باشد در زمینه NLP هم پیشرفت‌های سریعی در نیم قرن اخیر وجود داشته است(بازاراو همکاران؛۲۰۰۶ صxi).

۱-۲-۱ تقسیم بندی مسایل غیر خطی

یک تقسیم بندی مسئله های برنامه ریزی غیر خطی چنین می‌باشد:

مسئله برنامه ریزی غیر خطی بدون محدودیت و با محدودیت .

۱-۲-۱-۱ فرم مساله برنامه ریزی غیرخطی فاقد محدودیت

در مدل ریاضی مسئله های برنامه ریزی غیر خطی نوع اول فقط با یک تابع ریاضی غیر خطی بدون هیچ گونه محدودیت برای بهینه سازی روبرو می باشیم:

$$\text{Min or Max } Z = f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = x_۱,\ldots,x_n \in X \text{ (زیر مجموعه } R^n)$$

f تابع جبری(لگاریتمی مثلثاتی، نمائی،...)می باشد تعریف شده روی R^n است؛

R مجموعه اعداد حقیقی است.

اما ازآنجا که در اغلب مسائل کاربردی در دنیای واقعی ، محدودیت‌هایی در زمینه هایی مثل منابع و عملکرد سیستم وجود دارد، در مدل ریاضی مسئله های نوع دوم معادلاتی که معرف محدودیت ها است به صورت تساوی یا نامساوی وجود دارد. محدودیت‌ها، ناحیه قابل قبول طراحی را معین می‌کنند.

۱-۲-۱-۲ فرم مساله برنامه ریزی غیرخطی با محدودیت

فرم مساله غیرخطی با محدودیت را می توان مطابق زیر در نظرگرفت:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } Z = f(\mathbf{x}) \\
&\quad \text{s.t} \\
&\qquad g_i(\mathbf{x}) \le ۰ \quad i = ۱,۲,\ldots,m \\
&\qquad h_i(\mathbf{x}) = ۰ \quad i = ۱,۲,\ldots,\ell \\
&\qquad \mathbf{x} \in X \text{ (زیر مجموعه } R^n) \\
&\mathbf{x} = x_۱,\ldots,x_n
\end{aligned}$$

که در آن $f, g_1, ..., g_m, h_1 ... h_1, ..., h_\ell$ توابعی‌جبری(لگاریتمی مثلثاتی، نمائی...) می باشند و روی R^n تعریف شده اند (R مجموعه اعداد حقیقی است).

بردار **x** شامل n عنصر $x_1 \ldots x_n$ می‌باشد.

X زیر مجموعه ای از R^n مثلا بصورت n بازه $a_1 \le x_1 \le b_1 ، ... ، a_n \le x_n \le b_n$.

مساله باید طوری حل شود که مقادیر $x_1 \ldots x_n$ طوری تعیین گردد که تابع هدف کمینه و در عین حال محدودیت‌ها ارضاء شود.

۱-۲-۲ تعریف جواب شدنی، مینیمم موضعی ،مینیمم مطلق، مینیمم مطلق اکید، جواب بهینه

در مساله فوق هر بردار مثل $x \in X$ که در محدودیت‌ها صدق کند **جواب شدنی** نامیده می‌شود.

نقطه شدنی[۱] مثل $\bar{x} \in X$ را مینیمم مو ضعی می نامند اگر عدد مثبت δ وجود داشته باشد که نامساوی $f(x) \ge f(\bar{x})$ برای تمام $x \in X \cap N_\delta(\bar{x})$ برقرار باشد(آوریل، ۱۹۷۶ص ۲۸-آوریل،۲۰۰۳ ص۵۸)

که درآن

δ یک عدد حقیقی کوچک بوده و

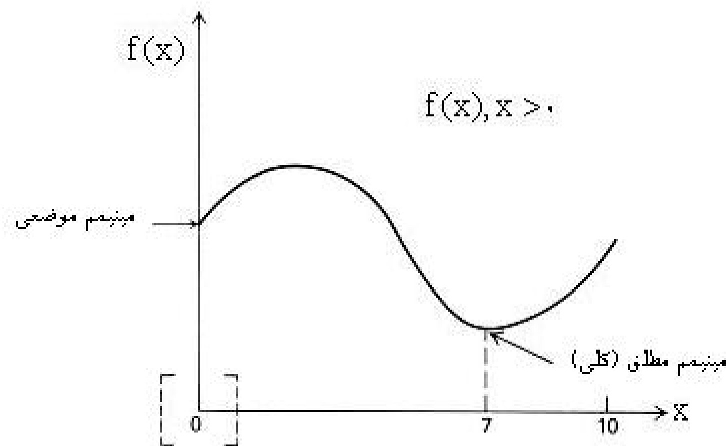
$N_\delta(\bar{x})$ دلتا همسایگی نقطه $\bar{x}$است شامل تمام نقاط یک مجموعه مثل y است با فاصله δ از $\bar{x}$. به بیان ریاضی $N_\delta(\bar{x}) = \{y : \|y - \bar{x}\| < \delta\}$ (بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص ۴۵).

$\bar{x}$ مینیمم مو ضعی اکید[۲] نامیده می شود اگر به ازای یک مقدار $\delta > 0$ $f(x) > f(\bar{x})$ برای ($x \in N_\delta(\bar{x})$ تمام و $x \ne \bar{x}$ (ص۱۶۶ بازاراوهمکاران ،۲۰۰۶).

---

[۱] توجه کنیدکه در این کتاب منظور ازعلائم $\bar{\mathbf{x}}$ و $\mathbf{x'}$ ، میانگین نمونه یا ترانهاده بردارx نیست بلکه یک نقطه از فضای n بعدی را می رساند.

[۲] strict local minimum



شکل۱-۱ مینیمم مطلق و مینیمم مو ضعی یک تابع

جواب شدنی مثل بردار $x^*\in X$ یا که در نامساوی $f(x)\geq f(x^*)$ برای تمام $x\in X$ صدق کند (یعنی علاوه براینکه در محدودیت‌ها صدق کند f را مینیمم کند) مینیمم مطلق (کلی)یا**جواب بهینه‌مطلق یاجواب بهینه** یا جواب نام دارد.

اگر چند بردار خصوصیت اخیر را داشته باشد. مساله جواب چندگانه دارد. واضح است هر مینیمم مطلق ،مینیمم موضعی هم می باشد.

تعریف جواب شدنی اکید[۱]

اگر محدودیت ها خطی وبه شکل $x\geq ۰$, Ax=b باشند برداری مثل x_0 را که درمحدودیت ها صدق و تمام اجزای ان مثبت باشد جواب شدنی اکید نامند.

یک مسئله می تواند بیشینه سازی باشد که در آن صورت فرم مسئله چنین است

$$\text{Max} Z = f(\mathbf{x})$$

s.t

$$g_i(\mathbf{x})\geq ۰ \quad i=۱,۲,\dots,m$$

$$h_i(\mathbf{x})= ۰ \quad i=۱,۲,\dots,\ell$$

$\mathbf{x}\in X$ (زیر مجموعه R^n)

$$\mathbf{x}=x_۱,\dots,x_n$$

---

[۱] strictly feasible

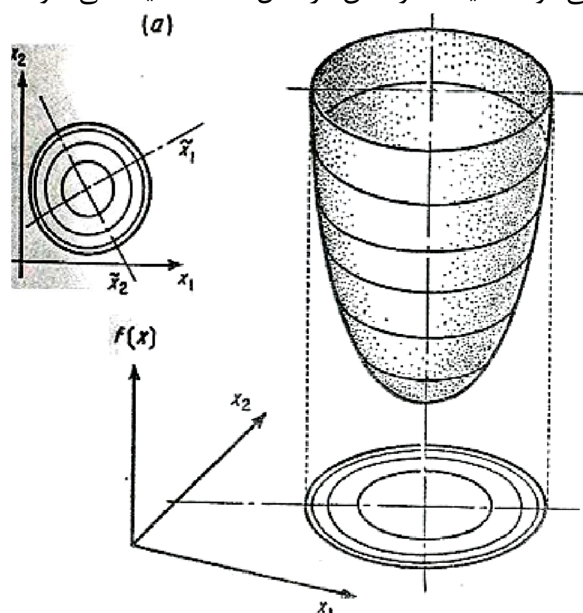
فرم مسئله NLP چنین هم نوشته می شود:

$$\text{Min(or Max)} \; Z = f(x_۱,...,x_n)$$
$$\text{s.t} \quad g_i(x_۱,...,x_n)(\leq = \geq)\ ۰ \quad i = ۱,۲,...,m$$

لازم به ذکر است که در این نوشتار، الگوریتم ها عموماً برای حالت کمینه سازی توضیح داده شده ولی برای حالت بیشینه سازی با اندک تعدیل ازجمله ضرب تابع هدف در یک منفی قابل استفاده است.

۱–۳ منحنی ها یا خَم های هم تراز[1](contour)

اگردر تابع $Z = f(x_۱,...,x_n)$ به Z مقادیر مختلف دهیم و تابع را رسم کنیم منحنی‌های حاصل (دایره‌ها، سهمی ها.....) منحنی‌های هم ترازیا هم سود تابع با مقدار Z داده شده نامیده می‌شود که یک نمونه آن درشکل ۱-۲-a دیده می شود.



شکل ۱-۲-a نمونه منحنی‌های هم ترازیک تابع ۲متغیره درجه ۲ (ص۷۹ کتاب Himmelblau)

یک منحنی هم‌تراز (contour) تابع f برای یک Z مشخص، مکان هندسی نقاطی است که در $f(\mathbf{x})=z$ صدق کنند. برای رسم کنتورهای یک تابع دومتغیره $Z=f(x_۱,x_۲)$

[1] isoprofit, isovalue contour

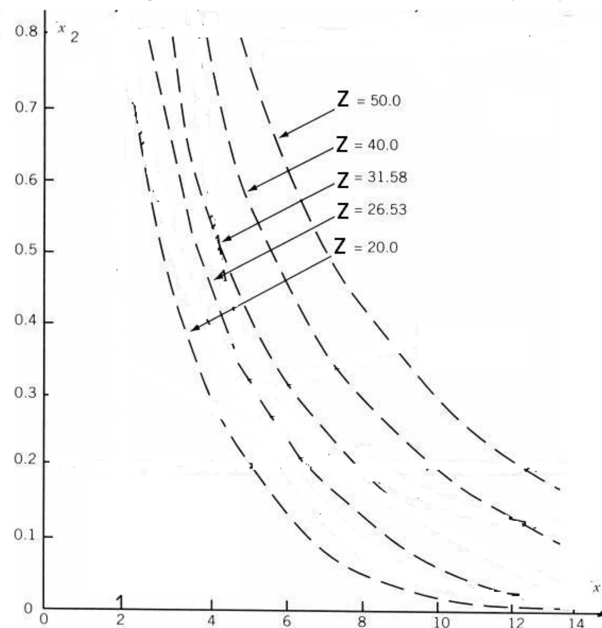
به Z یک مقدار مشخص داده و به ازای x_1های مختلف x_2 متناظر بدست می‌آید و آنگاه این نقاط را در دستگاه مختصات x-y نشان داده و بهم وصل می‌کنیم تا کنتور مربوطه بدست آید. به عنوان مثال برای رسم منحنی‌های هم‌تراز $f(x)=9.82x_1x_2+2x_1=Z$ آنرا برابر یک Z خاص قرار داده و به ازای x_2های مختلف x_1های متناظر را بدست می‌آوریم و سپس نقاط را دردستگاه مختصات رسم و بهم وصل می‌کنیم به عنوان نمونه نقاط زیر را برای Z=۵۰ بدست می آوریم:

x_2	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
x_1	۱۶/۷۷	۱۲/۶۲	۱۰/۱۰	۸/۴۴	۷/۲۴	۶/۳۳	۵/۶۴	۵/۰۷

برای Z=۴۰,۰۰

x_2	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸
x_1	۱۳/۴۰	۱۰/۱۰	۸/۰۸	۶/۷۵	۵/۷۹	۵/۰۶	۴/۵۱	۴/۰۵

۲ کنتور جداول فوق و چند کنتور دیگر در شکل زیر نمایش داده شده است



شکل۱-۲-b منحنی‌های هم تراز تابع $Z=9.82x_1x_2+2x_1$

۱–۳–۱ رسم منحنی‌های هم تراز تابع هدف با نرم افزار

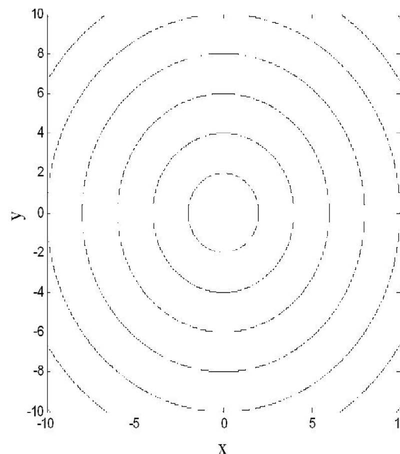
برای آشنایی بادستورات رسم منحنی‌های هم تراز با MATLABچند مثال در زیرآورده شده است

مثال۱–۱ مطلوبست رسم منحنی‌های هم تراز $Z=\sqrt{x^2+y^2}$.

حل: دستورات زیر در محیط متلب با دادن مقادیری به Z منحنی‌های هم تراز $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ را به صورت چند دایره در شکل ۱– ۲ -c رسم می کند:

```
[x,y]= meshgrid(-۱۰:.۰۱:۱۰,-۱۰:.۰۱:۱۰); ;Z=sqrt(x.^۲+y.^۲);
contour(x,y,Z);
```

پایان مثال▲



شکل ۱– ۲ -c منحنی‌های هم تراز $Z=\sqrt{x^2+y^2}$

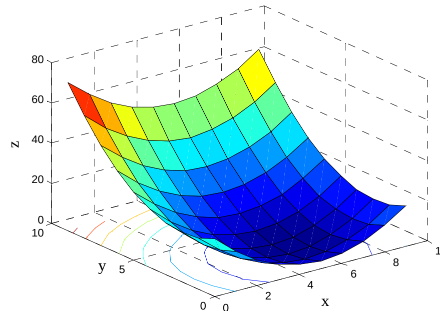
مثال۱–۲ مطلوبست رسم منحنی‌های هم تراز $Z=(x-5)^2+(y-2)^2$

حل

دستورات زیر منحنی‌های هم تراز $Z=(x-5)^2+(y-2)^2$ را به صورت شکل ۱-۲-d رسم می کند

```
[x,y]= meshgrid(.۰۱:۱۰,.۰۱:۱۰);Z=(x-۵).^۲+(y-۲).^۲;surfc(x,y,Z);
```

پایان مثال▲



شکل ۱- ۲--d منحنی‌های هم تراز $Z=(x-5)^2+(y-2)^2$

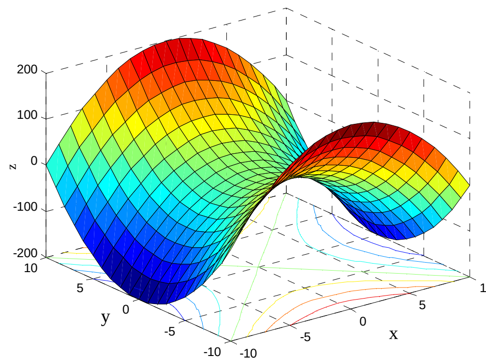
مثال۱-۳ مطلوبست رسم منحنی‌های هم تراز $Z=(-2)[(x)^2-(y)^2]$

حل

دستورات زیر در متلب منحنی‌های هم تراز $Z=(-2)[(x)^2-(y)^2]$ را به صورت شکل ۱-۲-e رسم می کند

[x,y]= meshgrid(-۱۰:۱۰,-۱۰:۱۰);Z=((x).^۲-(y).^۲)*(-۲);surfc(x,y,Z)

پایان مثال ▲



شکل ۱- ۲-e منحنی‌های هم ترا ز $Z=-2x^2+2y^2$

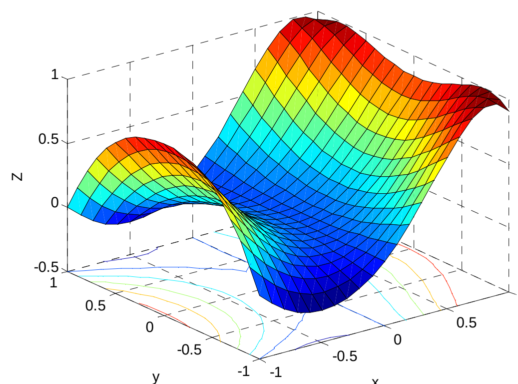
مثال۱-۴

مطلوبست رسم Z منحنی‌های هم تراز $Z=\sin\left(x^2+xy^2\right)$

حل

دستورات زیر منحنی‌های هم تراز $Z=\sin\left(x^2+xy^2\right)$ را به صورت شکل ۱-۲-f رسم می کند

```
x = -۱:۰,۱:۱;y = -۱:۰,۱:۱;[x,y] = meshgrid(x,y);Z =
sin(x.^۲+x.*y.^۲);surfc(x,y,z)
```



شکل ۱- ۲-f منحنی‌های هم تراز $Z=\sin\left(x^2+xy^2\right)$

پایان مثال▲

مثال۱-۵ : مطلوبست رسم منحنی‌های هم تراز نمونه موسوم به حجم بیضیواری[۱]

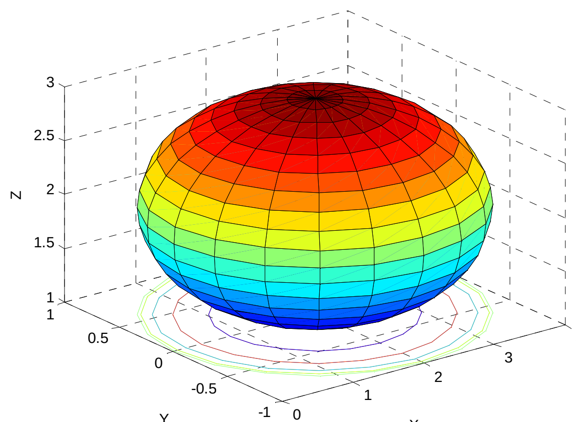
حل: دستورات زیر منحنی‌های هم تراز یک حجم بیضیواری را به صورت شکل ۱-۲-g رسم می کند

```
[x, y,z]=ellipsoid(۲،۰،۲،۲،۱،۱);surfc(x,y,z)
```

پایان مثال▲

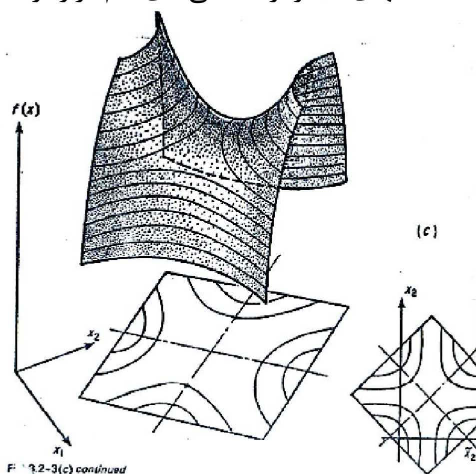
---

[۱] ellipsoid

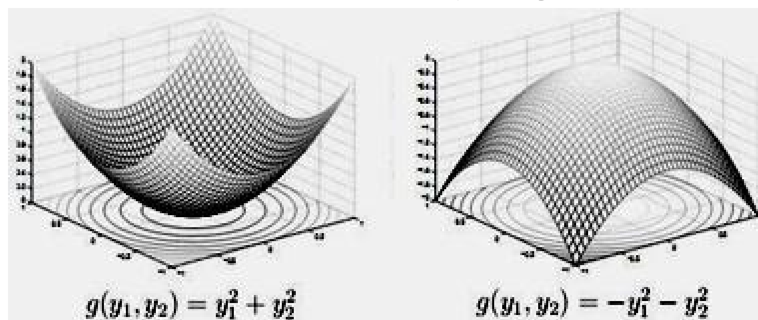


شکل۱- ۲ -g منحنی‌های هم ترازیک حجم بیضیواری(ellipsoid)

شکلهای ۱- ۲- i, h مثالهای دیگر از منحنی‌های هم تراز را نشان می دهد.



شکل۱- ۲-h منحنی‌های هم تراز یک زین (ص۷۹ کتاب Himmelblau)



شکل۱-۲ -i منحنی‌های هم تراز چندتابع ۲ متغیره

۱–۴ یادآوری تعریف گرادیان و هشیان

۱–۴–۱ گرادیان

گرادیان یک تابع مثل $Z=f(\mathbf{X})=f(x_۱,x_۲,x_۳,\ldots)$ تابع برداری زیر است:

$$\nabla f = grad\ f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_۱,x_۲,\ldots)}{\partial x_۱} \\ \frac{\partial f(x_۱,x_۲,\ldots)}{\partial x_۲} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

ازکاربردهای گرادیان درمحاسبه شیب و یا تغییرات تابع است.

مثال۱–۶

مطلوبست محاسبه گرادیان $f(x) = xy + ۲xz$ در نقطه $A=(۱ \quad ۰/۵ \quad ۲)'$

حل

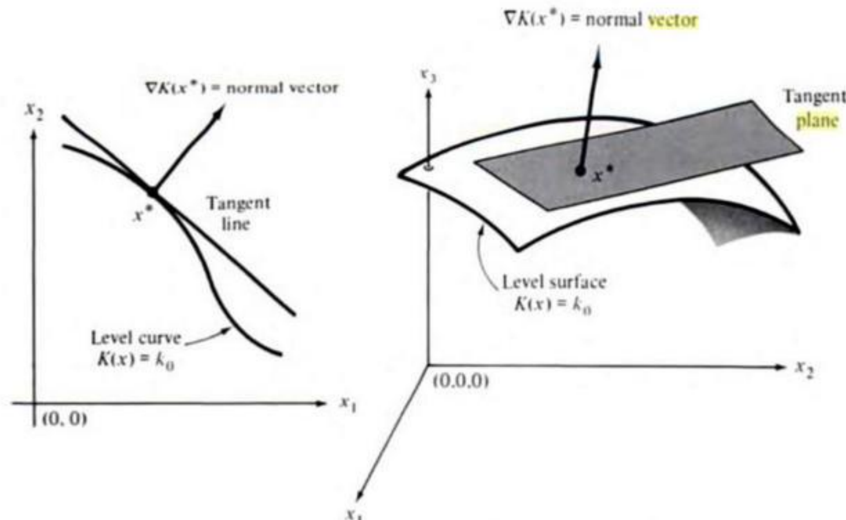
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + ۲z \\ x \\ ۲x \end{pmatrix} \quad \nabla f(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} ۰.۵ + ۴ \\ 1 \\ ۱ \end{pmatrix} = ۴.۵\ i+j+k$$

حل با متلب نیز امکان پذیر است. دستور مربوطه gradient(f) در محیط متلب دارای symbolic toolbox می باشد. پایان مثال▲

۱–۴–۱–۱ ویژگی ۱ گرادیان

بردار گرادیان تابع چند متغیره $f(\mathbf{X})$ در نقطه ای داده شده مثل $\bar{\mathbf{X}}$ یعنی $\nabla f(\bar{\mathbf{X}})$ عمود است بر ابر صفحه مماس [در نقطه$\bar{\mathbf{X}}$] باسطح $f(\mathbf{X})=Z$. Z درا ینجا مقداری است ثابت و $\mathbf{X} = .x_۱ \ldots .x_n$

اثبات در مراجعی مثل ص۴۵۱آورا(۲۰۱۱) آمده است و شکل زیر این ویژگی را برای تابع ۲ متغیره و ۳ متغیره نشان می دهد.



شکل۱-۳ نمایش ویژگی۱ گرادیان (اسمیت،۱۹۹۷ ص۶۹)
راست)جهت گرادیان در تابع ۳متغیره چپ) جهت گرادیان در تابع ۲متغیره

۱-۴-۱-۲ ویژگی ۲ گرادیان

اگر مقدارگرادیانf در نقطه $\bar{\mathbf{X}}$ صفر نباشد جهت گرادیان در آن نقطه نمایانگر بیشترین نرخ افزایش تابع ازآن نقطه است(اثبات در مراجعی مثل ص۴۵۲آورا،۲۰۱۱). به عبارت دیگر حرکت به میزان بسیار کم ازیک نقطه مثل $\bar{\mathbf{X}}$ واقع بر تابع چند متغیره$f(\mathbf{X})$ در جهت گرادیان درآن نقطه یعنی در جهت $\nabla f(\bar{\mathbf{X}})$ ، جهت بیشترین افزایش تابع در آن نقطه است. بردار$\frac{-\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ بردار با طول واحد در خلاف جهت گرادیان در نقطه $\bar{x}$ بوده و جهت بیشترین کاهش تابع از این نقطه است که در آن $\|\nabla f(\bar{x})\|$ طول بردار $\nabla f(\bar{x})$ می‌باشد (اقتباس از قضیه ص۳۸۵ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)
لم زیر هم بیانگر همین ویژگی است که در ص ٦٨٢ وینستون (١٩٩٤) آمده است.

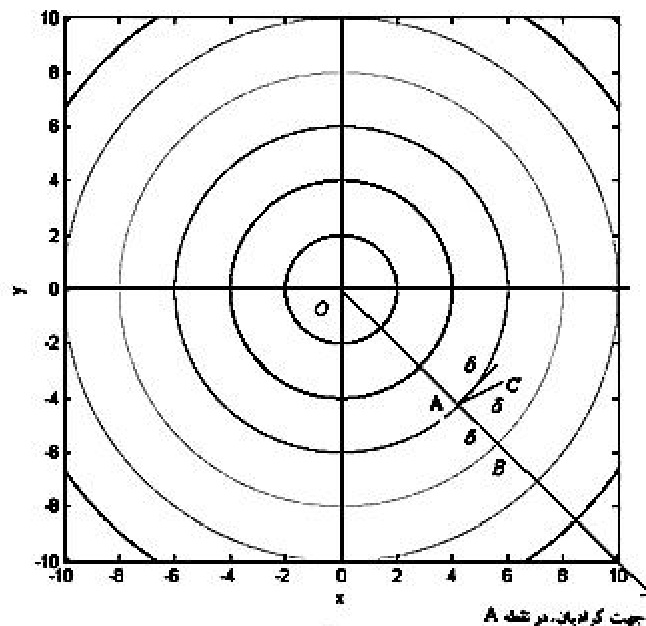
لم(در مورد حرکت درجهت گرادیان):

فرض کنید در نقطه $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ قرار داریم و باندازه فاصله کوچک δ در جهت بردار d حرکت کنیم, آنگاه بیشترین مقدار افزایش در تابع $f(x_1,...,x_n)$ وقتی خواهد بود که $d=\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$.

$\nabla f(x)$، گرادیان تابع $f(\mathbf{x}) = f(x_1,...,x_n)$ در نقطه **x**، نشان دهنده جهت $d = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ از نقطه x است.

پایان لم ■

برای توجیه هندسی مطلب ، فرض کنید در شکل زیر در نقطه A باشیم؛ با توجه به اینکه هر منحنی همتراز [1] نماینده یک مقدار تابع است



شکل۱-۴ نمایش ترسیمی جهت گرایان به عنوان جهت بیشترین افزایش تابع به کمک منحنی های هم تراز برای تابع دو متغیره $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

اگر از یک نقطه در جهت گرادیان, که عمود بر تابع در آن نقطه است, به اندازه مقدار کمی مثل δ حرکت کنیم مقدار جدید تابع مقدار OB خواهد بودواگر در جهتی مثل AC باندازه مقدار کوچک δ حرکت کنیم مقدار جدید تابع مقدار OC خواهد بود.

کدام بیشتر است OB یا OC؟ جواب OB

---

[1] یاد آوری می شود که قبلاً دیدید که منحنی های هم تراز با دستورات زیر در محیط متلب رسم شده اند

```
[x۱,x۲]= meshgrid(-۱۰:.۰۱:۱۰,-۱۰:.۰۱:۱۰);Z=sqrt(x۱.^۲+x۲.^۲);contour(x۱,x۲,Z);
```

اگر در B باشیم در خلاف جهت گرادیان تابع باندازه مقدار کوچک حرکت کنیم بیشترین کاهش را خواهیم داشت نسبت به حرکت در سایر جهات.

اگر در جهت عمود بر گرادیان مقدار خیلی کمی حرکت کنیم تقریباً هیچگونه افزایش یا کاهش در تابع نداریم.

در ضمن شایان ذکر است که برای تابع دو متغیرهf برایند $\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)$ و $\frac{\partial f}{\partial x_2}(A)$ جهت گرادیان در نقطه A می باشدکه عمود بر خط مماس بر منحنی همتراز در A می باشد. در ضمن مقدارمولفه $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ به ازای نقطه خاص Aبا طول $x_1 = \bar{x}_1$ وعرض $x_2 = \bar{x}_2$ مقداری را می دهد که برابر ضریب زاویه (شیب) خط مماس در آن نقطه برمنحنی همترازی (contour) است که ازآن نقطه می گذرد.

مثال۱-۷

گرادیان $f(\mathbf{x}) = xy + 2xz$ را بدست آورید.

حل با متلب

```
>> syms x y z;
>> f = x*y + 2*z*x;
>> G=gradient(f,[x,y,z])
 G =
     y + 2*z
           x
         2*x
```

پایان مثال ▲

مثال۱-۸

گرادیان $f(\mathbf{x}) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy$ را بدست آورید. این بردار در نقطه $A=(1,0,1)'$ چیست؟

حل با متلب

```
>> syms x y z;
>> f=x^4 + 2*y^2+3*z^2-4*x*y;
>> Gradf = gradient(f,[x,y,z])   or   Gradf =  gradient(f)
Gradf =
 4*x^3 - 4*y
   4*y - 4*x
         6*z
```

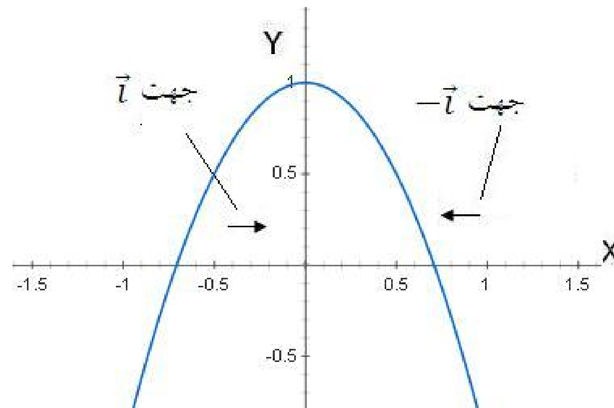
ودر نتیجه گرادیان در نقطه A=(۱،۰،۱)' چنین می شود:

$$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} ۴ \\ -۴ \\ ۶ \end{pmatrix} \text{ یا. } \nabla f(A) = ۴\vec{i} + -۴\vec{j} + ۶\vec{k}.$$ پایان مثال ▲

مثال۱-۹ مفهوم و جهت گرادیان را در یک تابع تک متغیره را نشان دهید.

حل

تابع یک متغیره $f(x) = ۱ - ۲x^۲$ را در نظر می گیریم. تابع در شکل زیر رسم شده است:



$$f(x) = ۱ - ۲x^۲, \qquad \nabla f(x) = f'(x) = -۴x$$

گرادیان در نقطه x=۱ :

$$\vec{\nabla} f(x = ۱) = -۴\vec{i}$$

بردار واحد در جهت گرادیان$= \frac{\vec{\nabla} f\,(۱)}{\|\vec{\nabla} f\,(۱)\|} = \frac{-۴\vec{i}}{\sqrt{۱۶+۰}} = -\vec{i}$

مقدار تابع در این نقطه $f(x) = -۱$ و گرادیان در این نقطه $-۴\vec{i}$ است پس اگر از نقطه x=۱ کمی در جهت گرادیان تابع در این نقطه (به سمت چپ محور افقی) حرکت کنیم مقدار تابع افزایش مییابد؛ مثلاً اگر به نقطه x=۰.۹۵ برویم مقدار تابع در این نقطه $f(x) = -۰.۸$ می شود که کمی بیشتر شده است.

گرادیان در نقطه x= -۰,۵ چنین است :

$$\vec{\nabla} f(x = -۰.۵) = ۲\,\vec{i}$$

بردار واحد در جهت گرادیان$= \frac{\vec{\nabla} f\,(۰.۵)}{\|\vec{\nabla} f\,(۰.۵)\|} = \frac{۲\vec{i}}{\sqrt{۴}} = \vec{i}$

مقدار تابع در این نقطه $f(x) = ۰.۵$ و گرادیان در این نقطه $۲\vec{i}$ است پس اگر از نقطه x=-۰,۵ کمی در جهت گرادیان تابع در این نقطه (به سمت راست محور افقی) حرکت کنیم مقدار تابع افزایش مییابد؛ مثلاً اگر به نقطه x=-۰,۴۹ برویم مقدار تابع در این نقطه $f(x) = ۰.۵۲$ می شود که کمی بیشتر است..پایان مثال ▲

مثال۱-۱۰

مطلوبست رسم منحنی های هم تراز تابع $Z = x^2 + y^2$ و نیز جهت گرادیان در نقطه $A(x = ۰.۵$ و $y = -۰.۵)$.

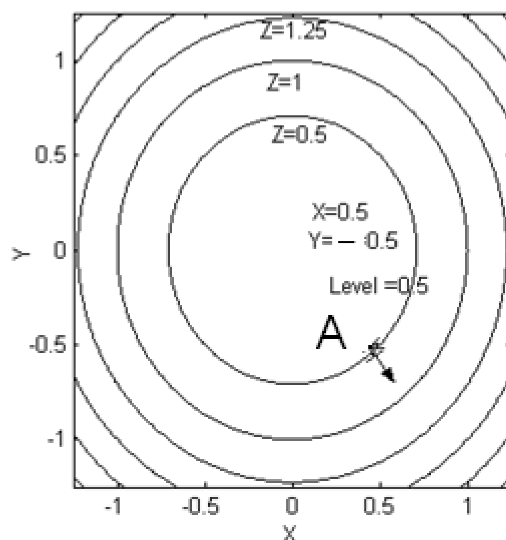
حل

کنتور ها چنین رسم می شود

```
[x,y]= meshgrid(-۱,۲۵:.۰۱:۱,۲۵,-۱,۲۵:.۰۱:۱,۲۵); ;Z=(x.^۲+y.^۲); contour(x,y,Z);
```

$$Z = x^2 + y^2 \quad \nabla f = \begin{pmatrix} ۲x \\ ۲y \end{pmatrix} \qquad \nabla f(A) = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$$

جهت گرادیان در نقطه داده شده که در سطح و کنتور Z=۰,۵. قرار دارد در شکل نشان داده شده است و برطبق یک قضیه اگر از یک نقطه روی تابع مقدار بسیار کمی در جهت گرادیان حرکت کنیم این جهت بیشترین افزایش تابع است. پس اگر از این نقطه در جهت بردار نشان داده شده در شکل مقدار کمی حرکت کنیم به نقطه جدیدی روی کنتوری با مقدار بیشتر که برابر مقدار تابع در نقطه جدید است می رسیم.



پایان مثال ▲

۱–۴–۲ هشیان

هشیان تابع $f(x_1..x_n)$، که منسوب به ریاضیدان آلمانی هس(Hesse) می باشد ودر این جا با $H(x_1,...,x_n)$ وگاه با $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ نمایش داده می شود، شامل ماتریس مشتقات جزیی در جه ۲ تابع $f(x_1..x_n)$ می باشد. هشیان ماتریسی متقارن و nدر n با عنصر (ij) برابر $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ است:

$$H(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

علت تقارن در این ماتریس اینست که: $\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$.

مثال۱-۱۱

مطلوبست محاسبه هشیان تابع $f = x^4 + 2y + 3z^2 - 4xy$.

حل

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 2 - 4x \\ 6z \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(,y,z) = H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(.x,y,z)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(.x,y,z)}{\partial z \partial xy} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

محاسبه هشیان با متلب

```
>> syms x y z;
>> f = x^4 + 2*y+3*z^2-4*x*y;
>> H=hessian(f,[x,y,z])

H =

[ 12*x^2, -4, 0]
[     -4,  0, 0]
[      0,  0, 6]
```

پایان مثال ▲

۱–۵ مدلسازی مسائل غیر خطی

در این جا فرض بر این است که خواننده به اندازه کافی با مفهوم مدل و مدلسازی به ویژه مدلسازی ریاضی آشناست.   بهر حال برای مرور این بحث می توان به منابعی نظیر فصل اول بازرگان(۱۳۹۵) قابل دانلود از اینترنت مراجعه کرد. . در بهینه سازی غیر خطی اولین گام تهیه یک مدل غیر خطی ریاضی می باشد تا بهترین گزینه از میان گزینه های ممکن برای متغیرها انتخاب شود.

همانند سایر مدل سازی ها در این جا نیز می خواهیم جهت افزایش بازدهی، منابع محدودمان را به یک سری فعالیت و متغیر از قبل تعریف شده تخصیص داده و اندازه بهینه مقادیر تخصیص داده شده را بیابیم تا تابعی (مثل سود) بیشینه یا تابعی کمینه (مانند تابع هزینه تولید، وزن تلسکوپ یا خرپا...) شود.

۱–۵–۱   گامهای مدلسازی و فرموله کردن مساله

لازم به ذکر است که مراحل مدلسازی و فرموله کردن یک مساله را می‌توان چنین خلاصه کرد(آرورا،۲۰۰۴ص ۱۵):

گام۱) شرح مساله   گام۲) جمع آوری اطلاعات

گام۳) مشخص کردن متغیرها   گام۴) مشخص کردن تابع هدف (تابعی که باید بهینه شود)

گام۵) مشخص کردن محدودیت ها.

ذیلاً به چند مثال مدل برنامه ریزی غیر خطی پرداخته می شود.

۱–۵–۲ مثالهایی از مدلها و مسایل بهینه سازی غیر خطی(NLP)

مثال۱–۱۲ (ص۶۴۰ وینستون ،۱۹۹۴)

در یک شرکت تولیدی هر واحد محصولی c واحد پول هزینه برداشته و فروش آن تابعی معلوم مثل D(p) از قیمت فروش(p) است. اگر تابع(D(p دردست باشد, قیمت فروش چه مقدار بایدباشد تا سود شرکت حداکثر گردد.

حل   مدل مساله چنین می شود

$$MaxZ=(p-c)\times D(p)$$
$$p>0$$

اگر تابع D(p) غیرخطی باشد یاحداقل عدد ثابت نباشد با یک NLP یک متغیره بی محدودیت روبروایم. پایان مثال ▲

حالت چند متغیره مدل NLP بی محدودیت آنست که می خواهیم مقادیر بهینه چند متغیر را طوری تعیین کنیم که یک ویژگی که تابعی از این متغیرهاست ماکزیمم یا مینیمم گردد.   پس وقتی یک رابطه ریاضی شامل چند متغیر مستقل ویک متغیر پاسخ در اختیار داریم و باداشتن داده به کمک   روش حداقل مجذورات خطا (LSE) پارامترهای این رابطه را براورد می کنیم، با حل یک مساله غیر خطی بدون محدودیت روبروئیم. هم چنین است در هنگام براورد پارامترهای یک توزیع آماری با روش حداکثر درستنمایی ا(MLE).

مثال۱-۱۳: n زوج $(x_1,y_1),\dots,(x_i,y_i),\dots,(x_n,y_n)$ از Y (متغیر وابسته) و X (متغیر مستقل) در اختیار داریم. معادله خط برآورد متغیر وابسته را به صورت $\hat{y}_i = a + bx_i$ نشان می‌دهیم.   حال می‌خواهیم a و b را طوری برآورد کنیم که مقادیر اندازه‌گیری شده واقعی و پیش‌بینی $(\hat{y}_i , y_i)$هر چه بیشتر به یکدیگر نزدیک باشند به عبارت دیگر خطا حداقل باشد. یک مدل خطی بنویسید تا a و b طوری برآورد شوند که اگر مقدار x_i را در رابطه قرار دهیم $\hat{y}_i$ هر چه نزدیکتر به مقدار واقعی (y_i) به‌دست آید یا مجموع مجذورات خطاها (SSE[1])حداقل گردد.

حل :

در روش حداقل مجذورات خطا a و b طوری برآورد می‌شود که $SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ حداقل شود:. مدل چنین می شود:

$$Min\ SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\mathrm{x}_i)^2$$

چون مقادیر (x_i , y_i) ها را داریم با گذاشتن این مقادیر در تابع هدف و حل مدل a, b بدست می آید   پایان مثال ▲

[1]- Sum of Squared Errors

مثال ۱-۱۴[1]مشتریان یک کارگاه می توانند خامه فرم گرفته و پودر خامه سفارش دهند. هزینه سفارش‌هر کدام که تابعی از میزان خریداری شده از محصول(x_1,x_2) است به فرم زیر می باشد:

هزینه خرید پودر خامه به میزان(X_1):	$15000x_1(1-e^{-x_1})$
هزینه خرید خامه فرم داده شده باندازه(X_2)::	$12000x_2(1-e^{-x_2})$

علاوبر هزینه های فوق از مشتری خواسته می‌شود به میزان $85000e^{-(x_1+x_2)}$ هزینه دیگری بپردازد .

مدل مساله را طوری بنویسید که اگر یک مشتری بخواهد ۲ محصول راسفارش دهد بطوری که کمترین هزینه خرید را داشته باشد ازهر محصول چه میزان سفارش دهد؟

حل: مدل مساله :

$$\text{Min } Z=15000x_1(1-e^{-x_1})+12000x_2(1-e^{-x_2})+85000e^{-x_1-x_2}$$
$$x_1, x_2 > 0$$

صورت مدل درلینگو

```
min=15000*x1 *(1-@exp(-x1 ) )+12000*x2 *(1-@exp(-x2)  )+85000*@exp(-x1-x2 );
    x1>0; x2>0;
```

پایان مثال ▲

مثال ۱-۱۵ (ص۲۱آرورا،۲۰۱۱)

شکل زیر یک مخزن کروی را نشان می دهد که عایق بندی شده و در ضمن با یک دستگاه تبرید خنک می‌شود. می خواهیم یک مدل غیرخطی نوشته شود تا ضخامت عایق را طوری تعیین نماید که هزینه کل طبق توضیحات و علایم زیر مینیمم شود.

علایم:

واحد	معادل انگلیسی	شرح	علامت
m^2	surface area of a sphere	سطح کره $= 4\pi r^2$	A
کلوین متر بر وات	the thermal resistivity per unit thickness in Kelvin-meter per Watt,	مقاومت حرارتی به ازای واحد ضخامت	c_1
$\$/m^3$	the insulation cost per cubic meter	هزینه عایقکاری به ازای هر متر مکعب	c_2
\$/W-hr	the cost of the refrigeration equipment	هزینه دستگاه تبرید به ازای هر وات ساعت ظرفیت	c_3

[1] از خانم مهندس خلیل یزدی دانش آموخته دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

علامت	شرح	معادل انگلیسی	واحد
		per watt-hour of capacity	
c_4	هزینه سالیانه کارکرد دستگاه تبرید به ازای هر وات ساعت	the annual cost of running the refrigeration equipment per Watt-hour	$/W-hr
G	میزان سالانه دریافت گرما توسط مخزن $G=\frac{(365)(24)(\Delta t)(4\pi r^2)}{tc_1}$	annual heat gain	W-hr
I	نرخ بهره سا لانه	return per dollar per period	
n	عمر[مفید]دستگاه	useful lifetime	سال
r	شعاع کره	radius of a sphere	متر
t	ضخامت عایق	insulation width	متر
ΔT	میانگین اختلاف دمای داخل و خارج مخزن		کلوین
uspw[1]	فاکتور ارزش کنونی سری یکنواخت $uspwf=\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	uniform series present worth factor	

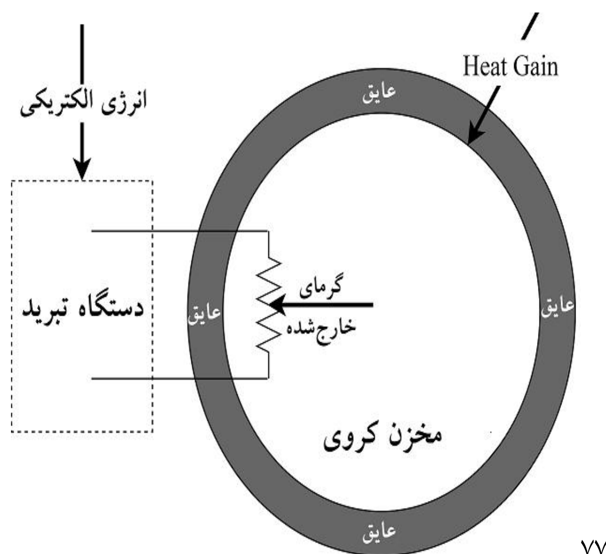
هدف از این مساله اینست که ضخامت عایق(t) یک مخزن کروی(طبق شکل زیر) با شعاع r متر طوری تعیین شود که هزینه خنک کردن مخزن طی مدت عمر مفید مخزن حداقل گردد[2]. هزینه های خنک سازی شامل

۱) هزینه های نصب و راه‌اندازی،
۲) کار کرد سیستم تبرید ،
۳) هزینه تهیه ونصب عایق است.

ضخامت عایق از شعاع نباید بیشتر نشود. حداقل ضخامت عایق موجود در بازار برابر t_{min} می باشد. طول عمر دستگاه ده سال (n=۱۰)، نرخ بهره ۱۰٪ و ارزش اسقاطی صفر است.

[1] این فاکتور در اقتصاد مهندسی با P/A نشان داده می شود(نگاه کنید اسکو نژاد ۱۳۹۳ ، اقتصاد مهندسی، ص ۲۸)

[2] توضیح اینکه به دلیل اینکه دمای داخل مخزن کمتر از دمای بیرون میباشد به طور طبیعی حرارت از بیرون به داخل مخزن متتقل می شود و در صورتی که پیشگیری نشود پس از مدتی دمای داخل با دمای بیرون یکی خواهد شد. برای جلوگیری از اینکار باید حرارت وارد شده به مخزن توسط سیستم تبرید از مخزن گرفته شود. سیستم تبرید خرج دارد از جمله برق مصرف می کند. هر قدر مخزن را بیشتر عایق کاری کنیم سیستم تبرید کمتر کار می کند و هزینه (برق،...) آن کمتر خواهد بود. بدیهی است که عایق کاری هم هزینه براست . حال سوال اینست که چه ضخامت عایق از نظر اقتصادی بهینه است؟(با تشکر از دکتر مازیار سلمان زاده و دکترمحمد حسن صفاری پور)



شکل ۱-۵ شکل شماتیک[۱] مخزن مثال ۱-۱۵

حرارت اکتسابی[۲] (G) مخزن از هوای بیرون در سال طبق فرمول زیر محاسبه شود:

$$G = \frac{(۳۶۵)(۲۴)(\Delta T)(A)}{(t)(c_۱)} \quad \text{watt-hours}$$

(G برای محاسبه ظرفیت مورد نیاز دستگاه تبرید وهزینه کارکردآن لازم است)

که درآن

ΔT = میانگین اختلاف دمای داخل و خارج مخزن

$c_۱$ = مقاومت حرارتی به ازای واحد ضخامت(Kelvin-meter/ Watt)

A = سطح کره = $۴\pi r^۲$

حال فرض کنید

$c_۲$ = هزینه عایقکاری به ازای هر متر مکعب

$c_۳$ = هزینه دستگاه تبرید به ازای هر وات ساعت ظرفیت,($/Wh)

می‌خواهیم ضخامت عایق(t) را طوری تعیین کنیم که هزینه کل ده ساله طبق ارزش فعلی با نرخ بهره سالیانه ۱۰٪ مینیمم شود. هزینه کل(cost) چنین است:

۱ ترسیم توسط مهندس امیررضا ترابی دانش آموخته ارشد مهندسی صنایع دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲ annual heat gain

$Cost = c_۳G + uspwf(۰.۱,۱۰)\, c_۴G + c_۲ \times ۴\pi r^۲ t$

که درآن

$$G = \frac{(۳۶۵)(۲۴)(\Delta t)(۴\pi r^۲)}{t \times c_۱}$$

$uspwf(i,n) = \frac{۱}{i}(۱-(۱+i)^{-n}) = P/A$ (آرورا،۲۰۱۱ ص ۵۹۷)

$c_۴$ = هزینه سالیانه کارکرد دستگاه تبرید به ازای هر وات ساعت

t = ضخامت عایق

r = شعاع مخزن

مقدار تابع *uspwf* برای ده سال و نرخ i=٪۱۰ :

i=.۱;n=۱۰;PA=(۱/i)*(۱-(۱+i)^-n) = ۶.۱۴۴۶

طبق صورت مساله: $t_{\min} \le t \ll r$

می‌خواهیم t را طوری تعیین کنیم که هزینه حداقل شود.

پس مدل چنین می شود:

$Min\ Cost = c_۲ \times ۴\pi r^۲ t + c_۳G + ۶.۱۴۴۶\ c_۴ \times G$

s.t.

$$G = \frac{(۳۶۵)(۲۴)(\Delta t)(۴\pi r^۲)}{t \times c_۱}$$

$$t_{\min} \le t \ll r$$

پایان مثال ▲

مثال۱-۱۶[۱]

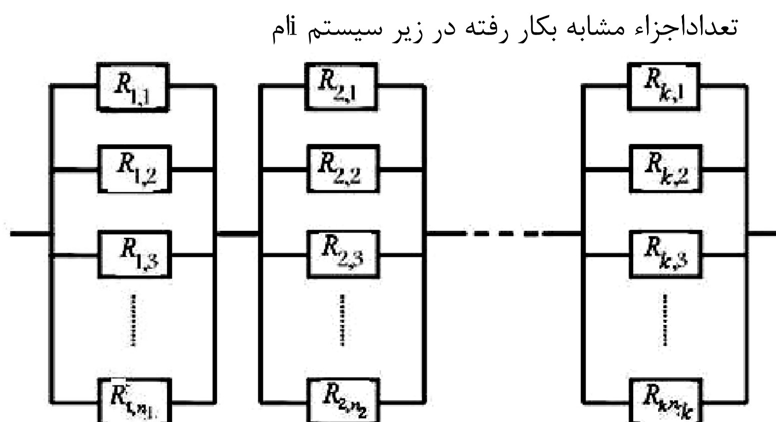
سیستم سری موازی شکل زیر را در نظر بگیرید می خواهیم تعداد اجزا و پایایی هر جزء مربوط به هرزیر سیستم را طوری بدست آوریم تا پایائی کل سیستم به حداکثر خود برسد.

علایم با فرض یکسانی پایایی اجزای هر زیر سیستم :

R_i پایائی اجزاء بکار رفته درزیر سیستم iام

[۱] از کتاب در دست انتشار مهندسی پایایی بازرگان(۱۴۰۱)

n_i تعداداجزاء مشابه بکار رفته در زیر سیستم iام



شکل ۱-٦ سیستم سری موازی

پایائی زیر سیستم اول برابر $1-(1-R_1)^{n_1}$، و

پایائی زیر سیستم iام برابر $1-(1-R_i)^{n_i}$ می‌باشد $i=1...k$

آنگاه هدف اینست که R_i و n_i طوری بدست آورده شود تا پایائی کل سیستم ماکزیمم شود:

$$MaxZ = R_{sys} = \prod_{i=1}^{k}[1-(1-R_i)^{n_i}]$$

s.t.

$$0 < R_i \leq 1 \qquad i = 1,2,\dots,k$$

$$n_i = \text{عدد صحیح} \qquad i = 1,2,\dots,k$$

پایان مثال ▲

مثال ۱-۱۷[1]

در برنامه ریزی منطقه‌ای، منابع آبی گاه به علت وجود آلوده‌سازهای آلی نیاز به جدا نمودن آلوده ساز از سیستم آبی می‌باشد. مدل زیر با قصد مینیمم کردن هزینه های تحمیل شده به منطقه و حصول کیفیت های حداقلی تنظیم شده است؛ متغیر x_j آن

[1] https://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-13.pdf

مقدار BOD (اکسیژن مورد نیاز اعمال بیو شیمیایی[1]) می‌باشد که از آب منبع j با هزینه $f(\boldsymbol{x_j})$ باید حذف شود.

$$Min \quad \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j) \geq b_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,m$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

که در آن

$\boldsymbol{x_j}$ آن مقدار BOD باشد که از آب منبع j با هزینه $f(\boldsymbol{x_j})$ باید حذف شود

a_{ij} کیفیت حاصل شده از حذف یک واحد BOD از منبع j در محل i

u_j حداکثر BOD قابل جدایش از منبع j

b_i حداقلِ کیفیتِ مطلوبِ سیستم در محل i

پایان مثال ▲

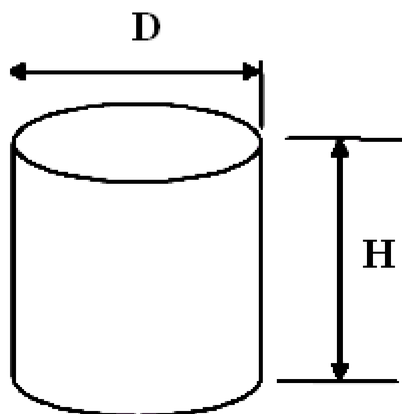
مثال۱-۱۸ بهینه سازی هزینه ساخت یک مخزن[2]

مخزنی استوانه ای شکل با ارتفاع H ، قطر D وحجم $V=\frac{\pi}{4}D^2H$ را در نظر بگیرید

---

[1] Biological Oxygen Demand

[2] Lorenz T. B., 2010 Nonlinear Programming:Concepts, Algor.& App.; SIAM, Philafel. توسط خانم براتی



می‌خواهیم ارتفاع و قطر را به گونه ای تعیین کنیم که هزینه های تولید آن حداقل و قطر از $D_.$ تجاوز ننموده حداقلِ حجم $V_.$ تامین شود. هزینه های مربوط به ساخت سطح مخزن (به طور مثال مقدار مواد مورد نیاز) به صورت زیر است :

C_S هزینه هر واحد از سطح جانبی مخزن

C_t هزینه هر واحد از قسمت بالا و پایین(کف) مخزن است .

بنابراین خواهیم داشت :

$$Min\, f(D,H) = C_S \pi DL + C_t \frac{\pi}{۲} D^{۲}$$

s.t.

$$\frac{\pi}{۴} D^{۲} H \geq V_.$$

$$۰ < D \leq D_.$$

$$H > ۰$$

بدیهی است که اگر حجم مخزن بخواهد دقیقاً برابر $V_.$ باشد، محدودیت ها چنین خواهد بود:

s.t.

$$\frac{\pi}{۴} D^{۲} H - V_. \quad = ۰$$

$$۰ < D \leq D_.$$

$$H > ۰$$

پایان مثال ▲

مثال۱-۱۹ [1]

قراراست به منظور رشد کشاورزی دریک استان بین چهار منطقه شهری مستعد کشاورزی، سیستم انتقال آب اجرا شود. ازاینرو لازم است تا تجهیزات و منابع آب را طوری قرار دهیم تا کمترین فاصله جمعی را از این ۴ شهر داشته و فاصله این سیستم تا هر یک از این شهرها حداکثر k کیلومتر باشد. بدین منظور مختصات شهرها در جدول داده شده است. مدل غیرخطی مساله را طوری بنویسید که مختصات بهینه محل استقرار تجهیزات را معین نماید.

شهر	مختصات	
۱	x_1	y_1
۲	x_2	y_2
۳	x_3	y_3
٤	x_4	y_4

حل: مدل چنین خواهد بود:

x,y = مختصات محل استقرار تجهیزات.

$$\text{Min } Z=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}+\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}+\sqrt{(x_3-x)^2+(y_3-y)^2}+\sqrt{(x_4-x)^2+(y_4-y)^2}$$

s.t:

$$\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}\le k$$
$$\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}\le k$$
$$\sqrt{(x_3-x)^2+(y_3-y)^2}\le k$$
$$\sqrt{(x_4-x)^2+(y_4-y)^2}\le k$$

$$x,y>0$$

پایان مثال ▲

[1] توسط آقای مهندس خسروجردی دانش آموخته ارشد دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنرکرمان

مثال۱-۲۰[1]

برای بهینه سازی تولید از میادین هیدروکربوری در چاه‌های هوشمند با تنظیم بهینه شیرهای کنترلی هوشمند رابطه‌ی بین تنظیم شیرهای کنترلی با مقدار تولید نفت و بهینه سازی غیرخطی برای تنظیم شیرهای کنترلی به منظور بیشینه کردن تولید نفت و کمینه کردن تولید آب و کاهش زمان محاسبات:

بیان مسئله:

تولید نفت از مخازن نفتی با عدم قطعیت همراه است که ناشی از عدم شناخت کامل وضعیت مخزن به دلیل ناهمگونی مخزن است در نتیجه برنامه ریزی تولید مشکل است و استفاده از چاه‌های هوشمند و شیرهای کنترلی هوشمند مهم به شمار می آید. سطح مطلوبیت خروجی هر شیر کنترلی را طوری تعیین کنید که در مجموع تولید نفت بیشینه گردد.

مدل مسئله :

فرض: چاه مورد مطالعه N عدد شیر کنترلی با K وضعیت متمایز است.

هدف: بیشینه کردن تولید نفت تجمعی و کمینه کردن تولید آب تجمعی از طریق تنظیم بهینه شیرهای کنترلی است. توجه:

تولید تجمعی = مجموع تولید از زمان شروع تا پایان افق زمانی.

تابع هدف: در قالب تفاضل تولید نفت(Np) و آب تجمعی(Wp) است.

$$\max \left(N_p - W_p\right)$$

میزان نفت و آب تجمعی از تمامی شیرهای کنترلی به ترتیب چنین است:

$$W_p = \sum_{i=1}^{n} q_{t_i}\left(w_{c_i}\right) \quad \text{و} \quad N_p = \sum_{i=1}^{n} q_{t_i}\left(1 - w_{c_i}\right)$$

روابط نشان می‌دهند که میزان تولید آب و نفت تجمعی تابعی از q_{t_i} (نرخ تولید کل سیال بر حسب بشکه درروز) و درصد آب همراه آب همراه نفت تولیدی است که با

[1] توسط مهندس بهاره فرحبخش از مقاله میر حسنی و همکاران(۱۳۹۱) بهینه سازی تولید نفت در چاههای هوشمند با روش طرح آزمایش ها درمجله پژوهش نفت سال ۲۲ شماره ۷۲

W_c نشان داد شده و به آن برش آب[1] هم می گویند. ارتباط نرخ جریان سیال نفت(q_{o_i}) و آب(q_{w_i}) با نرخ تولید کل سیال(q_{t_i}) چنین است

$$q_{t_i} = q_{o_i} + q_{w_i}$$

درصد برش آب(W_c)به صورت نسبت نرخ جریان سیال آب(q_{w_i})به نرخ جریان تولید کل سیال(q_{t_i}) تعریف می گردد:

$$w_c = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} q_{w_i}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} q_{t_i}\right)}$$

تابع هدف باید با توجه به محدودیت های زیر بیشینه شود:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{o_i} \le q$$

$$w_c \le w_{c_0}$$

محدودیت اول تضمین میکند که مجموع نفت تولیدی از شیرهای کنترل کمتر مساوی مقدار ثابت q. (بشکه به روز) باشد.

محدودیت دوم درصد برش آب در سیال تولیدی از چاه مجهز به شیرهای کنترلی را به مقدار داده شده w_{c_o} محدود می‌کند. پایان مثال ▲

مثال۱-۲۱

محیط مستطیل شکل کف یک گودال باید ۱۴۴ فوت و عمق گودال ۸ فوت باید باشد . طول L و عرض W کف رابرای حداکثر کردن حجم گودال بیابید.

maxZ=۸WL

s.t.

۲W+۲L=۱۴۴;

W>۰;L>۰

پایان مثال ▲

---

[1] Water Cut

مثال۱-۲۲

می خواهیم مخزنی مکعب مستطیلی با طول وعرض و ارتفاع h,b,a طوری طراحی کنیم که حجمش حداقل $V_۰$ و سطح کلش مینیمم گردد. مدل مساله چنین است:

$$\text{MinZ} = ۲(ab + bh + ah)$$
$$\text{s.t.}$$
$$abh \geq V_۰; \quad a, b, h > ۰$$

پایان مثال ▲

مثال۱-۲۳ کاربرد نظامی برنامه ریزی غیر خطی[۱]

در این مثال قصد اینست که دو نوع مدل تخصیص سلاح شرح داده شود. مدل اول تخصیص سلاح به هر یک از اهداف به گونه ای است که حداکثر میزان تخریب مورد انتظار بدست آید. محدودیت ها به صورت خطی وشامل حد اکثر تعداد سلاح موجود از هر نوع و حداقل تعداد سلاح از هر نوع که باید به اهداف تخصیص یابد میباشند. تابع هدف غیر خطی میباشد.

مدل دوم تخصیص سلاح به اهداف با هدف کمینه کردن هزینه سلاح و به دست آوردن حداقل تخریب هم بر اهداف متفاوت و هم بر کلاس های متفاوت از اهداف میباشد.

مدل اول برای بیشینه کردن تخریب اهداف مورد انتظار:

متغیرها:

$x_{ij} =$ تعداد سلاح از نوع i تخصیص یافته به هدف j

$i = 1, \ldots, p \quad j = 1, \ldots, q$

محدودیت روی تعداد سلاح تخصیص یافته به هدف j :

$a_i =$ کل تعداد موجود از سلاحi

$b_j =$ حداقل تعداد سلاح از هر نوع، تخصیص یافته به هدفj

محدودیت هابرروی کل تعداد سلاح و حداقل سلاح تخصیص یافته به اهداف به صورت زیر می باشد:

---

[۱] Bracken, J. and McCormick, G.P., ۱۹۶۸. Selected applications of nonlinear programming (No. RAC-R-۶۸). Research Analysys Corp McLean VA(**گرد آورنده: آقای امین یوسفی (ورودی ارشد ۹۴ صنایع فنی کرمان**

$\sum_{j=1}^{q} x_{ij} \le a_i,\ i = 1, \dots, p \quad \sum_{i=1}^{p} x_{ij} \ge b_j,\ j = 1, \dots, q$

تابع هدف به صورت احتمال تخریب اهداف مختلف وزن داده شده بوسیله اهمیت نظامی آنها به صورت زیر تعریف میشود:

α_{ij} = احتمال عدم تخریب هدفj به وسیله حمله توسط یک واحد از سلاح i

u_j= ارزش نظامی هدفj

تخریب مورد انتظار بر هدف j با تخصیص x_{ij} از سلاح i برابر است با $[1 - \alpha_{ij}^{x_{ij}}]$

و تخریب مورد انتظار توسط تمام سلاح های تخصیص یافته از هر نوع ($\sum_{i=1}^{p} x_{ij}$) برابر است با

$$[1 - \prod_{i=1}^{p} \alpha_{ij}^{x_{ij}}] \ .$$

کل تخریب اهداف مورد انتظار که برابر است با حاصل جمع تخریب مورد انتظار بر روی هر یک از اهداف وزن داده شده توسط ارزش نظامی آنها به صورت زیر میباشد:

$$\sum_{j=1}^{q} u_j (1 - \prod_{i=1}^{p} \alpha_{ij}^{x_{ij}})$$

مدل دوم برای به دست آوردن تخریب مشخص شده با حداقل هزینه:

x_{ij} و α_{ij} به صورت مدل قبل تعریف میشوند و محدودیت ها بر روی میزان تخریب قابل دسترسی اهداف برحسب متغیرهای زیر مشخص میشوند:

x_{ij} = تعداد سلاح از نوع i تخصیص یافته به هدف j .
$i = 1, \dots, p \ \ j = 1, \dots, q$

d_j = حداکثر تخریب مورد انتظار روی هدفj

$d^{(k)}$ =حداقل تخریب مورد انتظار وزن داده شده به اهداف k ($k = 1, \dots, r$) از کلاس

$V_j^{(k)}$ = وزن هدف j با در نظر گرفتن اهداف کلاسk

محدودیت ها بر روی تخریب مورد انتظار اهداف مختلف به صورت زیر خواهد بود:

$$1-\prod_{i=1}^{p}\alpha_{ij}^{x_{ij}} \geq d_j \qquad j=1,\ldots,q$$

محدودیت هابر روی تخریب مورد انتظار وزن داده شده کلاس های مختلف اهداف به صورت زیر است:

$$\sum_{j=1}^{q} v_j^{(k)}\left(1-\prod_{i=1}^{p}\alpha_{ij}^{x_{ij}}\right) \geq d^{(k)} \qquad k=1,\ldots,r$$

فرموله کردن تابع هدف : با لحاظ نمودن هزینه های تخصیص سلاح به فرم خطی، با

c_i = هزینه هر واحد از سلاح i

تابع هدف به صورت $\sum_{i=1}^{p} c_i \sum_{j=1}^{q} x_{ij}$ در خواهد آمد.

مثال عددی

در یک منطقه جنگی ۲۰ هدف نظامی قرارگرفته اند که قصد داریم با ۵ نوع سلاح و بمب حداکثر تخریب را از مجموع کل اهداف به دست بیاوریم. احتمال عدم تخریب اهداف، محدودیت تعداد سلاح، حداقل تعداد سلاح های تخصیص یافته به اهداف و اهمیت نظامی هر یک از اهداف در جدول زیر دیده می شود. مطلوبست مدل این مساله.

جدول ۱-۱ احتمال اینکه سلاح i به هدف j آسیب نرساند: α_{ij}

شماره اسلحه i	هدف (j)																				
	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱٤	۱۵	۱٦	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	a_i
۱	۱٫۰	۰٫۹۵	۱٫۰	۱٫۰	۱٫۰	۰٫۸۵	۰٫۹	۰٫۸۵	۰٫۸	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۰٫۹۵	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۲۰۰
۲	۰٫۸٤	۰٫۸۳	۰٫۸۵	۰٫۸٤	۰٫۸٦	۰٫۸۱	۰٫۸۱	۰٫۸۲	۰٫۸۰	۰٫۸٦	۱٫۰۰	۰٫۹۸	۱٫۰۰	۰٫۸۸	۰٫۸۷	۰٫۸۸	۰٫۸۵	۰٫۸٤	۰٫۸۵	۰٫۸۵	۱۰۰
۳	۰٫۹٦	۰٫۹۵	۰٫۹٦	۰٫۹٦	۰٫۹٦	۰٫۹	۰٫۹۲	۰٫۹۱	۰٫۹۲	۰٫۹۵	۰٫۹۹	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۰٫۹۸	۰٫۹۷	۰٫۹۸	۰٫۹۵	۰٫۹۲	۰٫۹۳	۰٫۹۲	۳۰۰
٤	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۰٫۹٦	۰٫۹۱	۰٫۹۲	۰٫۹۱	۰٫۹۲	۰٫۹۸	۰٫۹۳	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱۵۰
۵	۰٫۹۲	۰٫۹٤	۰٫۹۳	۰٫۹۵	۰٫۹۵	۰٫۹۸	۰٫۹۸	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۰٫۹	۰٫۹۵	۰٫۹٦	۰٫۹۱	۰٫۹۸	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۲۵۰
حداقل تعداد سلاح هایی که به هدف j باید اختصاص یابد : b_j																					
	۳۰					۱۰				۴۰				۵۰	۷۰	۷۵				۱۰	
ارزش نظامی هدف j : u_j																					
	٦۰	۵۰	۵۰	۷۵	٤۰	٦۰	۳۵	۳۰	۲۵	۱۵۰	۳۰	٤۵	۱۲۵	۲۰۰	۲۰۰	۱۳۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۵۰	

حل

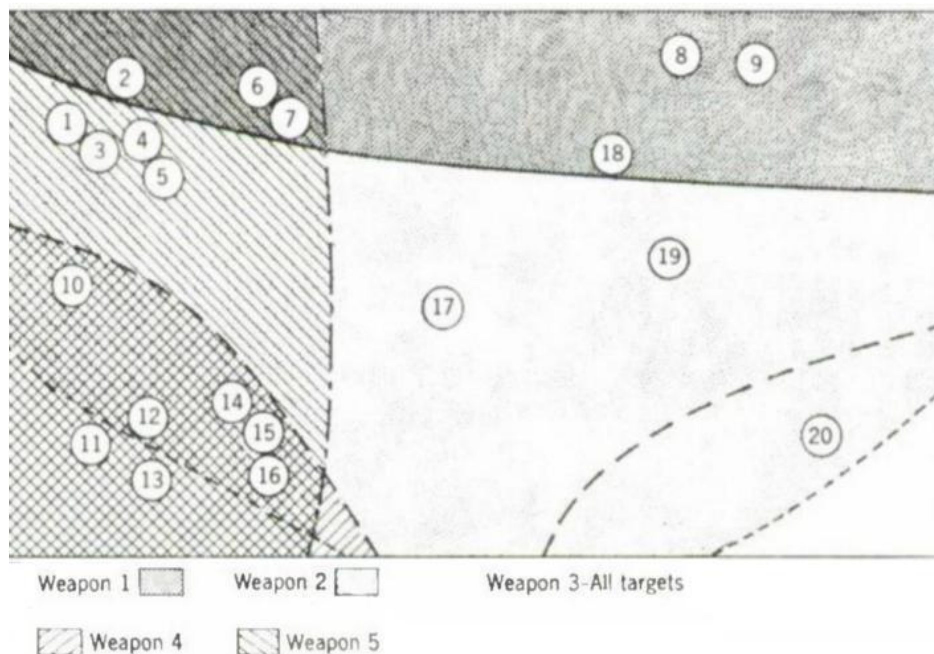
مدل مساله غیر خطی و به صورت زیر است :

$$Max\ f(x) = 60[1-(1x_{11}\cdot 0.84x_{21}\cdot 0.96x_{31}\cdot 1x_{41}\cdot 0.92x_{51})]$$
$$+\dots$$
$$+150[1-(1x_{1.20}\cdot 0.84x_{2.20}\cdot 0.92x_{3.20}\cdot 1x_{4.20}\cdot 1x_{5.20})]$$

s.t.

$$x_{11}+\dots+x_{1.20}\le 200$$
$$\vdots$$
$$x_{51}+\dots+x_{5.20}\le 250$$
$$x_{11}+\dots+x_{51}\ge 30$$
$$\vdots$$
$$x_{1.20}+\dots+x_{5.20}\ge 10$$
$$x_{ij}\ge 0$$

نقشه اهداف و پوشش سلاح ها به صورت زیر است:



پس از حل، جواب چنین خواهد بود:

سلاح i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	کل تعداد موجود از سلاح i
1		16				100	38	26	20												200
2				23	20										25	31	2				101
3															45		76	56	62	61	300
4												39	50	57		4					150
5	50	46	47							50	57										250
کل سلاح تخصیص به هدف	50	62	47	23	20	100	38	26	20	50	57	39	50	57	70	35	78	56	62	61	

پایان مثال ▲

مثال ۱–۲٤(وینستون ، ۱۹۹٤ ص ٦٤۹)[1]

یکی از محصولات یک شرکت، لاستیکِ مورد استفاده در تولیدچند نوع تایر است. این نوع محصول ترکیبی ازکائوچو با قیمت۴ واحد پول در هر واحد وزن ، دوده با قیمت ۷ واحد پول در هر واحد وزن و نوعی فراورده نفتی از قرار هر واحد وزن یک واحد پول است. این لاستیک باید دارای سختی بین ۲۵ تا ۳۵در اشل یا مقیاس شُورْ A [2] ، الاستیسیته حداقل ۱۶ مگاپاسکال و استحکام کششی لااقل۱۲ مگاپاسکال باشد. برای تولید ۴ حلقه تایر ۱۰۰ واحد وزن محصول مورد نیاز است. که بین ۲۵ تا ۶۰ واحد وزن کائوچو و حداقل ۵۰ واحد وزن دوده مصرف دارد.

تحلیل آماری نشان داده است که سختی(H)، الاستیسیته(E) و استحکام کششی(TS) ۱۰۰ واحد وزن ازترکیب فوق از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\mathrm{H} = ۳۴ + ۰.۱(R) + ۰.۰۶(O) - ۰.۳(C) + ۰.۰۰۱(R)(O) + ۰.۰۰۵(O^{۲}) + ۰.۰۰۱(C^{۲})$$

$$\mathrm{E} = ۱۷ + ۰.۳۵(R) - ۰.۰۴(O) - ۰.۰۰۲(R^{۲})$$

$$TS = ۱۲.۵ - ۰.۱۰(O) - ۰.۰۰۱(O^{۲})$$

که در آن

R= میزان کائوچو(rubber) درترکیب لازم برای ۴ حلقه برحسب واحد وزن

C= میزان دوده مورد استفاده درترکیب برای ۴ حلقه برحسب واحد وزن

O= میزان فراورده نفتی مورد استفاده درترکیب برای ۴ حلقه برحسب واحد وزن

[1] با تشکر از آقای مهندس علی سلطانپور دانش آموخته ارشد دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنرکرمان

[2] شور(Shore) یک واحد سنجش سختی است که با دستگاه durometer ساخته شده توسط آلبرت شور مشخص می شود

مشخص کنید چه میزان کائوچو چه میزان دوده وچه میزان فراورده نفتی برای ۱۰۰ واحد وزن محصول نهایی به کار رود تا الزامات رعایت و هزینه مربوطه کمینه گردد.

حل

تابع هدف هزینه است که برابر $۴R + ۷C + ۱ \times O$ بوده و باید مینیمم شود؛

ازجمله محدودیت ها عبارتنداز:

$$TS \geq ۱۲, \quad E \geq ۱۶ \qquad ۲۵ \leq H \leq ۳۵$$

ومدل برای حل با لینگو چنین است:

```
model:
 min =۴*R+O+۷*C;
  ۱۲,۵-۰,۱۰*(O)-۰,۰۰۱*(O^۲ ) >= ۱۲;
 ۱۷+۰,۳۵*(R)-۰,۰۴*(O)-۰,۰۰۲*(R^۲ ) >= ۱۶;
۳۴+۰,۱*(R)+۰,۰۶*(O)-۰,۳*(C)+۰,۰۰۱*(R)+۰,۰۰۵*(O^۲ )+۰,۰۰۱*(C^۲ ) <= ۳۵;
۳۴+۰,۱*(R)+۰,۰۶*(O)-۰,۳*(C)+۰,۰۰۱*(R)+۰,۰۰۵*(O^۲ )+۰,۰۰۱*(C^۲ )>=۲۵;
R+O+C=۱۰۰;
R<۶۰;
R>۲۵;
C >=۵۰;
O > ۰;
end
```

البته مدل مساله را در نرم افزار لینگو به صورت زیر هم می توان نوشت:

```
Model:
min =۴*R+O+۷*C;
  TS= ۱۲,۵-۰,۱۰*(O)-۰,۰۰۱*(O^۲ );
E= ۱۷+۰,۳۵*(R)-۰,۰۴*(O)-۰,۰۰۲*(R^۲ ) ;
H=۳۴۳۴+۰,۱*(R)+۰,۰۶*(O)-۰,۳*(C)+۰,۰۰۱*(R)+۰,۰۰۵*(O^۲ )+۰,۰۰۱*(C^۲ );
R+O+C=۱۰۰;
O > ۰;
end
SLB    R    ۲۵
SUB    R    ۶۰
SLB    C    ۵۰
SLB    TS   ۱۲
SLB    E    ۱۶
SLB    H    ۲۵
SUB    H    ۳۵
```

با حل در نرم افزارلینگو

```
Local optimal solution found at iteration:  ۱۰
Objective value:                         ۵۳۵,۶۸۳۲
        Variable        Value                 Reduced Cost
           R            ۴۵,۲۲۷۷۴                ۰,۰۰
           O            ۴,۷۷۲۲۵۶                ۰,۰۰
           C            ۵۰,۰۰                   ۰,۰۰
```

خوانندگانی که با Reduced Cost آشنا نیستند می توانند به بخش ۷-۲-۱-۱فصل ۷ رجوع نمایند. پایان مثال ▲

۱–۶ حل ترسیمی مسائل غیر خطی دو متغیره

برای یافتن جواب مسائل دو متغیره به طریق ترسیمی، ناحیه شدنی مساله را یافته به تابع(Z) مقادیر مختلف می‌دهیم (برحسب اینکه تابع هدف بیشینه باید شود یا کمینه در جهت گرادیان یا خلاف آن حرکت مقدار بسیار کمی کرده) و منحنی‌های هم تراز را رسم می کنیم تا آنگاه که منحنی هم تراز دیگربا ناحیه شدنی تماس نداشته باشدسپس Z بهینه را بدست می‌آوریم و نقطه مربوطه را مشخص می کنیم.

مثال۱–۲۵ مطلوبست حل ترسیمی مساله زیر

$$\text{Min } Z = f(x_۱, x_۲) = (x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲$$

$$\text{s.t.} \quad g_۱(x_۱, x_۲) = x_۱^۲ - x_۲ - ۳ \le ۰$$

$$g_۲(x_۱, x_۲) = x_۲ - ۱ \le ۰$$

$$g_۳(x_۱, x_۲) = -x_۱ \le ۰$$

ابتدا رسم $g_۱=۰$

نقاط برای رسم $g_۱$ [۱]	x۱	x۲	Z
A	۰	۳–	۳٤
B	$\sqrt{۳}$	۰	۵,۶۰۷۷
C	۱	۲–	۲۰
D	۲	۱	۲
E	$-\sqrt{۳}$	۰	۲٦,۳۹۲۳

به عنوان نمونه z در نقطه E(ستون چهارم از راست)با دستور زیر قابل محاسبه است:

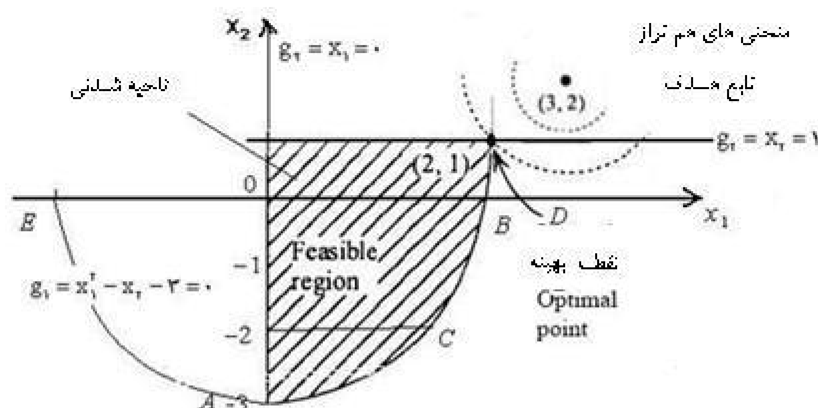
```
>> f=inline('(x۱-۳)^۲+(x۲-۲)^۲'); z=f(-sqrt(۳),۰)
```

برابر z=۲٦,۳۹۲۳ بدست می آید.

$g_۲$=۰ : یک خط موازی محور افقی

$g_۳$=۰ : محور عمودی دستگاه مختصات است

ناحیه شدنی مساله فوق در شکل زیر به صورت هاشور خورده دیده می شود



شکل ۱-۷ ناحیه شدنی مساله فوق (ص۳ بازاراوهمکاران ،۲۰۰۶)

با قراردادنf= Z و تغییرمقدارZ دایره‌های با مرکز $x_۱ = ۳, x_۲ = ۲$و شعاع$\sqrt{Z}$ بدست آمده و بدین ترتیب خم های هم تراز رسم می شوند. در این مساله هدف یافتن نقطه‌ای از فضای شدنی است با کمترین مقدار Z. نقطه ای که یک منحنی هم تراز با کمترین Z درآن با ناحیه شدنی تماس پیدا می‌کند نقطه D $(x_۱ = ۲, x_۲ = ۱)$ است که Z =۲ را دارا می‌باشد. جواب مساله چنین است: $x_۱^* = ۲ , x_۲^* = ۱ \ , \ Z^* = f(x_۱^*, x_۲^*) = ۲$.

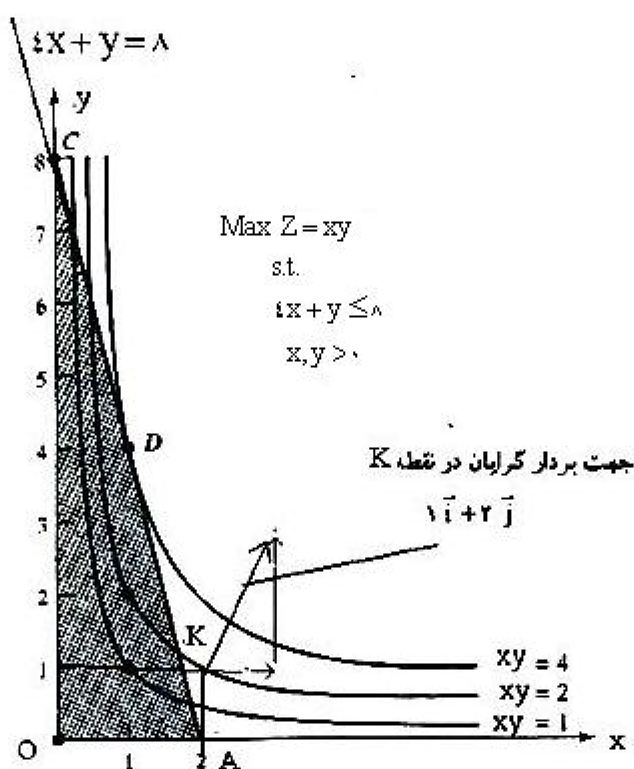
شایان ذکر است که نقطه بهینه مساله بیشینه سازی در A اتفاق می‌افتد.

مثال۱-۲۶(ص۶۴۰ وینستون ،۱۹۹۴)

فرض کنید تعداد فروش محصولی وقتی x واحد ازکار ماشین و y واحد کارکارگر صرف شود برابر xy میباشد. هزینه هر واحدکار ماشین ۴ واحدپول و هزینه هر واحدکارِ کارگر یک واحدپول است. هشت واحدپول بودجه به این امر می‌تواند اختصاص یابد. مساله را برای حداکثر کردن فروش فرموله و به طریق ترسیمی حل کنید.

حل:

$$\text{Max } Z = xy$$
$$\text{s.t.}$$
$$٤x + y \leq ٨$$
$$x, y > ٠$$



شکل ۱-۸ ناحیه شدنی مثال ۱-۲۶

ناحیه شدنی، مثلثِ AOC در شکل ۱-۸ است.

تعیین راستایِ افزایشِ Z

راه اول) برای یافتن جهت افزایش Z به Z چند مقدار داده و تابع Z=xy را رسم می‌کنیم. ماکزیمم در نقطه D اتفاق می‌افتد که محل تماس یک منحنی هم تراز با خط $٤x + y = ٨$ است.

راه دوم) برای یافتن جهتِ افزایش تابع به محاسبه گرادیان تابعZ می‌پردازیم؛ زیرا حرکت بسیار کم درجهت گرادیان در یک نقطه روی تابع جهت(بیشترین) افزایش در آن نقطه و درخلاف جهت گرادیان در یک نقطه جهت بیشترین کاهش می باشد.

بدین منظور یک منحنی هم تراز را رسم و یک نقطه روی آن بر می‌گزینیم و چون مساله بیشینه سازی است جهت گرادیان در آن نقطه را تعیین می کنیم

$$\nabla Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \equiv \quad \vec{\nabla} Z(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$$

به عنوان مثال در نقطه ای مثل$K(x=۲, y=۱)$ (واقع برروی منحنی هم تراز $Z=xy=۲$) بردار گرادیان، $۱\vec{i}+۲\vec{j}$ است که جهت بیشترین افزایش تابع را در آن نقطه (در حرکت به مقدار بسیار کم)نشان می دهد.

اگر مسئله کمینه سازی بود خلاف جهت بردار گرادیان در ان نقطه جهت بیشترین کاهش تابع را(در حرکت به مقدار بسیار کم) می داشتیم

بدنبال مشخصات نقطه تماس منحنی تابع هدف $Z=xy$ با خط $۴x+y=۸$ می باشیم. مشخصات این نقطه را $y_۱, x_۱$ می نامیم. بردار گرادیان تابع هدف در نقطه تماس $\vec{\nabla}Z(x_1, y_1)=y_1\vec{i}+x_1\vec{j}$ می‌باشد که باید با بردار گرادیان خط مماس($۴x+y=۸$) در آن نقطه یعنی بردار $۴\vec{i}+۱\vec{j}$ هم جهت باشد پس $\frac{y_۱}{۴}=\frac{x_۱}{۱}$.واز طرفی نقطه تماس روی خط می‌باشد؛ لذا

$$۴x_۱+y_۱=۸$$

ودر نتیجه از این ۲ رابطه $x_۱=۱ \quad y_۱=۴$ بدست می آید.

آخرین Z که با ناحیه شدنی تماس پیدا می‌کند در نقطه D است (محل تماس $xy=۴$ با $۴x+y=۸$).

لذا $y^*=۴ \quad x^*=۱$ با $Z^*=۴$ جواب بهینه مسئله است ولی بر هیچ یک از نقاط گوشه ناحیه منطبق نمی باشد. پایان مثال ▲

پس

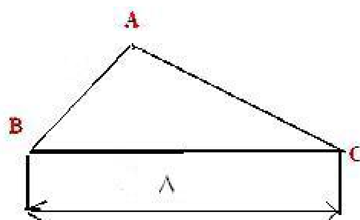
جواب بهینه مسائل برنامه ریزی غیرخطی لزوماً درنقاط گوشه (اکستریم) ناحیه شدنی قرارندارد.

قابل ذکر است که اگر بخواهیم مساله فوق را در حالت MinZ=xy حل کنیم بردار تابع گرادیانِ تابع هدف خلاف جهت بردار گرایانِ خط مماس باید قرار داده شود.

مثال۱-۲۷ (مک کورمیک،۱۹۸۳)

از میان تمام مثلث‌های با قاعده ۸cm مشخصات مثلثی را بیابید که کمترین محیط را دارا بوده و مساحت آن حداقل ۱۲cm۲ می‌باشد.

راه حل اول



$Min \quad Z = (AB + AC + ۸)$

s.t.

$\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-\mathrm{BC})} \geq ۱۲$ مساحت مثلث بر حسب ۳ ضلع

$p = \frac{AB+AC+۸}{۲}$ نصف محیط

BC=۸

AB+AC>۸

AB+۸>AC

AC+۸>AB

AB>۰ AC>۰

مدل لینگو:

```
Model:
min=AB+AC+BC;
((p*(p-AB)*(p-AC)*(p–۸))^(۱/۲))>=۱۲;
p=(AB+AC+BC)/۲;
BC=۸;
AB+AC > ۸;
```

```
AB+۸ > AC;
AC+۸ > AB;
AB>۰;
AC>۰;
end
```

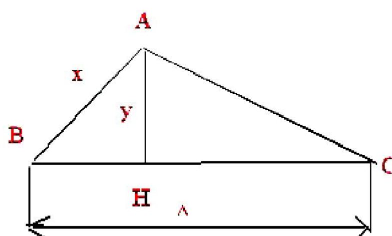
Optimal solution found at step: ۸

Objective value: ۱۸,۰۰۰۰۰

Variable	Value
AB	۵,۰۰۰۰۰۱
AC	٤,۹۹۹۹۹۹
BC	۸,۰۰۰۰۰۰
p	۹,۰۰۰۰۰۰

راه حل دوم

در این راه حل، مدل به صورت زیر ساخته می شود و حل می‌گردد



بر طبق شکل اگر طول ضلع AB را به x و ارتفاع را به y نشان دهیم

$$BH=\sqrt{x^{۲}-y^{۲}} \qquad HC=۸-\sqrt{x^{۲}-y^{۲}} \quad , \quad AC=\left(y^{۲}+\left(۸-\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}\right)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

مدل:

$$\text{Min} \quad Z=۸+x+\left(y^{۲}+\left(۸-\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}\right)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$\frac{۸y}{۲}\geq ۱۲$ یا $y\geq ۳$

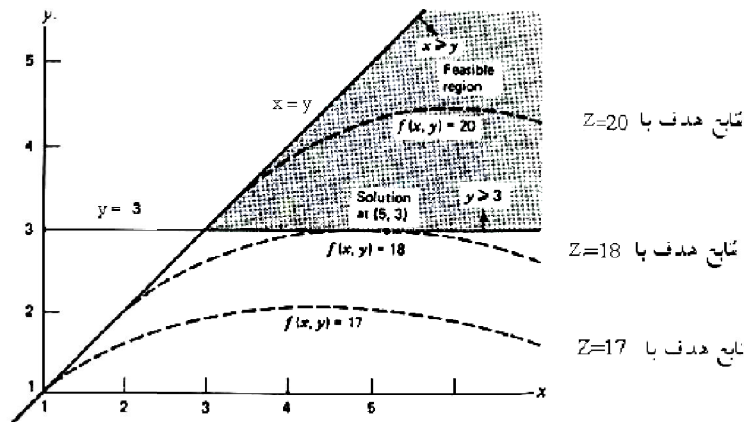
$x>y$

$x>۰$

$y>۰$

حل ترسیمی (ص ۶ مک کورمیک ,۱۹۸۳):

در شکل زیر فضای شدنی مشخص شده است.



شکل ۱-۹ حل ترسیمی مثال ۱-۲۶

به Z مقادیر مختلف(مقادیری مثل ۲۰، ۱۸، ۱۷) داده و تابع دو متغیره Z را رسم می‌کنیم. جهت کاهش Z رو بپایین است.

منحنی هم تراز با۱۸ =z آخرین منحنی هم ترازی است که با ناحیه شدنی تماس دارد (در نقطه ۳=y و ?=x).

$$Z = ۸ + x + \sqrt{y^۲ + \left(۸ - \sqrt{x^۲ - y^۲}\right)^۲} \quad \overset{y = ۳;\, Z = ۱۸}{\Rightarrow} \quad x = ۵$$

پس جواب بهینه مساله $Z^* = ۱۸ , x^* = ۵ , y^* = ۳$

مشخصات نقطه تماس را به صورت زیر هم می‌توان بدست آورد.

یافتن مشخصات نقطه تماس:مقدارمشتق تابع نسبت به x در نقطه تماس با هر خط، مساوی ضریب زاویه خط است. ضریب زاویه خط ۳=y صفراست پس:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\cdot\Rightarrow ۱+\frac{x-۸x(x^۲-y^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{٦٤+x^۲-١٦\sqrt{x^۲-y^۲}}}=\cdot\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ٦٤+x^۲-١٦\sqrt{x^۲-y^۲}=\left(-x+\frac{۸x}{\sqrt{x^۲-y^۲}}\right)^۲\overset{y=۳}{\Rightarrow}$$

$$٦٤+x^۲-١٦\sqrt{x^۲-۹}=x^۲-\frac{١٦x^۲}{\sqrt{x^۲-۹}}+\frac{٦٤x^۲}{x^۲-۹}\Rightarrow$$

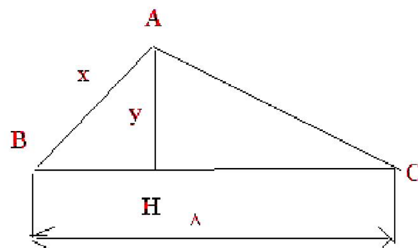
$$\sqrt{x^۲-۹}=t \;\text{ or }\; x^۲=t^۲+۹$$

$$٦٤-١٦t=-١٦\frac{t^۲+۹}{t}+٦٤\frac{t^۲+۹}{t^۲}\Rightarrow t=٤\Rightarrow x=\pm٥$$

چون xباید مثبت باشد پس مشخصات نقطه بهینه چنین است:

$x=٥, y=۳$

$$Z=۸+x+\sqrt{y^۲+\left(۸-\sqrt{x^۲-y^۲}\right)^۲}\Rightarrow Z=۱۸$$



با لینگو

```
min=BC+AB+( y^۲+( BC-(AB^۲-y^۲)^(۱/۲) )^۲ )^(۱/۲);
BC*y/۲>=۱۲; AB>y;BC=۸;
end
```

Local optimal solution found at iteration: ۱۰۳

Objective value: ۱۸,۰۰۰۰۰

Variable	Value	Reduced Cost
BC	۸,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰
AB	٤,۹۹۹۹۹۹	۰.۰۰۰۰۰۰
Y	۳.۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰

خوانندگانی که با Reduced Cost آشنا نیستند می توانند به بخش ۷-۲-۱-۱فصل ۷ رجوع نمایند.

کنترل مقدار تابع هدف با متلب

```
>> x=٥; y=٣;٨+x+sqrt(y^٢+(٨-sqrt(x^٢-y^٢))^(٢)
ans ١٨
```

پایان مثال ▲

مثال ۱-۲۸

مطلوبست حل ترسیمی مدل زیر هم به صورت کمینه سازی و هم بیشینه سازی

$Z=(x_{۱}-۴)^{۲}+(x_{۲}-۶)^{۲}$

s.t.

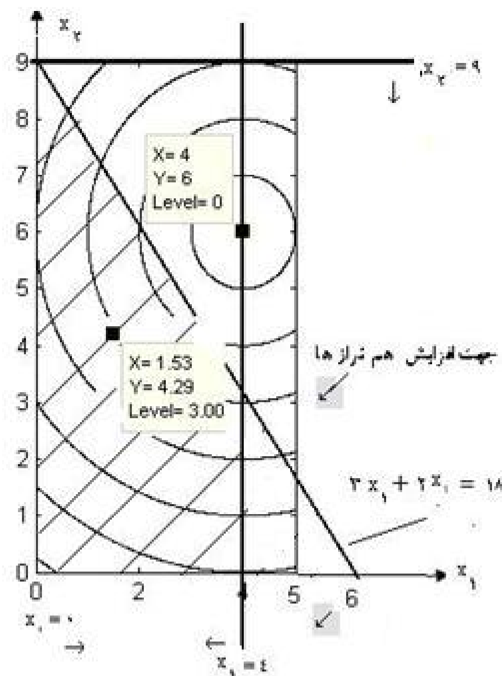
$۳x_{۱}+۲x_{۲}\leq ۱۸$

$۲x_{۲}\leq ۱۸$

$۰\leq x_{۱}\leq ۴$

$x_{۲}\geq ۰$

ناحیه شدنی، سطح هاشور خورده در شکل زیر است



تابع هدف $Z=(x_{۱}-۴)^{۲}+(x_{۲}-۶)^{۲}$ دایره‌ای است به مرکز (۶و۴) و شعاع $\sqrt{Z}$.

حل بیشینه سازی

جهت افزایشZ در شکل نشان داده شده است؛ مبدا آخرین نقطه ایست که هنگام افزایش Z، تابع هدف با ناحیه شدنی در تماس است. پس در بیشینه سازی جواب چنین است:

$$Z^* = (۰ - ۴)^۲ + (۰ - ۶)^۲ = ۵۲ \qquad x_۱^* = x_۲^* = ۰$$ بیشینه سازی

یا

با اختصاص مقادیر مختلف بهZ دایره های مختلف رسم می شود . آنقدر به Z مقدار می دهیم تا دایره از ناحیه شدنی خارج شود . نقاط (۴و۰) ، (۰و۰) و(۶و۰) می تواند جواب باشد . این ۳ نقطه را در تابع هدف می گذاریم، هر کدام که Z بیشتری داشت جواب مساله است.

حل کمینه سازی

مینیمم مقداری از تابع هدف که تابع را به ناحیه شدنی می‌رساند، در محل مماس بودن تابع با خط $۳x_۱ + ۲x_۲ = ۱۸$ حاصل می‌شود. بدنبال یافتن مشخصات نقطه تماس به عنوان نقطه بهینه ایم .

مشخصات نقطه تماس منحنی تابع هدف با خط $۳x_۱ + ۲x_۲ = ۱۸$ با $x_۱^*$و$x_۲^*$ نشان می‌دهیم بردار گرادیان تابع هدف در نقطه تماس $۲(x_۱^* - ۴)\,\vec{i} + ۲(x_۲^* - ۶)\,\vec{j}$ می باشد که باید با بردارگرادیان خط مماس($۳x_۱ + ۲x_۲ = ۱۸$) در آن نقطه یعنی بردار $۳\vec{i} + ۲\,\vec{j}$هم جهت باشد پس$\frac{۲(x_۱^*-۴)}{۳} = \frac{۲(x_۲^*-۶)}{۲}$ واز طرفی نقطه$x_۱^*$و$x_۲^*$ روی خط می باشد؛ لذا $۳x_۱^* + ۲x_۲^* = ۱۸$.حل این ۲ رابطه با دستوری مثل solve در متلب $x_۱^*, x_۲^*$ را بدست می دهد:

```
[x۱ x۲]=solve('۲*(x۱-۴)/۳ - (x۲-۶) = ۰','۳*x۱+۲*x۲-۱۸ = ۰')
```

$x۱ = \frac{۳۴}{۱۳} = ۲.۶۱۵۴ \quad , x۱ = \frac{۶۶}{۱۳} = ۵.۰۷۶۹$

مشخصات نقطه بهینه مساله کمینه سازی چنین است

$$x_۱^* = \frac{۳۴}{۱۳} = ۲.۶۱۵۴ \quad , x_۲^* = \frac{۶۶}{۱۳} = ۵.۰۷۶۹$$

$$Z^* = (۲.۶۱۵۴ - ۴)^۲ + (۵.۰۷۶۹ - ۶)^۲ = ۲.۷۶۹$$

ازدستورات زیر در لینگو همین نتیجه حاصل می شود:

```
model:
min=(x۱-۴)^۲+(x۲-۶)^۲;
۳*x۱+۲*x۲<=۱۸;
۲*x۲<=۱۸;
x۱>=۰; x۱<=۴;x۲>=۰;
end
```

Optimal solution found at step: ۳

Objective value: ۲,۷۶۹۲۳۱

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	۲,۶۱۵۳۸۵	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
X۲	۵,۰۷۶۹۲۳	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

پایان مثال ▲

۱–۷تعاریف

۱–۷–۱ تعریف بستار یک مجموعه

منظور از بستار(closure)[1] مجموعه ای مثل S که با cl S نمایش داده می شود؛ مجموعه شامل خود مجموعه S وتمام نقاط حدی آن است(ویکی‌پدیا). اگر S یک مجموعه از فضای چند بعدی باشد، می گویندنقطه x در بستار مجموعه S است اگر $S \cap N_{\varepsilon}(x) \neq \phi$ برای هر $\varepsilon > ۰$. (بازارا و دیگران، ۲۰۰۶ ص ۴۵).

۱–۷–۲ تعریف مجموعه بسته

مجموعه S را **بسته** گویند اگر S= cl S (بازارا، ۲۰۰۶، ص ۴۵).

به عبارت دیگر مجموعه ای را بسته گویند که شامل تمام نقاط حدی اش هم باشد(بستر کاس۱۹۹ص ۶۵۲)

بستار یک مجموعه بسته خود آن مجموعه است.به عنوان مثال:

For S= (۰, ۱)   cl (S) = [۰, ۱].

[۰, ۱] بسته است اما (۰ , ۱] بسته نیست.

[1] از واژه نامه انجمن ریاضی

۱–۷–۳ تعریف درون مجموعه

اگر S یک مجموعه از فضای چند بعدی باشد، نقطه x را گوینددر درون مجموعه S است وبا int S نمایش میدهند اگرε همسایگی x زیر مجموعهS باشد: $N_\varepsilon(x) \subset S$ برای یک $\varepsilon > ۰$.

۱–۷–۴ تعریف مجموعه باز

مجموعه S راباز گویند اگر S= int S . مکمل هر مجموعه باز یک مجموعه بسته است(بارار ،۲۰۰۶ ص ۴۵). به عبارت دیگر مجموعه ای را باز گویند که مکمل آن بسته باشد(بستر کاس۱۹۹ص ۶۵۲). اگر هر نقطه مجموعه ای فقط در داخل آن قرار گیرد آن مجموعه باز است.

۱–۷–۵ تعریف مرز یک مجموعه

اگر S یک مجموعه از فضای چند بعدی باشد، می گویندنقطه x در مرز مجموعه S (که با ∂S نمایش داده می شود) می باشد اگر $N_\varepsilon(x)$ برای هر $\varepsilon > ۰$ شامل لااقل یک نقطه درS و یک نقطه غیر واقع در S باشد(بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص ۴۵).

۱–۷–۶ تعریف مجموعه کراندار یا محدود

مجموعه S را محدود گویند اگر از بالا و پایین کران داشته باشد.

(۲،۳−) مجموعه ای محدود است و(۳,∞−),(∞+,۲−) مجموعه های غیر محدودند

۱–۷–۷ تعریف مجموعه فشرده

مجموعه S را فشرده گویند اگر هم بسته وهم محدود باشد:

کرانداروبسته ⟺ فشرده

مجموعه ای که بسته نیست نمی تواند فشرده باشد. چند مثال:

-[۱،۲] مجموعه ای بسته، محدود و فشرده است

- مجموعه [۰،۱) بسته نیست و فشرده هم نیست

-(۱,∞] غیر محدود است ولذا فشرده هم نیست

-(۱,∞) غیر محدود است و نه بسته است و نه فشرده

-(۱،۲) بسته نیست ولذا فشرده هم نیست.

۱–۸ آنالیز تحدب توابع

تحدب یکی از مفاهیم کلیدی در NLP است. ذیلاً تعاریف، ضوابط و قضایایی در این رابطه بیان   می گردد. مشروح این مباحث در مراجعی ماتند بازارا و همکاران(۲۰۰۶)، آوریل(۲۰۰۳)و مالگاسارین(۱۹۶۹) قابل مطالعه است.

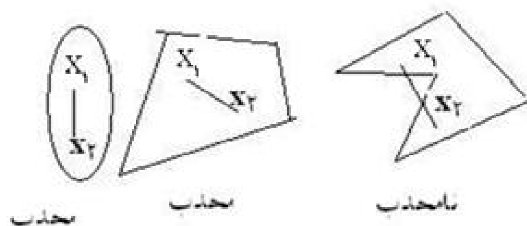
تعاریف

۱–۸–۱ ترکیب محدب از چند نقطه

تعریف: $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j$ که در آن $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{L=1}^{k}\lambda_j = 1$ ترکیب محدب از نقاط (بردارهای) $X_1,X_2,...,X_k$ در فضای حقیقی n بعدی (R^n) خوانده می‌شود.   به عنوان مثال $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 ,\ \ 0<\lambda<1$ ترکیب محدب از نقاط x_1, x_2 است که خط واصل نقاط x_1, x_2 است.

۱–۸–۲ تعریف مجموعه محدب

یک مجموعه مثل C در فضای n بعدی از اعداد حقیقی (R^n) محدب خوانده می‌شود اگر خطی که هر ۲ نقطه داخلی مجموعه را بهم وصل می‌کند داخل آن مجموعه قرار داشته باشد. به بیان ریاضی اگر بردار $\mathbf{x}_1$ و بردار $\mathbf{x}_2$ مشخصات دو نقطه در فضای مجموعه n بعدی C باشند و $0 \leq \lambda \leq 1$ ؛ آنگاه $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ باید برای تمام λها در مجموعه C قرار گیرد تا محدب خوانده شود(بر گرفته از فصل ۲ بازارا و همکاران،۲۰۰۶ و برت سکاس ،۱۹۹۹ص ۶۷۲).



شکل ۱-۱۰ چند مجموعه محدب و غیر محدب

۱-۸-۳ تفاضل وجمع جبری دومجموعه محدب

اگر مجموعه‌های S_1,S_2 در R^n محدب باشند مجموعه های زیر محدب‌اند (ص۴۱ بازارا و دگران،۲۰۰۶):

$$s_1 \oplus s_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in s_1, x_2 \in s_2\}$$
$$s_1 \ominus s_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in s_1, x_2 \in s_2\}$$

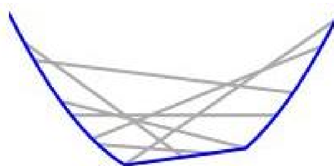
هم چنین $s_1 \cap s_2$ محدب است.

۱-۸-۴ تعریف تابع محدب

اگر C یک زیرمجموعه غیرتهی محدب از R^n باشد تابع $f:C \to R$ محدب خوانده می‌شود اگر بازای عدد اسکالر λ بین صفرو یک و بردارهای $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ متعلق به C(ص ۷۶۷ بازارا و دیگران ،۲۰۰۶، ومک کورمیک، ۱۹۸۳ص۴۰) نامساوی زیر برقرار باشد.

$$f[\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \qquad \forall\ \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in C,\ 0 \le \lambda \le 1$$

این تعریف، که مشتق پذیر بودن در آن دخالتی ندارد، به این معنی است که:
مقدار تابع محدب به ازای هر نقطه که ترکیب محدب از دو نقطه $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in C$ باشد هیچگاه از همان ترکیب محدب $f(\mathbf{x}_1)$ و $f(\mathbf{x}_2)$ بیشتر نیست و می‌توان نشان داد تعبیر هندسی آن برای توابع یک متغیره اینست که اگر تابع محدب باشد، هیچ قسمت از خط متصل کننده دو نقطه دلخواه از تابع، زیرِ منحنی تابع قرار نمی گیرد(شکل ۱-۱۱).



شکل۱-۱۱ تبیین هندسی تعریف تحدب تابع یک متغیره

(هیچ بخش خط واصل۲ نقطه از منحنی تابع، زیرآن قرارنمی گیرد)

اگرتابع *f* مشتق پذیر(مرتبه اول) باشدآنگاه به طور معادل تابعی محدب است که (پونستاین[1]،۱۹۶۷)

---

[1] Ponstein

$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).\nabla f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)$

or

$f(\mathbf{x}_2) \ge f(\mathbf{x}_1) + \nabla^T f(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$

نامساوی دوم از نامساوی اول قابل به دست آوردن است و بالعکس:

$$f[\lambda\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{x}_1] \le \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_1) \quad 0 < \lambda < 1 \quad \Rightarrow$$
$$f[\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \le f(\mathbf{x}_1) + \lambda[f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)] \Rightarrow$$
$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \ge \frac{f[\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] - f(\mathbf{x}_1)}{\lambda} \qquad (I)$$

طبق بسط تیلور f حول $\mathbf{x}_1$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1) + \Delta^T f(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \dots$$

به ازای $x = \mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ داریم:

$$f[\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \cong f(\mathbf{x}_1) + \Delta^T f(\mathbf{x}_1)[\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1] = f(\mathbf{x}_1) + \Delta^T f(\mathbf{x}_1)[\lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]$$

پس

$$(I) \Rightarrow f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \ge \frac{f(\mathbf{x}_1) + \Delta^T f(\mathbf{x}_1)[\lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] - f(\mathbf{x}_1)}{\lambda} \Rightarrow$$
$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \ge \Delta^T f(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

بالعکس نامساوی اول از نامساوی دوم قابل به دست آوردن است[1].

همانطور که بعداً خواهید دید در توابع چند متغیره مشتق پذیر اگر مقادیر ویژه ماتریس هشیان، هیچ‌یک منفی نباشد تابع محدب است.

مثال ۱–۲۹[2] آیا تابع زیر(موسوم به آفین یا مستوی) محدب است؟

$$f(x) = a^t\boldsymbol{x} + b \qquad \boldsymbol{x} \in R^n \qquad b \in R$$

حل : بله زیرا :

$$\forall\lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \alpha^t(\lambda x + (1-\lambda)y) + b$$
$$= \lambda\alpha^t x + (1-\lambda)\alpha^t y + \lambda b + (1-\lambda)b$$
$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

البته تابع آفین هم محدب است وهم مقعر. پایان مثال ▲

[1] یک مرجع برای این اثبات: https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4180/2016v/note2.pdf

[2] از http://aaa.princeton.edu/orf523

۱-۸-۵ تابع محدب اکید

در تعریف بالا برای تحدب $f:C\to R$ اگر بازای $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ و تمام مقادیر $0<\lambda<1$ نامساوی صرف یعنی علامت > برقرار باشد یعنی اگر:

$$f[\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] < \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \quad \forall\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C,\ 0<\lambda<1$$

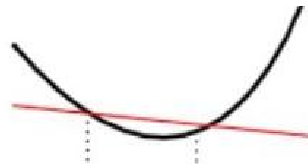
مقدار تابع محدب اکید به ازای هر نقطه به صورت ترکیب محدب از ۲ نقطه $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ متعلق به C همواره از همان ترکیب محدب از $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)$ کمتر است.

یا به طور معادل اگر f مشتق پذیراز مرتبه اول باشد(پونشتاین[1]،۱۹۶۷)

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).\nabla f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \qquad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$$

تابع محدب اکید(کامل) خوانده می‌شود(بازارا،۲۰۰۶ص۹۸ و۷۶۷ و مک‌کورمیک،۱۹۸۳، ص۴۵).

یک نمونه تابع محدب کامل در شکل زیر دیده می شود.



شکل ۱-۱۲ یک تابع محدب کامل(اکید)

واضح است که اگر تابع محدب اکید باشد، محدب هم می باشد.

قضیه ۱-۱ رابطه تحدب و پیوستگی

با یاد آوری اینکه تابع n متغیره $f(\mathbf{x})$ را در نقطه x' پیوسته گویند اگربرای هر $\epsilon > 0$ ، وجود داشته باشد یک مقدار $\delta > 0$ آنچنان که هرگاه $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta$ باشد آنگاه(آئرا[2]،۲۰۰۴ص۱۱و۱۲)

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon$$

قضیه زیر رابطه محدب بودن و پیوستگی را نشان می‌دهد.

---

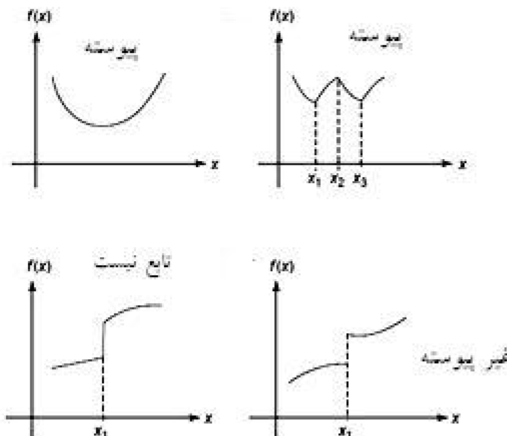
[1] Ponstein

[2] Aero

قضیه (ص ۳۳ کتاب گودوین و همکاران[۱] ۲۰۰٤)

اگر C یک زیر مجموعه غیر تهی از R^n باشد و تابع $f:C\rightarrow R$ محدب باشد، آنگاه f در درون دامنه تابع یعنی مجموعه C پیوسته است. پایان قضیه■

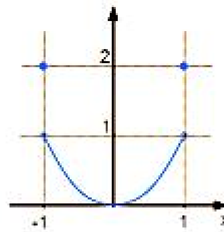
شکل زیر چند تابع پیوسته وغیر پیوسته را نشان می دهد.



شکل۱-۱۳ توابع پیوسته و ناپیوسته(آئرا،۲۰۰۴ص۲)

مثال۱-۳۰[۲]

تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & for|x| < ۱ \\ ۲ & for|x| = ۱ \end{cases}$ روی $C = \{x: -۱ \leq x \leq ۱\}$ تعریف شده ودر شکل زیردیده می شود. f روی C محدب است اماتنها دردرون C پیوسته است



پایان مثال ▲

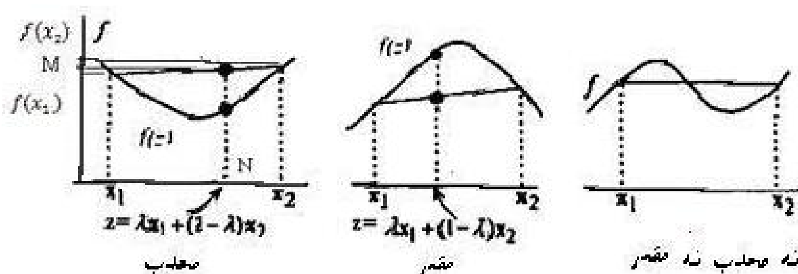
---

[۱] Goodwin

[۲] From: http://www.eng.newcastle.edu.au/eecs/cdsc/books/cce/Slides/ConvexAnalysis.pdf

۱–۸–۶ تابع مقعر

تابع f را مقعر می‌نامند اگر f– محدب باشد. تابع f را مقعر اکیدمی‌نامند اگر f– محدب اکید باشد. شکل ۱-۱۴ یک تابع محدب و یک تابع مقعر یک متغیره را نشان می دهد. نمونه تابع محدب دو متغیره در شکل های ۱-۱۵ و ۱-۱۶ دیده می شود.



شکل ۱–۱٤ نمایش تحدب و تقعر درتابع یک متغیره (بازاراو همکاران،۲۰۰٦ ص ۷٦۸)

در شکل ۱-۱۴سمت چپ می‌توان نشان داد که اگر در محور افقی نقطه بین x_1وx_2: $Z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad 0 \le \lambda \le 1$ را با N نشان دهیم همین ترکیب خطی از مقادیر تابع در x_2وx_1 یعنی $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ نقطه ای است مثلM روی محور عمودی بین$f(x_1), f(x_2)$.

در ضمن ثابت می شودکه(ص ۹۹ بازاراو همکاران،۲۰۰۶ و ص ۶۷۴برتسکاس ،۱۹۹۹):

۱) یک تابع خطی محدب است(البته مقعر هم می باشد) .

اگر $R^n \to R$ $\quad f_1,...f_j,..., f_k$ توابع محدب باشند آنگاه

۲) تابع حاصل از مجموع وزن داده شده از این توابع محدب با وزن‌های مثبت یعنی

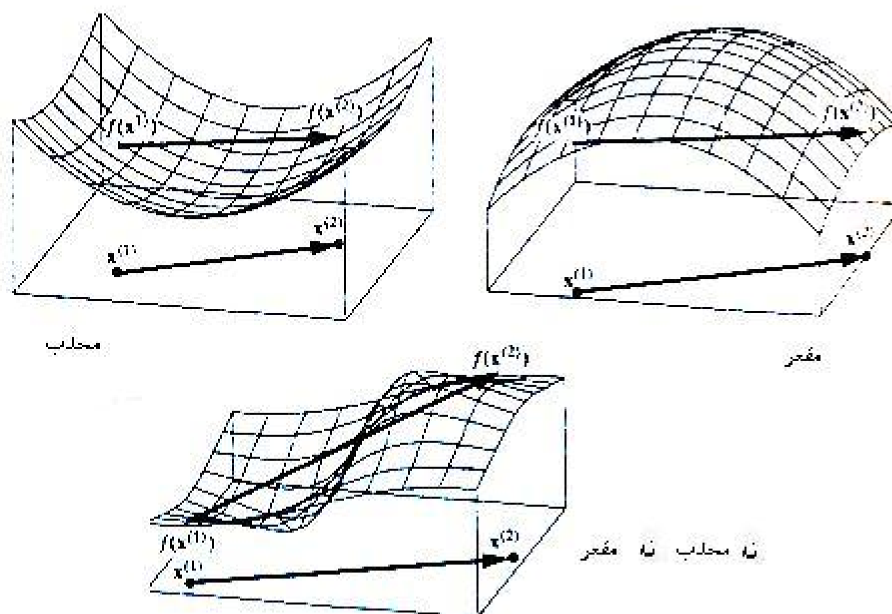
$\alpha_j > 0 \qquad f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(\mathbf{x})$ تابعی محدب است.

(براساس تمرین ۸-۳ ص ۱۴۸ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

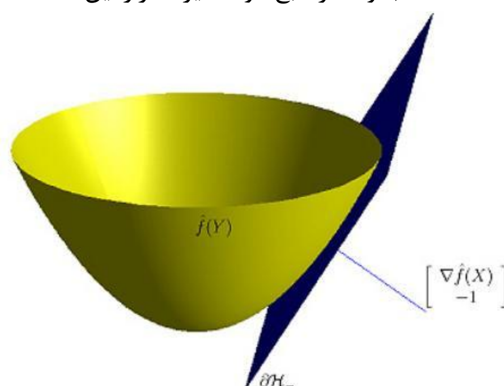
۲-۱) مجموع چند تابع محدب خود تابعی محدب است.

۳) اگر مجموعه $S \subseteq R^n$ محدب باشد و $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ و همچنین f_1 , f_2 توابع توابع n متغیره روی S محدب باشند آنگاه f محدب است

۴) $f(x) = \max\{f_1(\mathbf{x}),...,f_k(\mathbf{x})\}$ یک تابع محدب است. (براساس تمرین ۹-۳ ص ۱۴۸ بازارا و دیگران،۲۰۰۶) .



شکل۱-۱۵تحدب و تقعر تابع دو متغیره (راردین، ۱۹۹۸ص ۷۵۰)



شکل۱-۱۶مثالی برای تابع محدب دو متغیره

۵) اگر $g:R\to R$ تابع تک متغیره ومحدب غیر نزولی باشد و $h:\ R^n\to R$ تابعی چند متغیره ومحدب باشد،آنگاه $R^n\to R$ $f(x)=g[h(x)]$ تابعی محدب خواهد بود(براساس تمرین ۱۰-۳ ص ۱۴۸ بازارا و دیگران، ۲۰۰۶).

از این به بعد تمرکز ما روی توابع محدب است. نتایج برای توابع مقعر قابل حصول می‌شود وقتی توجه شود که f مقعر است اگر و فقط اگر $-f$ محدب باشد.

۱–۹نحوه بررسی تحدب توابع یک متغیره و دو متغیره

علاوه بر استفاده مستقیم از تعریف برای بررسی تحدب توابع (که گاه اینکارساده هم نیست) تست‌هایی نسبتاً ساده برای این بررسی در ریاضیات ارائه شده است که ذیلاً برخی از آنها بیان می‌شود.

۱–۹–۱ تست محدب بودن تابع یک متغیره

تابع یک متغیره $f(x)$ در فاصله $[x_1 \quad x_2]$محدب خواهد بود چنانچه $f''(x)$ در فاصله $x_1 \le x \le x_2$ پیوسته بوده و $f''(x) \ge 0$.

به عبارت دیگرتابع یک متغیره $f(x)$ که پیوسته بوده ومشتق دوم آن هیچگاه در فاصله $[x_1 \; x_2]$ منفی نشود($\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \ge 0$) دربازه $x_1 \le x \le x_2$ محدب است.

مثال ۱–۳۱ نشان دهید $f(x)=x^2$ روی $C=R$ محدب است

حل

$f(x)$ در $(-\infty \quad \infty)$ پیوسته، در این فاصله $f''(x)=2\ge 0$ پس تابع محدب است..

پایان مثال ▲

مثال ۱–۳۲

نشان دهید تابع $f(x)=e^x$ روی R محدب است.

جواب

:تابع در $(-\infty \quad \infty)$ پیوسته و $f''(x)=e^x \ge 0$ پس $f(x)$ محدب است.

پایان مثال ▲

توجه:

ثابت می شود اگر لگاریتمِ یک تابع محدب باشد، خود آن تابع نیز محدب است (Beckenbach,۱۹۴۸ ص ۴۴۹ به نقل از Shisha, ۱۹۷۲ ص۱۶).

۱-۹-۲ نحوه بررسی تحدب توابع دو متغیره

قضیه ۱-۲

در تابع ۲ متغیره $f(x_1,x_2)$ که دو بار مشتق پذیر باشد اگر و فقط اگر بازای تمام مقادیر ممکن ۲ متغیر x_1,x_2، دترمینان هشیان آن منفی نباشد $(\det H(x)\geq 0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\geq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\geq 0$ تابع محدب خواهد بود . اگر در هر سه بجای علامت $\geq$ علامت $>$ باشد، تابع محدب اکید خواهد بود (اقتباس ازص۵۹۹ هلیه و لیبرمن، ۱۹۶۸). در واقع شرط $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\geq 0$ زاید و قابل حذف است و از۲ شرط دیگر نتیجه می شود. اگر علامت $\geq$ در هر ۲ نامساوی با علامت بزرگتر جایگزین شود تست محدب اکید بودن تابع ۲ متغیره بدست می آید. در ضمن اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\leq 0$ تابع مقعر خواهد بود و اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}<0$ تابع مقعر اکید خواهد بود. پایان قضیه■

پس به طور خلاصه تست محدب بودن تابع دومتغیره $f(x_1,x_2)$ دو بار مشتق پذیر چنین است(بر اساس ص ۳۱۱ ترساین،۱۹۹۴)

اگر $\det\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}\geq 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ منفی نباشد تابع محدب خواهد بود.

مثال ۱-۳۳

آیا توابع داده شده در قسمتهای الف و ب در زیرمحدبندیا خیر؟

الف) $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-9\ln x_2$

جواب

این تابع ۲ متغیره دو بار مشتق پذیر می باشد:

$$\text{دترمینان هشیان} = det\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱+\frac{۹}{x_۲^۲} \end{pmatrix} > ۰$$

چون دترمینان مثبت است و عناصرقطر اصلی آن هم مثبت پس تابع محدب اکید است

ب) $f(x_۱,x_۲)=(x_۱-۲)^۲+(x_۲-۱)^۲$

جواب: تابع ۲ متغیره $f(x_1,x_2)$ دو بار مشتق پذیر می باشد:

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} ۲x_۱-٤ \\ ۲x_۲-۲ \end{pmatrix} \qquad \det H(\mathbf{x})=\det\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}=٤>۰ \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱^۲}=۲>۰$$

پس تابع $f(x_۱,x_۲)=(x_۱-۲)^۲+(x_۲-۱)^۲$ محدب است.پایان مثال ▲

۱–۱۰ تعریف حالاتِ (نیمه) معین مثبت ومنفی ماتریسها

برای ماتریسهای مربعی که تقارن داشته باشند حالت های زیر را در نظر می گیرند.
منظور از ماتریس متقارن ماتریسی است که ترانهاده آن با خودش یکی باشد.

۱–۱۰–۱ ماتریس مُعین مثبت

ماتریس $n \times n$ متقارن H ، مُعین مثبت نامیده می شود اگر برای تمام بردارهای غیر صفر x داشته باشیم: $x^t Hx>۰$

مثبت مُعین بودن(یا به طور خلاصه مثبت بودن) ماتریس مربع متقارن با چند تست معادل قابل تحقیق است:

تست ۱: تمام مقادیر ویژه ماتریس، مثبت باشند(Sivazilain& Stanfel, ۱۹۷۵ص۶۱).

تست ۲: ماتریسی مثل A یافت شود که در $H = A^t A$ صدق کند؛ A^tماتریس ترا نهاده A است.

تست ۳: در توابعی که تفکیک‌پذیر باشدیعنی آنها را بتوان به صورت حاصل جمع توابع جداگانه بر حسب x_1, x_2،..... نوشت اگر عناصر روی قطر اصلی هشیان تابع ، یعنی $\left(\partial^2 f / \partial x_j^2\right)$ ها، مثبت باشند تابع محدب است

۱–۱۰–۲ ماتریس نیمه مُعین مثبت یا معین غیر منفی

ماتریس متقارن $n \times n$ ، A نیمه مُعین مثبت است اگر برای تمام بردارهای غیر صفر x داشته باشیم: $x^t Ax \geq ۰$.

تست برای نیمه مُعین مثبت بودن ماتریس مربع متقارن

تست : اگر تمام مقادیر ویژه ماتریسِ متقارن، غیر منفی باشند(≥ 0)**به عبارت دیگر، ماتریس هیچ مقدار ویژه منفی نداشته باشد،** ماتریس نیمه مُعین مثبت **است** (بازاراو همکاران ۲۰۰۶ ص ۷۵۶)

ماتریس نیمه مُعین مثبت(معین غیر منفی) **A در واقع تعمیمی از اعداد** غیر منفی **است. اینست که اگر ماتریس A** مثبت نیمه مُعین **باشد با علامت** $A \geq 0$ **و اگر** مثبت مُعین باشد با $A > 0$ **نشان داده می شود. درضمن ماتریس** مثبت مُعین **یک ماتریس** مثبت نیمه مُعین **هم می باشد**[۱]

۱–۱۰–۳ ماتریس مُعین منفی

به ماتریسH متقارن $n \times n$ مُعین منفی گفته می شود اگر برای تمام بردارهای غیر صفرx داشته باشیم: $x^t Hx < ۰$

پسH مُعین منفی است اگر H- مُعین مثبت باشد.

تست : اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس متقارنH منفی باشندH **مُعین منفی است**

(Sivazilain& Stanfel, ۱۹۷۵page ۶۱)

۱–۱۰–۴ ماتریس نیمه مُعین منفی (معین غیر مثبت)

به ماتریس متقارن $n \times n$،H نیمه مُعین **منفی** گفته می شود اگر برای تمام بردارهای غیر صفرx داشته باشیم: $x^t Hx \leq ۰$.

تست :اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس متقارنH ، غیر مثبت باشند(≤ 0)باشد ماتریس نیمه مُعین**منفی است** (بازرا ۲۰۰۶ ص ۱۱۴) **به عبارت دیگر ماتریس هیچ مقدار ویژه مثبت نداشته باشد.**

---

[۱] https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/ae٤b٣٣opt/opt.pdf page ٣٩،٣٥

۱–۱۰–۵ ماتریس نا مُعین

به ماتریس متقارن $n \times n$ ، Hنا مُعین گفته می شود اگر نیمه معین(منفی یا مثبت) نباشد یا اینکه

برای بردارغیر صفر xو، $x^t Hx > ۰$ **و** برای یک برداردیگرغیرصفرمثل y نامساوی، $y^t Hy < ۰$ [۱] برقرار باشد.

تست: اگر برخی مقادیر ویژه ماتریس متقارن مربع، مثبت و برخی منفی باشند ماتریس نامُعین **است** (Sivazilain& Stanfel, ۱۹۷۵, ص۶۱)**.**

جدول زیر شامل خلاصه تست های فوق است.

جدول ۱–۲ خلاصه تست های تعیین حالت یک ماتریس متقارن

مقادیر ویژه (شرط های معادل)	بردار غیر صفر **x**وجود دارد که (شرط های معادل)	حالت ماتریس		علامت
همگی مثبت	$\mathbf{x^tHx}>۰.$	مُعین مثبت یا به طور خلاصه مثبت	positive definite	$H > ۰$
هیچ‌یک منفی نباشد	$\boldsymbol{x^t}\mathrm{H}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$	نیمه مُعین مثبت یا معین غیر منفی	positive semidefinite	$H \geq ۰$
همگی منفی	$\mathbf{x^tHx} < ۰$	مُعین منفی یا به طور خلاصه منفی	negative definite	$H < ۰$
هیچ‌یک مثبت نباشد.	$\boldsymbol{x^t}\mathrm{H}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$	ماتریس نیمه مُعین منفی (معین غیر مثبت)	negative semidefinite	$H \leq ۰$
همگی مثبت یا منفی نباشند		ماتریس نا مُعین	Indefinite	

۱–۱۱ تست تحدب توابع چند متغیره :

قضیه ۱–۳(برای تست تحدب)

فرض کنید تابع $f(x_1,...,x_n):S \rightarrow R$ دارای مشتقات نسبی درجه دوم برای هر نقطه در مجموعه[باز محدب غیر تهی $S \subset R^n$]باشد، آنگاه تابع fروی S محدب است اگر و فقط اگر ماتریس هشیان آن مثبت نیمه مُعین باشد(ص۱۱۴بازارا ودگران،۲۰۰۶) پایان قضیه■

---

[۱] https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/ae٤b٣٣opt/opt.pdf

۱-۱۱-۱ نحوه بررسی تحدب توابع چند متغیره به کمک مقادیر ویژه هشیان

دیدید اگر تابع $f: S \to R$ که روی مجموعه محدب $S \in R^n$ دو بار مشتق‌پذیر و ماتریس هشیان آن مثبت نیمه مُعین باشد محدب است(قضیه ص۱۱۴ بازارا ودگران ،۲۰۰۶).

نیمه مُعین مثبت= مُعین غیر منفی بودن هشیان با چند راه معادل قابل تحقیق است ازجمله:

-هیچ مقدار ویژه ماتریس هشیان تابع منفی نباشد(≡شرط تحدب توابع مشتق پذیر)

- زیردترمینانهای هشیان موسوم به ماینور اصلی پیشتاز[۱] ،که بعداً در فصل ۳ تعریف خواهد شد، غیر منفی(مثبت یا صفر) باشند.

قضیه۱-۴ (برای تحدب اکید)

اگر تابع $f: S \to R$ روی مجموعه باز محدب غیر تهی $S \subset R^n$ ۲بار مشتق‌پذیر وهشیان آن مُعین مثبت باشد، fمحدب اکید است (ص۱۱۵ بازارا ودگران ،۲۰۰۶وص۱۵۱آئرو، ۲۰۰۴). پایان قضیه■

معین مثبت (یا به طور خلاصه مثبت بودن) هشیان با چند راه معادل قابل تحقیق است:

تست تحدب اکید براساس مقادیر ویژه

تست ۱- تمام مقادیر ویژه ماتریس هشیان تابع مثبت باشند.

تست ۲- ماتریسی مثل A یافت شود که در $H = A^t A$ صدق کند؛A^t ماتریس ترا نهاده A است.

تست ۳-در توابع تفکیک‌پذیر، یعنی توابعی که بتوان آنها را به صورت حاصل جمع توابع جداگانه بر حسبX_1،X_2،..... نوشت، اگر عناصر روی قطر اصلی هشیان یعنی $\left(\partial^2 f / \partial x_j^2\right)$ ها مثبت باشند، تابع محدب اکید می‌باشد.

مجدداً متذکر می شود اگر تابع محدب اکید باشد، محدب هم می باشد.

---

[۱] leading principal minor

ذیلاً چند مثال برای بررسی وضعیت توابع ۲ متغیره با استفاده از یکی از۳ تست فوق آورده می شود.

مثال ۱-۳۴ [۱]: آیا تابع $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1^2+3x_2^2-5$ محدب است؟

حل ماتریس هشیان تابع به صورت زیر است:

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right)=\begin{pmatrix}4x_1\\6x_2\end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}\right)=H\left(x_1,x_2\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$$

محاسبه مقادیر ویژه

مقدار ویژه ماتریس(m) هر ماتریس مربع H، ریشه های چند جمله ای $\det\left[H-mI\right]=0$ یا $\det\left[mI-H\right]=0$ است(Sivazilain& Stanfel, ۱۹۷۵page ۶۱)[۲]،

مقادیر ویژه برای ماتریس هشیان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[H-mI\right]=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}-m\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-m & 0\\0 & 6-m\end{bmatrix}$$

مقدار ویژه ماتریس H

$$\det\begin{bmatrix}4-m & 0\\0 & 6-m\end{bmatrix}=\left(4-m\right)(6-m)=0\Rightarrow m_1=4 \quad m_2=6$$

با متلب:

```
>>H=[۴ ۰; ۰ ۶];m= eig(H)
m    = ۴,  ۶
```

یا

---

[۱] مثال های ۱-۲۸، ۱-۲۹ و ۱-۳۰ توسط مهندس هادیان دانش آموخته ارشد مهندسی صنایع دانشگاه شهید باهنر کرمان حل شده

[۲] پس اگر ماتریس $H-mI$ معکوس داشته باشد($\det\left[H-mI\right]\neq 0$) H مقدار ویژه ندارد.

```
>>syms x y ; f = ۲*x^۲ + ۳*y^۲-۵; H=hessian(f,[x,y]); m= eig(H)
m    = ۴,  ۶
```

از آنجا که همگی مقدار ویژه ماتریس هشیان تابع ،مقادیری مثبت اند، نتیجه می‌شود ماتریس هشیان معین مثبت است، در نتیجه تابع f اکیداً محدب است. واضح است که تابع اکیداً محدب، محدب نیز می باشد.

اینطور هم می توان استدلال کرد که f تفکیک پذیر است و عناصر روی قطر اصلی هشیان مثبت اند پس f محدب است. پایان مثال ▲

مثال ۱-۳۵ آیا تابع $f(\mathbf{x}) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy$ محدب است؟

حل

بردار گرادیان:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴x^۳ - ۴y \\ ۴y - ۴x \\ ۶z \end{pmatrix}$$

ماتریس هشیان:

$$H(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

دستور محاسبه گرادیان با متلب

```
>> syms x y z;
f = x*y + 2*z*x;
G=gradient(f,[x,y,z])
```

هشیان هم با نرم افزار هم قابل تهیه است:

```
>> syms x y z;
>> f = x^4 + 2*y+3*z^2-4*x*y;
>> H=hessian(f,[x,y,z])

H =

[ 12*x^2, -4, 0]
[     -4,  0, 0]
[      0,  0, 6]
```

برای بررسی تحدب:

$$mI - H = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-12x^2 & 4 & 0 \\ 4 & m-4 & 0 \\ 0 & 0 & m-6 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس H ریشه های چند جمله ای زیرند

$$\det[mI - H] = 0 \Rightarrow \left[\left(m-12x^2\right)(m-4)(m-6)\right] - \left[4\times 4\times(m-6)\right] = 0$$

$$m^3 - \left(10+12x^2\right)m^2 + \left(8+120x^2\right) + \left(96-288x^2\right) = 0$$

ریشه های معادله درجه ۳ فوق چنین است:

$$m_1 = 6 \qquad m_2, m_3 = 2+6x^2 \pm 2\sqrt{9x^4-6x^2+5}$$

گرچه مقدار یکی از مقادیر ویژه(m_1)مثبت است، اما از آنجا که مقدار m_2 و m_3 به مقدار x بستگی دارد و همواره مثبت نمی باشد، پس تابع کلاً محدب نیست.

توجه : اگر در متلب Symbolic Math Toolbox داشته باشید با دستورات زیر همان نتایج فوق حاصل می شود:

```
>> syms  x۱;H=[۱۲* x ^۲ ,-۴, ۰;-۴،۴،۰;۰،۰،۶]; m=eig(H)
m =
 [  ۶]
[ ۲+۶*x^۲+۲*(۵-۶*x^۲+۹*x^۴)^(۱/۲)]
[ ۲+۶*x^۲-۲*(۵-۶*x^۲+۹*x^۴)^(۱/۲)]
```

یا

>> syms x y z; f = x^۴ + ۲*y^۲+۳*z^۲-۴*x*y; H=hessian(f,[x,y,z]); m=eig(H)

```
>> syms x y z;
>> f = x^4 + 2*y^2+3*z^2-4*x*y;
>> H=hessian(f,[x,y,z]);
>> m=eig(H)
m=
                        6
 6*x^2 - 2*(9*x^4 - 6*x^2 + 5)^(1/2) + 2
 2*(9*x^4 - 6*x^2 + 5)^(1/2) + 6*x^2 + 2
```

یعنی :

$$m_1 = 6 \qquad m_2, m_3 = 2 + 6x^2 \pm 2\sqrt{9x^4 - 6x^2 + 5}$$

می توان نشان داد این تابع در یک جا به طور مو ضعی محدب است یعنی در بازه ای از x به طور موضعی مینیمم دارد و در جایی دارای نقطه‌ای موسوم به نقطه زینی می‌باشد که بعدها با تعریف آن آشنا خواهید شد. پایان مثال ▲

مثال ۱-۳۶

آیا تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹lnx_۲$ محدب است یا خیر؟

راه حل اول با مقادیر ویژه :

اگر مقدارهای ویژه هشیان $H(x)$ منفی نباشد. محدب است.

مقدارهای ویژه ماتریس مربع $H(x)$، ریشه های چند جمله ای زیر است

$\det\left[H(x) - mI\right] = 0$ یا

$$H(x) - mI = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ + \frac{۹}{x_۲^۲} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & ۰ \\ ۰ & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ - m & ۰ \\ ۰ & ۱ + \frac{۹}{x_۲^۲} - m \end{pmatrix}$$

$$\det(H(x) - mI) = ۰ \rightarrow (۱ - m)\left(۱ + \frac{۹}{x_۲^۲} - m\right) = ۰$$

هیچ یک از مقادیر ویژه (جوابهای معادله فوق) منفی نیستند پس تابع محدب است.

راه حل دوم با تفکیک کردن

تابعی را که بتوان به صورت حاصل جمع توابع جداگانه بر حسب x_1, x_2،..... تفکیک کرد، اگرعناصر روی قطراصلی هشیان آن، یعنی $\left(\partial^2 f / \partial x_j^2\right)$ ها، مثبت باشند، تابع محدب[اکید] می‌باشد.

چون این تابع تفکیک پذیر بوده و عناصر روی قطراصلی هشیان آن یعنی $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\frac{9}{x_2^2} \end{pmatrix}$ مثبت است پس محدب اکید می‌باشد. پایان مثال ▲

مثال ۱–۳۷ به کمک مقادیر ویژه ماتریس هشیان، محدب بودن تابع $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ بررسی کنید

حل

$$H = H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$H - mI = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 0 & 0 & 2-m \end{bmatrix}$$

$$\det\left[H - mI\right] = 0 \Rightarrow \left[(2-m)(2-m)(2-m)\right] = 0$$

$$(2-m)^3 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 2$$

چون مقادیر ویژه ماتریس هشیان مثبت است، نتیجه می‌شود این ماتریس هشیان معین مثبت بوده و در نتیجه تابع f محدب اکید است. پایان مثال ▲

۱–۱۱–۲ تحدب تابع درجه دوم (کوادراتیک)

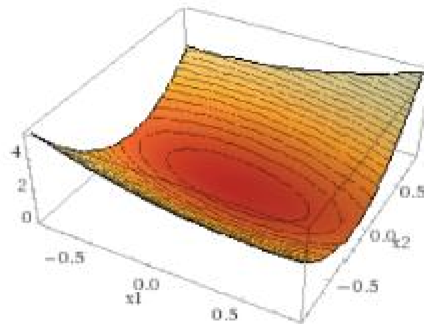
تابع n متغیره ای که که به فرم زیر قابل نوشتن باشد کوادراتیک نام دارد

$$x^t Q x + c^t x + d$$

که در آن $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ Q یک ماتریس متقارن n در n و

c یک بردار اسکالر n عنصری از اعداد است: $c \in R$، d یک عدد ثابت است

شکل زیر نمونه یک. تابع کوادراتیک را نشان می دهد.



شکل۱-۱۷ نمونه تابع درجه دوم یا کوادراتیک (aaa. princeton. edu/ orf۵۲۳)

قضیه ۱–۵ تست تحدب توابع کوادراتیک

تابع کوادراتیک $f(x)=c^t x+x^tQx + d$ محدب اکید است اگر وفقط اگر ماتریس مربع و متقارن Q معین مثبت باشد($Q > ۰$) یعنی مقادیر ویژهQ همگی مثبت باشد و محدب است اگر و فقط اگر ماتریس مربع و متقارن Q معین نیمه مثبت باشد($Q \geq ۰$) یا هیچ مقدار ویژه آن منفی نباشد. (ازaaa. princeton. edu/ orf۵۲۳): پایان قضیه ■

مثال ۱–۳۸ تابع کوادراتیک زیر را درنظر بگیرید.

$Q = [۲ \ -۱; -۱ \ \ ۲] \quad c=(-۲ \ \ ۱) \quad d=۵$

الف) تابع را بدست آورید. ب) آیا تابع محدب است؟

حل الف)

$$x^tQx = (x_۱ \ \ x_۲)\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = x_۱^۲ - x_۱x_۲ + ۲x_۲^۲$$

$$c\mathbf{x} = (-2 \ \ 1)(x_1 \ x_2)^t = -2x_1 + x_2$$

$$f(x)=c\,\mathbf{x}+x^tQx + d$$

$$f(x) = x_۱^۲ - x_۱x_۲ + ۲x_۲^۲ - ۲x_۱ + x_۲ + ۵$$

ب)

چون Q در تست تحدب توابع کوادراتیک صدق می‌کند یعنی چون مقادیر ویژه ماتریس مربع و متقارن Q برابر ۳و۱و لذا مثبت می باشند Q معین مثبت ($Q > ۰$) و f محدب اکید است. پایان مثال ▲

۱–۱۲ انواع دیگر توابع محدب

علاوه بر ۲ دو نوع محدب و محدب کامل یا اکید، توابع محدب خود تقسیمات دیگری نیزدارندکه از لحاظ شدت تحدب متفاوتند، متداول ترین آنها چنین است:

نوع قویتر	نوع نیرومند	نوع معمولی
	محدب اکید	محدب
	محدب گونه اکید	محدب گونه (سودوکنوکس)
شبه محدب (کوازی کنوکس) قوی	شبه محدب (کوازی کنوکس) اکید	شبه محدب (کوازی کنوکس)

جدول۱-۳ آخر این فصل تعریف تابع محدب و تقسیمات آنرا به طور خلاصه نشان می دهد وذیلاً به برخی از آنها پرداخته می شود. ازجمله این تقسیمات نوع شبه محدب(کوازی کنوکس)و نوع محدب گونه (سودوکنوکس) است که درمواردی که فرض تحدب یک تابع می‌تواند به ۲ مفهوم ضعیف‌تراز محدب تقلیل یابد کار برد دارد.

۱–۱۲–۱ تعریف تابع محدب گونه (سودو کنوکس)

توابع محدب گونه (سودو کنوکس) که در ذیل تعریف می شود از پر کاربرد ترین انواع توابع محدب است.

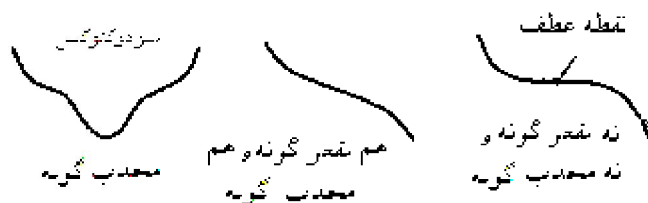
اگر C یک مجموعه باز غیرتهی در فضای n بعدی باشد تابع مشتق‌پذیر رویC $f:C\to R$ محدب گونه (سودو کانوکس) نامیده می‌شود اگر

۱- برای هر $\mathbf{x}_۱,\mathbf{x}_۲\in C$ که در $\nabla f(\mathbf{x}_۱)^t(\mathbf{x}_۲-\mathbf{x}_۱)\geq ۰$ صدق می‌کنند داشته باشیم $f(\mathbf{x}_۲)\geq f(\mathbf{x}_۱)$ (ص ۱۵۱ آوریل،۱۹۷۶،ص۲۶۵ آوریل،۲۰۰۳وبازارا و همکاران ،۲۰۰۶ص ۱۴۲).

یا بطورمعادل (بازاراو همکاران،۲۰۰۶ص ۱۴۲)

۲- برای هر $\mathbf{x}_۱,\mathbf{x}_۲\in C$ اگر $f(x_۲)<f(x_۱)$; آنگاه $\nabla f(\mathbf{x}_۱)^t(\mathbf{x}_۲-\mathbf{x}_۱)<۰$.

شایان توجه است که توا بع مشتق پذیر محدب، محدب گونه(سودوکنوکس) اند و واضح است که اگر گفته شود تابع محدب گونه است، به طور ضمنی می رساند که تابع مشتق پذیر است شکل۱-۱۸ دو تابع محدب گونه را نشان می دهد

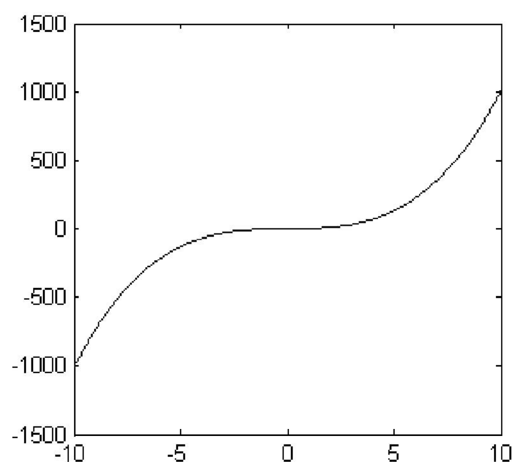


شکل۱-۱۸ دو تابع محدب‌گونه (سودوکنوکس)

(گودوین و همکاران،۲۰۰۴ ص ۳۷)

مثال ۱-۳۹ تابع $x + x^{۳}$ $-\infty < x < \infty$ را رسم و نشان دهید محدب نیست اما محدب گونه است.

حل: شکل این تابع در زیر رسم شده است



تابع محدب نیست

بررسی :آیا نامساوی $(\mathbf{x}_۲ - \mathbf{x}_۱).\nabla f(\mathbf{x}_۱) \le f(\mathbf{x}_۲) - f(\mathbf{x}_۱)$ برقرار است؟

$$f(x) = x + x^{۳} \qquad \nabla f = \frac{df(x)}{dx} = ۱ + ۳x^{۲}$$

طرف چپ :

$$(x_۲ - x_۱).\nabla f(x_۱) = (x_۲ - x_۱)(۱ + ۳ * x_۱^{۲})$$

طرف راست:

$$f(x_۲) - f(x_۱) = x_۲ + x_۲^{۳} - x_۱ - x_۱^{۳}$$

اگر تابع محدب باشد باید همواره داشته باشیم:

$$(x_2 - x_1)(1+3x_1^2) \le x_2 + x_2^3 - x_1 - x_1^3$$
$$\text{or } x_2 - x_1 + 3x_1^2(x_2 - x_1) \le x_2 - x_1 + (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$$
$$\text{or } \quad 3x_1^2 \le x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$$
$$\text{or } \quad 2x_1^2 \le x_2^2 + x_1x_2$$

یعنی جهت محدب بودن باید همواره $2x_1^2 \le x_2^2 + x_1x_2$ برقرار باشد. ذیلاً به بررسی این موضوع می پردازیم.

ابتدا قسمت منفی محور x ها :

اگر $x < 0$ و $x_1 < x_2$ آنگاه $x_1^2 > x_1x_2$, $x_1^2 > x_2^2$

و لذا $2x_1^2 > x_2^2 + x_1x_2$. پس شرط تحدب در این حالت بر قرار نیست

گر چه اگر $x > 0$ و $x_1 < x_2$ آنگاه این نامساوی صدق می کند

اما چون همواره این نامساوی برقرار نیست تابع محدب نیست

راه دیگر

شرط محدب بودن تابع یک متغیره$f(x)$ در یک فاصله اینست که به ازای تمام x ها در فاصله داده شده مشتق دوم منفی نشود. چون$f''(x) = 6x$ بازای برخی x ها درفاصله$-\infty < x < \infty$ منفی می شود پس تابع در آن فاصله محدب نیست.

بررسی محدب گونه (سودوکنوکس) بودن:

دیدید تابع f محدب گونه است اگر بازای هرx_1وx_2 که داشته باشیم$f(x_2)<f(x_1)$ آنگاه نامساوی $\nabla f(x_1)^t(x_2-x_1)<0$ برقرار باشد.توجه کنید که این نا مساوی در مورد آن زوج نقاطی باید بررسی شود که $f(x_1)$از$f(x_2)$بیشتر باشد. وگرنه x_1وx_2 هایی که این شرط را ندارند مشکلی در محدب گونه (سودوکنوکس) بودن ایجاد نمی کنند.

سه حا لت در نظر می گیریم

۱) $\mathbf{x_1 > x_2}$

واضح است در این حالت

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+x_2^3-x_1-x_1^3<0 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$$

چون $x_2 - x_1 < 0$ و $\nabla f(x_1) > 0$ پس داریم $\nabla f(x_1)^t(x_2-x_1)<0$

۲) $x_1 < x_2$

در این حالت $f(x_2) > f(x_1)$ و لذا حالت نباید بررسی شود.

۳) $x_1 = x_2$, $f(x_2) = f(x_1)$ ونباید بررسی شود.

پس شرط محدب گونه بودن برای تابع برقرار است پایان مثال ▲

۱–۱۲–۲ تعریف تابع اکیداً محدب گونه(سودو کنوکس اکید)

تابع f محدب گونه اکید روی مجموعه C است هرگاه برای ۲ نقطه متفاوت x_1, x_2 در C $(x_1 \neq x_2)$ که در رابطه $\nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1) \geq 0$ صدق می‌کنند داشته باشیم $f(x_2) \geq f(x_1)$ یا بطورمعادل

برای نقاط متفاوت $x_1 \neq x_2$ از مجموعه C ، نامساوی $f(x_2) \leq f(x_1)$ بطور ضمنی ایجاب کند $\nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1) < 0$. (بازاراو همکاران،۲۰۰۶ص ۱۴۲)

هر تابع محدب‌گونه (سودوکنوکس) اکید یک تابعِ محدب گونه هم می باشد(کم بینی ومارتین،۲۰۰۸ص۴۴)

توابع محدب مشتق‌پذیر، محدب‌گونه(سودوکنوکس) می‌باشند (آوریل،۲۰۰۳ص۲۶۶آوریل، ۱۹۷۶ ص ۱۵۱)

۱–۱۲–۳ تعریف تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)

چنانچهC یک مجموعه غیر تهی محدب در R^n باشد، تابع $f : C \to R$ روی C شبه محدب(کوازیکنوکس)خوانده می‌شود اگر برای هر $x_1, x_2 \in C$، نامساوی زیر برقرار باشد

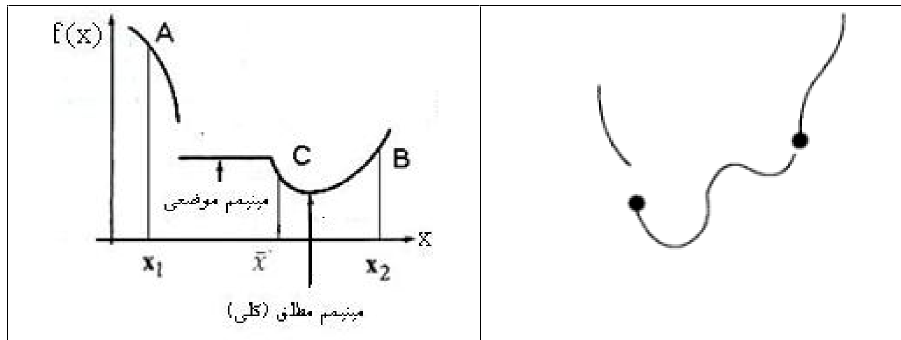
برای تمام $\lambda \in (0, 1)$ $\quad f[(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

توجه :

الف) هر مینیمم موضعی تابع شبه محدب، یک مینیمم کلی نیست

ب) برخلاف تابع محدب, تابع شبه محدب میتواندگسستگی داشته باشد(شکل ۱–۱۹).

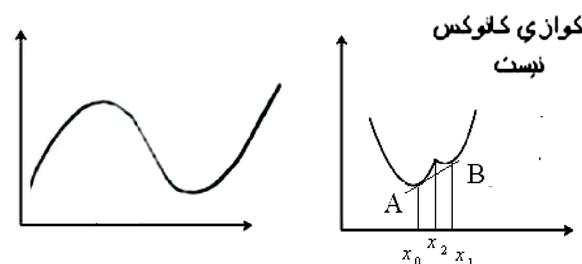
پس اگر تنها ۲ نقطه هم یافت شودکه متعلق به C باشدولی دررابطه صدق نکندتابع شبه محدب نیست.



شکل۱-۱۹ دوتابع شبه محدب یاکوازی کنوکس

منبع: (راست: بازاراو همکاران۲۰۰۶ ص ۱۳۵ چپ:آوریل،۱۹۷۶(ص ۱۴۶)

توابع شکل۱- ۱۹تعریف تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)را ارضاء می‌کنند مثلاًدر تابع شکل سمت چپ هر ۲ نقطه ای را که روی محور xها بگیریم مثل $x_۱$ و $x_۲$ برای هرنقطه بین آن دو مثل $\bar{x}$(ترکیب محدب ازآن دو) $f(\bar{x}) \leq \max\{f(x_۱), f(x_۲)\}$؛ اما در شکل ۱-۲۰ اینطور نیست.

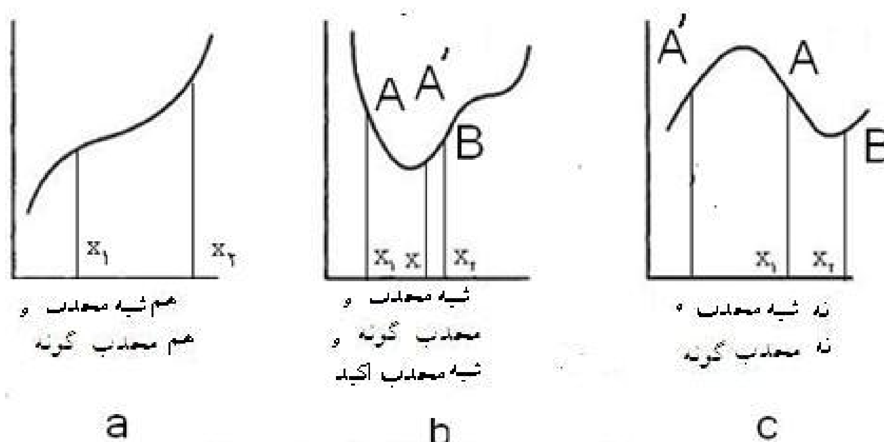


$$x_۲ = \lambda x_۰ + (۱-\lambda)x_۱$$

$$f(x_۲) \not\leq \max\{f(x_۰), f(x_۱)\} \quad \text{for each } \lambda \in (۰, ۱)$$

شکل۱-۲۰ توابع غیر شبه محدب(کوازی کنوکس)

در شکل ۱-۱۸ (a) برای کلیه نقاطی از تابع که شرط $\nabla f(x_۱)(x_۲ - x_۱) \geq ۰$ را دارند $f(x_۲) > f(x_۱)$ برقرار است؛ پس تابع سودوکنوکس است. تحقیق کنید که تابع شبه محدب(کوازی‌کنوکس)هم می باشد.



شکل۱-۲۱محدب گونگی (pseudoconvexity)و شبه تحدب (quasiconvexity)

(ص۷۶۹ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)

در شکل ۱-۲۱ (b) برای نقاط A,B $\nabla f(x_1)(x_2-x_1)$ منفی است و $f(x_2)$ کوچکتریا مساوی $f(x_1)$است و برای نقاط A',B که در $\nabla f(x_1)(x_2-x_1)\geq 0$صدق می کند $f(x_2)\geq f(x)$، پس تابع سودوکنوکس است. البته تابع شبه محدب (کوازی کنوکس) هم می باشد.

در شکل ۱-۲۱ (c) گرچه برای نقاطی مثل A,B شرط محدب گونه بودن(سودو کنوکس بودن) برقرار است اما برای نقاطی مثل A',B این شرط برقرار نیست. پس این تابع سودو کنوکس نیست. تحقیق کنید که شرط شبه محدب(کوازی کنوکس)بودن هم برقرار نمی باشد.

مفاهیم انواع تحدب (محدب، شبه محدب وغیرو) برای یک نقطه خاص هم تعریف شده است که در برخی مسایل برنامه ریزی غیر خطی کفایت می‌کند(گودوین و همکاران، ۲۰۰۴ص ۳۷). شکل ۱-۲۲ نیز کمک به درک مفاهیم شبه تحدب(کوازی کنوکس بودن) و محدب گونه(سودوکنوکس) بودن در یک نقطه می نماید.

تابع fدرنقطه x_1 شبه محدب(کوازی کنوکس) است اما شبه محدب اکید نیست تابع fدرنقطه x_2 هم شبه محدب است وهم شبه محدب اکید	تابع fدرنقطه x_1 هم محدب گونه (سودوکنوکس) است وهم محدب گونه اکید تابع fدرنقطه x_2 محدب گونه ست محدب گونه اکیدنیست
a– شبه تحدب	b- محدب گونه بودن

شکل ۱-۲۲ مفاهیم شبه محدب بودن و محدب گونه بودن در نقطه
http://www.eng.newcastle.edu.au/eecs/cdsc/books/cce/Slides/ConvexAnalysis.pdf

۱–۱۲–۴ تعریف تابع شبه محدب(کوازی کنوکس) قوی

تابع f روی مجموعه C تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)قوی خوانده می‌شود،اگر نامساوی در بخش ۱-۱۲-۳ تعریف تابع شبه محدب، یک نامساوی صرف برای $x_1 \neq x_2$ باشد یعنی

اگر C یک مجموعه غیر تهی در فضای n بعدی باشد، تابع $f: C \to R$ شبه محدب(کوازی کنوکس)قوی خوانده می شود اگر(بازارا وهمکاران،۲۰۰۶ ص ۱۴۱)

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \text{for each } \lambda \in (0,1) \qquad x_1 \neq x_2$$

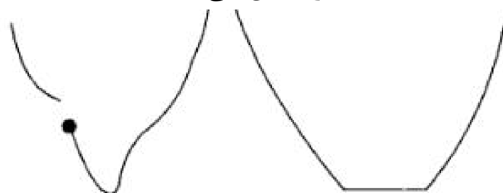
هر تابع محدب اکید(کامل)، شبه محدب(کوازی کنوکس)قوی هم می باشد(بازارا وهمکاران،۲۰۰۶ ص ۱۴۱). هر تابع شبه محدب قوی در ضمن شبه محدب است(ص ۱۵۰ آوریل،۱۹۷۶،ص۲۶۳ آوریل،۲۰۰۳قضیه۶،۴)

۱–۱۲–۵ تعریف تابع شبه محدب(کوازی کنوکس) اکید

تابع $f: S \to R$روی مجموعه غیر تهی محدبS، شبه محدب(کوازی کنوکس)اکید خوانده می‌شود اگر نامساوی در تعریف تابع شبه محدب نامساوی صرف باشد مشروط برآنکه $f(x_1) \neq f(x_2)$. یعنی برای هر $x_2, x_1 \in S$ با $f(x_1) \neq f(x_2)$ داشته باشیم (ص۱۳۹ بازارا و همکاران،۲۰۰۶):

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \forall \lambda \in (0\ 1)$$

شکل ۱-۲۳ دو تابع شبه محدب اکید را نشان می دهد.



شکل ۱-۲۳ دو تابع شبه محدب(کوازی‌کنوکس) اکید

توجه:

-اکیداً شبه محدب بودن یک تابع ایجاب می کند که هر نقطه بین ۲ نقطه دیگر باید مقدار کمتری ازتابع را نسبت به ماکزیمم مقادیر تابع به ازای آندو نقطه به خود اختصاص دهد

-توابع شبه محدب اکید(کوازی‌کنوکس اکید)، از جهت اینکه تضمین می کند که یک مینیمم موضعی روی یک مجموعه محدب مینیمم مطلق است، از اهمیت خاص در NLP برخوردارند (ص۱۳۹ بازارا و دگران،۲۰۰۶)

-هر تابع شبه محدب اکید لزوماً همواره شبه محدب(کوازی کنوکس) نیست(ص ۱۵۰ آوریل،۱۹۷۶، ص۲۶۳ آوریل،۲۰۰۳ بازارا و همکاران ،۲۰۰۶ ص۱۴۰)ولی تحت شرایطی شبه محدب است(لم ص ۱۴۰بازارا و همکاران، ۲۰۰۶)

-توابع محدب، شبه محدب(کوازی کنوکس) اکید می باشند (بازارا و همکاران، ۲۰۰۶ص ۱۳۹)

به عنوان مثال تابع تعریف شده زیر روی $(x_1 = 0, \quad x_2 > x_1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & if\ x = 0 \\ 0 & if\ x \neq 0 \end{cases}$$

در تعریف شبه محدب اکید و شبه محدب قوی صدق می‌کند اما شبه محدب نیست.

زیرا اگردر نقاط $(x_1 < \bar{x} < x_2)$ داریم: $f(\bar{x}) = 0 < \max\{f(x_1), f(x_2)\} = 1$.

-تابع محدب کامل(اکید)در ضمن شبه محدب(کوازی کنوکس) قوی است(ص ۱۵۰ آوریل،۱۹۷۶ ص۲۶۳ آوریل،۲۰۰۳)

-توابع محدب و شبه محدب قوی در ضمن، شبه محدب اکید اند (ص ۱۵۰ آوریل،۱۹۷۶ ص۲۶۳ آوریل،۲۰۰۳)

-تابع شبه محدب اکید کمی ضعیف تر از شبه محدب قوی است.

-توابع محدب گونه (سودوکنوکس)، شبه محدب اکیدند(ص ۱۵۱ آوریل،۱۹۷۶ ص۲۶۴ آوریل،۲۰۰۳)

شایان ذکر است که یک مساله برنامه ریزی ریاضی با همه محدودیت ها از نوع شبه محدب(کوازی کنوکس) سهولتی در استنتاجات ایفا می‌کند.

قضیه ۱-۶ شرط مطلق بودن مینیمم

اگر تابع fیک تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)اکیددر یک مجموعه محدب $X \in R^n$ باشد و $x^* \in X$ مینیمم موضعی تابع f باشد آنگاه x^* مینیمم مطلق تابع f روی X خواهد بود(ص ۱۵۰ آوریل، ۱۹۷۶ص۲۶۳ آوریل،۲۰۰۳) پایان قضیه■

شکلهای۱-۲۳ و۱-۲۴روابط بین انواع تحدب را نشان می دهد. حال به تعریف توابع تک کوهانه که ازاهمیت خاص در بهینگی وهمگرایی برخی روشها برخوردارند می پردازیم.

۱-۱۳تعریف تابع تک کوهانه

تعریف ۱ (اقتباس از ص ۱۵۶ بازاراو همکاران ،۲۰۰۶)

تابع تک متغیره f(x) یک کوهانه در فاصله [a,b] نامیده می شود اگر برای یک نقطه $\bar{x}$ در فاصله[a b] ، f(x) در $[a\ \bar{x}]$ غیرصعودی و در فاصله $[\bar{x}\ \ b]$ غیرنزولی باشد.

تعریف۲ (ص ۱۲۲ مک کورمیک،۱۹۸۳)

یک کوهانه بودن تابع در فاصله بسته [a b] به این معنی است که نقطه منحصر به فرد $a<x^*<b$ وجود دارد که $x\in[a\quad b]$ $\quad f(x^*)=\inf[f(x)]$ $\quad a<x^*<b$[1] و f(x) غیرصعودی در $[a\ x^*]$ و غیرنزولی در $[x^*\ b]$ می‌باشد.

تعریف ۳(ص۲۲۵ آوریل،۱۹۷۶ ص۳۹۲ آوریل،۲۰۰۳)

تابعf با مقدار حقیقی در بازه بسته $L\subset R$، تک کوهانه نامیده می شود اگر $x^*\in L$ چنان وجود داشته باشد که f رامینیمم کرده بازای هر ۲نقطه $x_1<x_2$ متعلق به L برای $x_2\le x^*$ به طور ضمنی این مطلب رسانده شود که $f(x_1)>f(x_2)$،

---

[1] دانشجویانی که با مفهوم اینفیمم (Inf)آشنایی ندارند به ابتدای فصل ۵ مراجعه کنند

و برای $x_1 \geq x^*$ به طور ضمنی این مطلب رسانده شود که $f(x_2) > f(x_1)$.

توابع تک کوهانه لزوماًپیوسته ومشتق پذیرنیستند.شکل۱-۲۴چندنمونه تابع تک کوهانه رانشان میدهد.



شکل۱-۲۴ چهارنمونه تابع تک کوهانه

(منبع : a–مک کور میک،۱۹۸۳ ص۱۲۲ b- آوریل،۲۰۰۳ ص۳۹۲)

۱–۱۳–۱ تعریف تابع تک کوهانه اکید

(ص ۴۴۵ بازاراو همکاران ،۲۰۰۶)

تابع $\theta: > R \dashrightarrow R$ را، که باید کمینه سازی شود،. تک کوهانه اکید در بازه [a,b]خوانند اگر مقداری مثل $\bar{\lambda}$ موجود باشد که تابع θ را در آن بازه کمینه کرده و برای هر $\lambda_۱,\lambda_۲ \in [a\ b]$ به طوریکه $\lambda_۱ < \lambda_۲$ و $\theta(\lambda_۱) \neq \theta(\bar{\lambda}), \theta(\lambda_۲) \neq \theta(\bar{\lambda})$ باشد، داشته باشیم:

شایان ذکر است که

-هر تابع شبه محدب(سودوکنوکس) اکید تک کوهانه اکید است (راویندران،۲۰۰۸ ص۶-۲)

-تک کوهانه اکید با شبه محدب اکید معادلند(ص ۳۴۵ بازاراو همکاران ،۲۰۰۶)

پس توابع شبه محدب(کوازی‌کنوکس)اکید و بالطبع توابع محدب گونه(سودوکنوکس) هم، اکیداً تک کوهانه اند.

۱–۱۳–۲ تعریف تابع تک کوهانه قوی

(ص ۴۴۵ بازاراو همکاران ،۲۰۰۶)

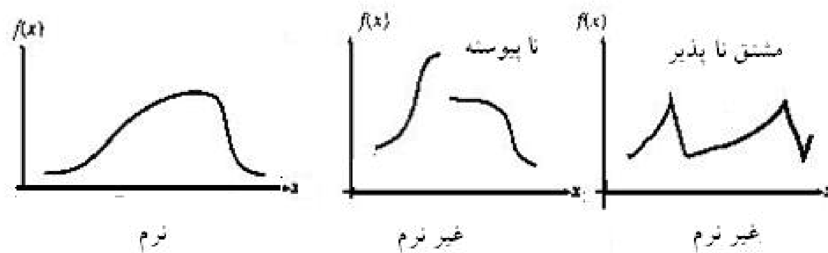
تابع $\theta: > R \dashrightarrow R$ راکه باید کمینه سازی شود، تک کوهانه قوی در بازه [a,b] خوانند اگر مقداری مثل $\bar{\lambda}$وجود داشته باشد که تابع θ را در آن بازه کمینه کرده و برای $\lambda_۱,\lambda_۲ \in [a\ b]$ به طوری که برای $\lambda_۱ < \lambda_۲$ داشته باشیم:

$\lambda_{۲} \leq \bar{\lambda}$ ایجاب کند که $\theta(\lambda_{۱}) > \theta(\lambda_{۲})$

ایجاب کند که $\theta(\lambda_{۱}) < \theta(\lambda_{۲})$

۱-۱۴ تعریف تابع نَرم

تابع f (**x**) را در فاصله [a,b] نَرْم خوانند اگرمشتق آن،$f\,'(x)$ در فاصله [a,b] پیوسته باشد[۱]. در غیر این صورت غیر نرم خوانده می‌شود. در شکل۱- ۲۵ نمونه توابع نرم وغیر نرم آورده شده است.



شکل۱- ۲۵ نمونه توابع نرم وغیر نرم(راردین،۱۹۹۸ ص ۷۲۴)

۱-۱۵ تعریف تابع صعودی و تابع نزولی

(سیلورمن،ترجمه عالم زاده ،۱۳۸۵ ص ۷۳)

تابع f تعریف شده روی مجموعه X، که معمولاً به صورت بازه است، صعودی است اگر برای هر$x_{۱} < x_{۲}$

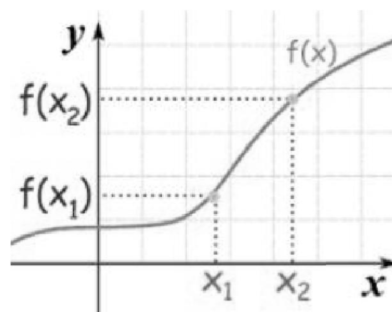
$f(x_{۱}) \leq f(x_{۲}), \quad x_{۱} \in X\,, \quad x_{۲} \in X$

تابع f تعریف شده روی Xنزولی است اگر $x_{۱} < x_{۲}$,

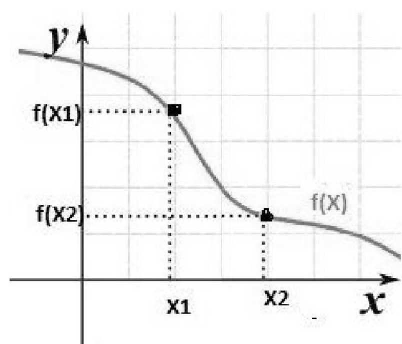
$f(x_{۱}) \geq f(x_{۲}), \quad x_{۱} \in X\,, \quad x_{۲} \in X$

در تعریف فوق اگر برای هر$x_{۱} < x_{۲}$ ، $f(x_{۱}) < f(x_{۲})$ یا $f(x_{۱}) > f(x_{۲})$ باشد تابع بترتیب اکیداً نزولی یا اکیداً صعودی خواهد بود. شکلهای۱-۲۶و۱-۲۷ نمونه توابع نزولی و صعودی را نشان می دهد

[۱] Crooke, P,, Ratcliffe,J,G,۱۹۹۱ A Guidebook to Calculus with Mathematica, Wadsworth Inc. ص۱۸۰



شکل ۱-۲۶ تابع صعودی



شکل ۱-۲۷ تابع نزولی

۱-۱۶ روابط بین انواع تحدب

قضیه زیر رابطه بین چند نوع تابع محدب را بیان می‌کندوشکل های ۱-۲۲و ۱-۲۳ رابطه چند نوع تابع محدب را به تصویر کشانده است. خلاصه‌ای از انواع تحدب در جدول ۱-۳ آخراین فصل دیده می شود.

قضیه۱-۷ مربوط به رابطه انواع تحدب

با توجه به اختصارات زیر برای انواع تحدب(برگرفته از پونشتاین،۱۹۶۷)

SC[1]= تحدب اکید(کامل) SPC[2]= محدب گونه بودن اکید

C[3]= تحدب معمولی PC[4]= محدب گونه بودن

SQC[5]= شبه تحدب اکید QC[6]= شبه تحدب

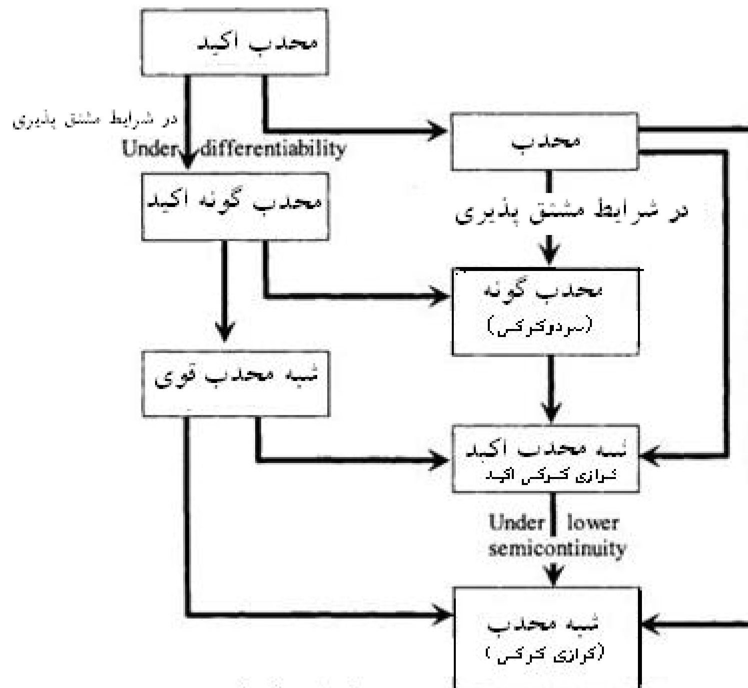
الف) SC کانوکس(C) هم میباشد؛ کانوکسPC هم است؛ PCدرضمن SQCهم است. [SQCتحت شرایطی] در ضمن QC هم است. هم چنین

ب) PCدرضمن SQCهم است

ج) PCدر ضمن SPC هم است. پایان قضیه ■

---

[1] strict convexity
[2] strict pseudoconvexity
[3] (ordinary) convexity
[4] pseudoconvexity
[5] strict quasiconvexity
[6] quasiconvexity



شکل۱-۲۸ رابطه بین چند نوع تحدب (بازارا و همکاران،۲۰۰۶ ص ۷۷۰)

برطبق شکل ۱-۲۸ " محدب، محدب گونه (سودوکنوکس) و شبه محدب(کوازی کنوکس) " به ترتیب از قوی به ضعیف قراردارند و قبل از نازل ترین نوع که شبه محدب باشد نوع شبه محدب اکید جای دارد.

۱-۱۷ تعریف استقلال و وابستگی خطی بردارها، طول بردار و تعریف نقطه منظم

۱-۱۷-۱ وابستگی واستقلال یک مجموعه بردار

یک گروه بردار$\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m$ را همخط[1]یا به طور خطی وابسته گویند اگر m عدد اسکالر $c_1,...,c_m$، که برخی از آنها صفر نباشد، وجود داشته باشد که $c_1\mathbf{x}_1+...+c_m\mathbf{x}_m=0$ یا $\sum_{i=1}^{m} c_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$؛ در غیر اینصورت بردارها مستقلند.

[1] collinear

حالت خاص

اگر ماتریس حاصل از این بردار ها یعنی ماتریس $(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m)$ مربعی باشد و بردارها همخط باشند برای $(\mathbf{c}_1,...,\mathbf{c}_m)\neq 0$ رابطه

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{x}_i = (c_1\mathbf{x}_1 + ... + c_m\mathbf{x}_m) = 0 \qquad or\ (c_1,...,c_m)(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m)^t = 0$$

در صورتی برقراراست که دترمینان ماتریس مذکور صفر باشد.

زیرا اگر دترمینان صفر نباشد ماتریس معکوس داشته و باید $(\mathbf{c}_1,...,\mathbf{c}_m)^t = 0$ که خلاف فرض است. پس اگر ماتریس شامل بردارهای $(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m)$ مربعی باشدو دترمینان آن صفر باشد بردار ها ی $(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m)$ وابستگی خطی دارند. در صورتی که دترمینان آن صفر نباشد آن بردار ها مستقل خطی اند.

مثال ۱- ۴۰ آیا ۳ بردار $\mathbf{x}_3 = (2,5,5)'$ $\mathbf{x}_2 = (0,1,1)'$ $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ وابسته اند؟

حل

چون $2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = 0$ یا $\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2$ پس این ۳ بردار همخط یا به طور خطی وابسته اند زیرا یکی به صورت ترکیبی از ۲ تای دیگر است؛

راه حل‌دیگر

چون دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix}$ (ستون‌ها: $x_1\ x_2\ x_3$) صفر است؛ نتیجه می شود آن بردارها همخطند (وابسته اند)؛ اما اگر $\mathbf{x}_3 = (2,5,6)$ می بود،آنها مستقل خطی می بودند (هلیه و لیبرمن،۱۹۶۸ ص ۶۱۴) زیرا دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 6\end{bmatrix}$ (ستون‌ها: $x_1\ x_2\ x_3$) صفر نیست؛ نتیجه می شود آن بردار ها مستقلند پایان مثال ▲

۱-۱۷-۲ طول بردار

همانطورکه از جبر خطی می دانید طول برداری‌که ابتدای آن مبدا و انتهای آن نقطه $x=(x_1,\ldots,x_n)'$ باشد و با $\|x\|$ نشان می‌شود برابر است با: $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

۱-۱۷-۳ تعریف نقطه منظم(regular)

برای تعریف نمودن نقطه غیر منفرد[۱] (منظم) در مساله غیر خطی(NLP) سه حالت تمیز می‌دهیم:

حالت ۱) مساله غیرخطی با محدودیت فقط تساوی $h_i(x)=0$ ،

حالت ۲) مساله غیرخطی با محدودیت $g_i(x)\leq 0$،

حالت ۳) مساله غیرخطی با تلفیق حالت ۱و۲

۱-۱۷-۳-۱ تعریف نقطه منظم درحالت ۱: در NLP با محدودیت فقط تساوی

در یک مساله غیرخطی NLP با محدودیت فقط تساوی $h_i(x)=0$

یک نقطه (بردار) شدنی $\bar{x}$منظم نامیده می‌شود اگر برای آن کلیه$\nabla h_i(\bar{x})$ ها مستقل خطی باشند (ص ۲۷۹برت سکاس,۱۹۹۹).

۱-۱۷-۳-۲ تعریف نقطه منظم درحالت۲: در NLP با محدودیت نا مساوی

نقطه(بردار) شدنی$\bar{x}$منظم نامیده می‌شود اگر در آن نقطه گرادیان توابع محدودیت های تساوی آور[۲] (يعـــني $(\nabla g_i(\bar{x}),\quad i\in I=\{i:\ g_i(\bar{x})=0\}$ مستقل خطی باشند (ص ۲۷۹برت سکاس,۱۹۹۹).

۱-۱۷-۳-۳ تعریف نقطه منظم درحالت ۳: در NLP با محدودیت تساوی و نا مساوی

نقطه شدنی $\bar{x}$ منظم نامیده می‌شود اگر گرادیان توابع محدودیت های تساوی آور در آن نقطه یعنی$\nabla g_i(\bar{x}),\quad i\in I=\{i:\ g_i(\bar{x})=0\}$ و گرادیان محدودیت‌های تساوی در آن نقطه یعنی تمام $\nabla h_i(\bar{x})$ها، تواماً مستقل خطی باشند (ص ۲۰۵بازاراو همکاران، ۲۰۰۶).

---

[۱] معادل داده شده برای regular point در سایت http://www.barsadic.com/

[۲] binding

در موارد فوق گاه گفته می شود شرایط صلاحیت محدودیتی مستقل خطی(LIQC[۱]) برقرار است

۱–۱۸ تعریف۳جهت: کاهش[۲] ، افزایش[۳] و نیوتنی

تعریف جهت کاهش

جهتی بنام جهت کاهش یا نزول در کتابها مورد استفاده قرار می گیرد که۲ تعریف ذیلاً برای آن ذکر می گردد:

تعریف۱ (ص ۱۳۳ مک کورمیک،۱۹۸۳)

بردار **d** از نقطهx واقع بر تابع f(x) ، یک جهت کاهش یا نزولی نامیده می شود اگر حاصلضرب اسکالر $\mathbf{d}^t \nabla f(\mathbf{x})<0$ یا $(\nabla f(\mathbf{x}))^t \mathbf{d}<0$.

برای وجه نامگذاری در این تعریف توجه کنید

طبق بسط تیلور،$f(x) \cong f(x_\circ) + \nabla f(x_o)^t(x - x_o)$؛ اگر بخواهد مقدارش در $x_۱ = x_\circ + \lambda d$ از مقدارش در x_oکمتر باشد (λ یک عدد اسکالر است)

باید $f(x_۱) - f(x_o) = \nabla f(x_o)^t(x_۱ - x_o) < \cdot$

لذا $\nabla f(x_o)^t \lambda d < \cdot$ یا $\nabla f(\boldsymbol{x_o})^t \boldsymbol{d} < \cdot$ (رائو ،۱۹۹۶ ص۱۶۴).

تعریف۲ (ص ۳۸۴ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)

بردار **d** از نقطه**x** ، واقع بر تابع f(x) ، یک جهت کاهش نامیده می شود اگر

$$\lim_{\lambda \to \cdot^+} \frac{f(\mathbf{x}+\lambda d)-f(\mathbf{x})}{\lambda} < \cdot \quad .$$

مثال

۱– ۴۱ آیا $\boldsymbol{d} = -\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ در نقطه $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} ۱ \\ \sqrt{۳} \end{pmatrix}$ جهتی کاهشی برای $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲}$ است؟

حل

---

[۱] Linear Independence Constraint Qualification

[۲] descent direction= direction of descent

[۳] ascent direction= direction of ascent

بررسی **تعریف** اول:

$$\nabla f\ (x_۱,x_۲)=\frac{۱}{\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲}}\begin{pmatrix}x_۱\\x_۲\end{pmatrix}$$

$$\nabla f\ (\bar{x})=\nabla f\ (۱,\sqrt{۳})=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\\sqrt{۳}\end{pmatrix}$$

$$d^t\,\nabla f(\bar{\mathbf{x}})=(-۱\ \ -\sqrt{۳}\ )\begin{pmatrix}\frac{۱}{۲}\\\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{pmatrix}=-۲<۰$$

چون شرط تعریف بر قرار است پس جواب مساله برای بردارd مثبت است.

بررسی **تعریف** دوم:

حال ببینیم آیا شرط تعریف دوم هم برای جهت $d=\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ در نقطه $\bar{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ برقرار است یا نه یعنی آیا

$$\lim_{\lambda\to 0}\ \frac{f\ (\mathbf{x}+\lambda\ d\ )-f\ (\mathbf{x})}{\lambda}<0$$

$$\mathbf{x}+\lambda d\ =\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda\\\sqrt{3}-\lambda\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$f\ (\mathbf{x}+\lambda d\ )=\sqrt{(1-\lambda)^2+\left(\sqrt{3}-\lambda\sqrt{3}\right)^2}$$

$$f\ (\mathbf{x})=f\ \left(1,\sqrt{3}\right)=\sqrt{1+3}=2$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\ \frac{f\ (\mathbf{x}+\lambda d\ )-f\ (\mathbf{x})}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\sqrt{(1-\lambda)^2+\left(\sqrt{3}-\lambda\sqrt{3}\right)^2}-2}{\lambda}$$

با افزایش λ به سمت صفرِ مثبت حاصل رادیکال در صورت کمتر از ۲ می‌شود. لذا حاصل صورت منفی و حاصل کسر نیز منفی خواهد شد. پس در تعریف دوم هم صدق می‌کند و طبق این تعریف هم $d=\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ جهتی کاهشی(نزولی) است. پایان مثال ▲

تعریف جهت افزایش

بردار $\boldsymbol{d}$ از نقطه $\boldsymbol{x_o}$ بر تابع **f(x)**، یک جهت افزایشی نامیده می شود. اگر برای حاصلضرب اسکالر بردار $\boldsymbol{d}$ و گرادیان در $\boldsymbol{x_o}$: $\nabla f(x_\circ)^t.\mathbf{d} > ۰$ یا $\boldsymbol{d}^t.\nabla \mathrm{f}(\boldsymbol{x_o}) > ۰$.

تعریف جهت نیوتنی

اگر f تابعی از x در فضای n بعدی باشد، چهت $d = -[H(\mathbf{x})]^{-1} \nabla f\,(\mathbf{x})$ گاه جهت نیوتنی در **x** نامیده می شود. واضح است که درتابع ۱متغیره باشد. $d = -\frac{f'(x)}{f''(x)}$

۱–۱۹ یاد آوری بسط تیلور تابع

چون بسط تیلور در برخی الگوریتم ها کاربرد داشته ویا برای یافتن تقریب خطی توابع غیر خطی از آن می توان کمک گرفت ذیلاً این بسط یادآوری می شود.

برای تابع چند متغیره f(**x**) بسط تیلور تابع حول نقطه **x=x'** چنین است:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}') + \frac{۱}{۱!}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}') + \frac{۱}{۲!}(x - x')^{\mathrm{T}} \mathrm{H}(\boldsymbol{x}')(x - x') + \cdots$$

که درآن $\nabla f(\boldsymbol{x}')$ و $\mathrm{H}(\boldsymbol{x}')$ به ترتیب گرادیان و هشیان تابع f در نقطه x' است

وبه طور جزیی تر:

بسط تابع یک متغیره حول a

$$f\ (x) = f\ (a) + \frac{1}{1!}(x - a) f\,'(a) + \frac{1}{2!}(x - a)^2 f\,''(a) + \dots$$

بسط تابع دو متغیره حول a,b

$$f\ (x, y) = f\ (a, b) + \frac{1}{1!}\left[(x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f\ (x, y)\Big|_{x = a,\, y = b}$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x - a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (y - b)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2(x - a)(y - b)\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\right] f\,\Big|_{x = a, y = b} + \dots$$

بسط تابع سه متغیره حول a,b, c

$$f\,(x,y,z) = f\,(a,b,c) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial}{\partial z}\right] f\,(x,y,z)\Big|_{x=a, y=b, z=c} + \dots$$

۱–۲۰ تعریف برنامه ریزی محدب

در مساله مقید زیر

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Min} Z = f(\mathbf{x}) \\
&\quad \text{s.t} \\
&\qquad g_i(\mathbf{x}) \le 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,\ell \\
&\qquad \mathbf{x} \in X \ (\text{زیر مجموعه } R^n) \\
&\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n
\end{aligned}
$$

اگر f و g_i ها محدب و h_i ها خطی باشند مساله محدب نامیده می شود(اقتباس از راردین،۱۹۹۸).

شایان ذکر است که

-یکی از ویژگی های مسائل برنامه ریزی محدب اینست که اگرنقطه ای یافت شود که نقطه بهینه نسبی آن باشد نقطه بهینه مطلق آن نیز می باشد.

-چون توابع خطی را می توان محدب دانست برنامه ریزی خطی(LP)نوعی برنامه ریزی محدب است؛ در ضمن یافتن یک جواب شدنی اولیه در شرایط مناسبی از تحدب، از طریق حل یک مسأله LP در مراجعی نظیر بازاراو همکاران(۲۰۰۶) ص ۲۹۶توضیح داده شده است.

۱–۲۱ معرفی ۲رویکرد در بهینه سازی: جستجوی خطی وجستجوی ناحیه اعتماد

در بهینه سازی اساس تعداد زیادی از الگوریتم‌های بهینه سازی توابع را جستجو تشکیل می دهدو در این رابطه به ۲ راهبرد که اصطلاحاً جستجوی خطی و جستجوی ناحیه اعتماد دارند بر خورد می شود به طوری که در ادبیات بهینه سازی، روشهایی مانند الگوریتم جستجوی خطی[1] الگوریتم های ناحیه اعتماد (اطمینان)[2] و الگوریتم های نقطه درونی معرفی می شود و باگاه الگوریتم هایی ارائه می شود که ترکیبی از آنهاست مانند "الگوریتم نقطه درونی با گام های ترکیبی جستجوی خطی و ناحیه

[1] line search

[2] trust region

اعتماد برای بهینه سازی غیر خطی" (رجوع کنید به خواجویی ،۱۳۹۰). لذا درخاتمه این فصل اجمالاً این دو رویکرد تعریف می شوند.

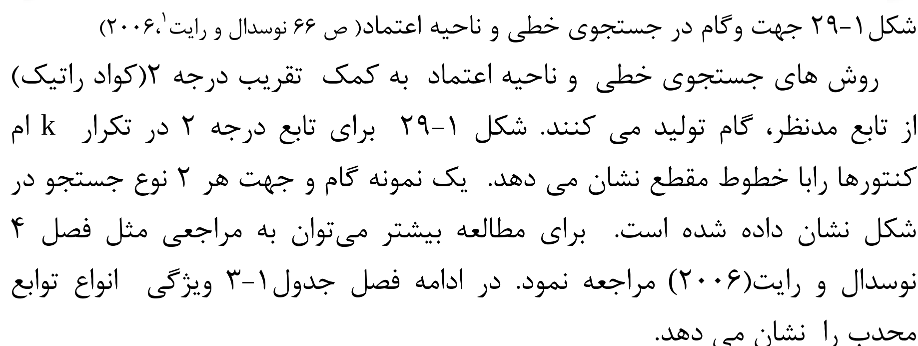
در بهینه سازی یک متغیره به فرآیند جسنجوی نقطه مینیمم کننده تابع بر روی یک خط مفروض، جستجوی خطی گفته می شود.(اقتباس از لیون برگر + یی،۲۰۱۶ ص۲۱۳). وبه طور کلی منظور از الگوریتم های جستجوی خطی در کمینه سازی الگوریتمهایی است که در هر تکرار از جهت های کاهشی با یک گام مناسب و منطقی برای کمینه سازی توابع استفاده می کند. جهت کاهشی می تواند جهتی مانند جهت بیشترین کاهش یا جهت نیوتنی یا شبه نیوتنی باشد. در کتاب حاضر از چند الگوریتم دارای عنوان جستجوی خطی برای کمینه سازی مسایل غیر مقید استفاده شده است. نمونه این روشها روش بیشترین کاهش(SD) وروش نیوتن است. .

منظور از الگوریتم های جستجوی ناحیه اعتماد الگوریتم‌هایی است که هر تکرار آن عمدتاً مبتنی بر تقریب تابع وجستجو در داخل داخل یک ناحیه است. در این رابطه برای توضیح بیشترذیلاً نقل قول‌های از۲ پایان نامه آورده می شود.

"تاکنون روشهای زیادی برای مسایل ماکزیمم سازی یا مینیمم سازی معرفی شده اند. از جمله این روش ها می توان به روشهای نیوتن، شبه نیوتن (همراه با جستجوی خطی)، ناحیه اعتماد و اخیرا نقطه درونی اشاره کرد... در روش جستجوی خطی، ابتدا یک جهت کاهشی، یعنی جهتی که تابع هدف در این راستا کاهش می یابد، پیدا می شود؛ سپس در تکرار جدید، حرکت در امتداد این جهت، به اندازه ای مناسب صورت می گیرد. این مقدار حرکت طول گام نامیده می شود"(اخوان، ۱۳۸۹). به منظور موفقیت نه تنها باید طول گام خوبی برای روش انتخاب شود، بلکه تعیین جهت مناسب جستجو نیز موثر است.[۱]

" روش های ناحیه اعتماددر هر تکرار، از اطلاعات تکرار جاری استفاده می کنند، به این صورت که در تکرار k ام با در نظر گرفتن یک ناحیه به شعاع Δ_k حول نقطه X_k، تابع f را در این ناحیه تقریب می زنند" (اسکروچی، ۱۳۷۴).

[۱] https://mahani.uk.ac.ir/documents/۱۰۰۰۲۶۲/۱۲۲۰۵۳۲/presentation٪۲۰hoseani٪۲۰mehdi.pdf



شکل۱-۲۹ جهت وگام در جستجوی خطی و ناحیه اعتماد(ص ۶۶ نوسدال و رایت[۱]،۲۰۰۶)

روش های جستجوی خطی و ناحیه اعتماد به کمک تقریب درجه ۲(کواد راتیک) از تابع مدنظر، گام تولید می کنند. شکل ۱-۲۹ برای تابع درجه ۲ در تکرار k ام کنتورها رابا خطوط مقطع نشان می دهد. یک نمونه گام و جهت هر ۲ نوع جستجو در شکل نشان داده شده است. برای مطالعه بیشتر می‌توان به مراجعی مثل فصل ۴ نوسدال و رایت(۲۰۰۶) مراجعه نمود. در ادامه فصل جدول۱-۳ ویژگی انواع توابع محدب را نشان می دهد.

ان مع العسر یسرا

امام صادق (ع)(تحف العقول) :

لیس من احد. و ان ساعدته الامور. بمستخلص غضارة عیش الا من خلال مکروه

هیچکس کامیابی وطراوت زندگی را جز از لابلای ناملایمات بدست نیارد هر چند اوضاع بروفق مراد ش باشد.

۱ Nocedal, & Wright

جدول ۱-۳ تعریف و شکل چند نوع تجدب

نوع تابع		تعریف: شرط x_2x_1,	تعریف: رابطه	نمونه شکل تابع	ملاحظات	مرجع
Convex	محدب	$\forall\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C,$ C یک مجموعه غیر تهی محدب	$f[\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)$ $0 \le \lambda \le 1$	(ص ۳۷۷ کتاب تحقیق پیشرفته، مرحوم دکتر اصغر پور،۱۳۸۱)		بازارا(۲۰۰٦)،ص ۷٦۸
Strictly Convex	محدب اکید	$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ $\forall\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C,$ C یک مجموعه غیر تهی محدب	$\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2]$ $(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)$ ≤ 1	(ص ۳۷۷ کتاب تحقیق پیشرفته، مرحوم دکتر اصغر پور،۱۳۸۱)		

جدول ۱-۳ تعریف و شکل چند نوع تجدب

نوع تابع		تعریف: شرط x_1,x_2	تعریف: رابطه	نمونه شکل تابع	ملاحظات	مرجع
pseudo-convex	محدب گونه	C یک مجموعه غیر تهی محدب باز $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C,$ $f(\mathbf{x}_1) \ge f(\mathbf{x}_2)$ $\nabla f(x_1)^t \times (x_2 - x_1) \ge 0$ یا بطورمعادل اگر $f(x_2) < f(x_1)$ آنگاه $\nabla f(\mathbf{x}_1)^t (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) < 0$		محدب گونه؛ هم شبه محدب و هم محدب گونه؛ نه شبه محدب و نه محدب گونه؛ نقطه عطف	-توسعه و تعمیم محدب است (ص۲۶۵ آوریل۲۰۰۳) -مینیمم موضعی، کلی هم می باشد	بازارا(۲۰۰۶)ص ۷۶۸

جدول ۱-۳ تعریف و شکل چند نوع تجدب

نوع تابع		تعریف: شرط x_1, x_2	تعریف: رابطه	نمونه شکل تابع	ملاحظات	مرجع
strictly pseudo convex	محدب گونه اکید	C یک مجموعه غیر تهی محدب باز $\forall \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in C,$ $\nabla f(x_1)^t \times (x_2 - x_1) \geq 0$	$f(\mathbf{x}_2)\geq f(\mathbf{x}_1)$ $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$	محدب گونه (سودو کنوکس) و محدب گونه اکید(گیورگیو و همکاران،۲۰۰٤) $f_1(x) = x^3 + x$	لزوماً- سودو کنوکس نیست	بازارا(۲۰۰٦)ص ۷٦۸

جدول ۱-۳ تعریف و شکل چند نوع تجدب

نوع تابع	تعریف: شرط x_1, x_2	تعریف: رابطه	نمونه شکل تابع	ملاحظات	مرجع
Quasi-convex شبه محدب	$\forall\ \mathbf{x}_1 . \mathbf{x}_2 \in C,$ C یک مجموعه غیر تهی محدب	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \le \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ $\lambda \in (0, 1)$	تابع کوازی کنوکسی که محدب هم است تابع کوازی کنوکسی که محدب نیست کوازی کنوکس غیر سودو کنوکس هم سودو کنوکس و هم کوازی کنوکس	-مینیمم موضعی، مینیمم کلی نمی باشد -گسستکی می تواند داشته باشد	

جدول ۱-۳ تعریف و شکل چند نوع تجدب

نوع تابع		تعریف: شرط x_1, x_2	تعریف: رابطه	نمونه شکل تابع	ملاحظات	مرجع
Strongly Quasi-convex	شبه محدب قوی	C یک مجموعه غیر تهی محدب $\forall\, x_1, x_2 \in C,\ x_1 \neq x_2$	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ $\lambda \in (0, 1)$	یک تابع شبه محدب (کوازی کنوکس) قوی (از ژی تر،۱۹۸۶) (a, f (a)) (b, f (b)) a b	این نوع تابع کوازی کنوکس هم می باشد	
Strictly Quasi- Convex	شبه محدب اکید	$\forall\, x_1, x_2 \in C,$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ C یک مجموعه غیر تهی محدب	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ $\lambda \in (0, 1)$	کوازی کنوکس اکید / کوازی کنوکس اکید، شبه محدب اکید / کوازی کنوکس اما نه کوازی کنوکس اکید	لزوماً- کوازی کنوکس نیست	

تمرینات

درمسایل زیر،ناحیه شدنی را مشخص و لااقل ۲ منحنی هم تراز تابع هدف را رسم و جواب مساله را تعیین کنید.

۱-(۱-۱-b ص ۲۴-۲۵ مک کورمیک،۱۹۸۳)

$$\begin{aligned}&\text{Max}\quad \log_3(-2x_1 + x_2)\\&s.t.\\&x_1^2 + x_2^2 \le 4 \qquad x_2 \ge 1 \qquad x_1 \le 0\end{aligned}$$

۲- (۱-۱-a ص ۲۴-۲۵ مک کورمیک،۱۹۸۳)

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ x^2 - y\\&s.t.\\&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x+y-1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \le 0.5\end{aligned}$$

راهنمایی: از شکل تابع چگالی توزیع نرمال استاندارد بهره بگیرید.

۳-(۱-۱-c ص ۲۴-۲۵ مک کورمیک،۱۹۸۳)

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ x_1 - x_2^2\\&s.t.\\&(x_1 - 1)(x_2 - 2) \ge 0\\&2 \le x_1 \le 4\end{aligned}$$

۴ -(۲-۱مک کورمیک ،۱۹۸۳ص ۲۵)

گرادیان و هشیان توابع زیر را بیابید. در مورد A شیب خط مماس بر کنتوری (منحنی هم ترازی) که از نقطه (۱و۱)می‌گذرد را بدست آورید(x_1 محور افقی است).

$A- \quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+e^{x_1+x_2}$

$B- \quad f(x_1,x_2,x_3)=\cos(x_1+x_2)+e^{-x_2}+x_1x_3$

$C- \quad f(x_1,x_2,x_3)=\tan(x_1x_2)+x_1^{x_3}$

۵-توابع زیر را درنظر بگیرید.

$$f(x)=(x_1\ x_2\ \ x_3)^t\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$g(x)=(x_1\ x_2\ \ x_3)^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+(۱\quad ۲)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+۵۰$$

آیا توابع محدبند؟

۶- با تست بحث ۱-۱۱-۱ ونیز تست نحدب تابع دومتغیره که در بحث ۱-۹-۲ ذکر شد در مورد تحدب تابع $f(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2-5$ اظهار نظر کنید.

۷-نشان دهید $f(x)=ax+b$ هم محدب است و هم مقعر.

۸- آیا توابع زیر محدبند؟

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad x>0 \quad , f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+2x_2^2+3x_3^2-4x_1-4x_2x_3 \quad ,$$

۹- آیا بردار های $\mathbf{x}_۳=(۲,۵,۶)'$ $\mathbf{x}_۲=(۰,۱,۱)'$ $\mathbf{x}_۱=\begin{pmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{pmatrix}$ هم خط می باشند؟

۱۰ –(ص۱۲۸، ۱۹۷۵ Sivaz&Stanfel) ویژگی شبه تحدب(Quasiconvexity)، را که از توان کمتری نسبت به تحدب برخور داراست، می توان چنین هم تعریف نمود تابع f روی مجموعه غیر تهی محدب X در R^n شبه محدب(کوازی کنوکس)است اگر مجموعه $X = \{x|f(x) \leq a\}$ برای تمام مقادیر حقیقی a محدب باشد. یا به طور معادل برای تمام $0 < \lambda < 1$ وتمام $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \leq \max\{f(x_1), f(x_1)\}$$

حال نشان دهید تابع x^3 شبه محدب(کوازی کنوکس) است. آیا محدب گونه(سودو کنوکس) هم می باشد؟

جواب(از کم بینی و مارتِین[1]،۲۰۰۸ ص۴۹ و سایت مث ورلد[2]) :

اکیداً شبه محدب است اما محدب گونه نیست.

راهنمایی: اگر ثابت کنید برای تنها یک نقطه هم مثل $\mathbf{x}_2 < 0, \mathbf{x}_1 = 0$ تعریف محدب گونه (,+* ()&%$# "!) بودن صادق نیست، تابع محدب گونه نیست.

۱۱ -(آوریل،۱۹۷۶ ص۱۷۹ آوریل،۲۰۰۳ ص۳۱۳)

الف)بافرض $f(x) = -(x)^2 - x$ on $X = \{x : x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$ نشان دهیدکه تابع f محد ب گونه اکید(سودوکنوکس اکید) است. آیا شبه محد ب(کوازی کنوکس) قوی هم می باشد؟

ب)حال نشان دهید $f(x) = -x^2$ روی همان مجموعه X تعریف شده در قسمت الف سودو کنوکس نمی باشد. آیا تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)می باشد؟

۱۲ -مساله یک متغیره زیر را در نظر بگیرید

$$Min \quad Z = x^2$$
$$s.t.$$
$$(x-1)^2 \leq 1$$

---

[1] Cambini, Martein

[2] https://mathworld.wolfram.com/PseudoconvexFunction.html

مطلوبست الف)تعیین ناحیه شدنی ب) جواب بهینه ازراه ترسیمی

۱۳ –مطلوبست رسم چند منحنی هم تراز تابع $Z = \frac{1}{x^2+y^2}$

۱۴-نشان دهید توابع زیر طبق تعریف محدبند

$f(x)=|x|$, $f(x)=3x+4$ ونیز (ص ۹۸ بازارا و دیگران ،۲۰۰۶)

$f(x)=x^2-2x$ $f(x)=-\sqrt{x} \quad x\geq 0$

۱۵ –(ار جزوه کلاسی دکترترابی دانشگاه صنعتی شریف)

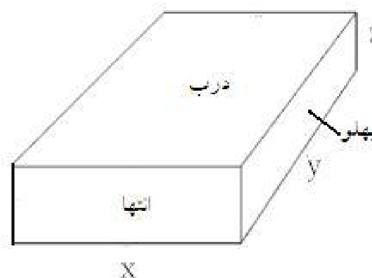
یک شرکت واردات و فروش یک ماده شیمیایی علاقه مند است که ابعاد یک نوع جعبه طوری طراحی شود که مجموع هزینه بسته بندی و حمل این ماده در ماه مینیمم و شرایط زیر رعایت شود:

الف) مقدار ماده لازم در هر ماه هزار اینچ مکعب است

ب) شکل جعبه‌ها مکعب مستطیل و مجموع سطع دو پهلو و سطع زیر آن حداکثر ده اینچ مربع باشد.

ج) هزینه جنس پوشش دو انتها برابر ۲۰۰ واحد پول در هر اینچ مربع بوده و جنس پوشش درب جعبه هزینه ای برابر ۳۰۰ واحد پول در هر اینچ مربع دارد. هزینه جنس پوششِ دو پهلو و زیر قابل اغماض است.

د) کرایه حمل هر جعبه ۲۰۰ واحد پول است



مطلوبست مدل این مساله. جواب:

$$Min \frac{200000}{xyz} + \frac{400000}{y} + \frac{300000}{z} \quad , \quad xy + 2yz \leq 10 \, , \quad x,y,z > 0$$

۲

بهینه سازی غیر خطی تک متغیره بدون محدودیت



بهینه سازی غیر خطی یک متغیره بدون محدودیت[۱]

هدف فصل

در این فصل هدف این است که چند الگوریتم بهینه‌سازی توابع تک متغیره غیرخطی در غیاب محدودیت توضیح داده شود.

۲-۱ مقدمه

گرچه استفاده مستقیم از مشتق در بهینه سازی توابع غیر خطی یک متغیره امری معمول است ولی همواره حل از این طریق کار گشا نیست. لذا الگوریتمهایی برای بهینه سازی توابع یک متغیره غیر خطی که یا از مشتق استفاده نمی‌کنند یا به طور غیر مستقیم در یافتن ماکزیمم یا مینیمم استفاده می کنند توسط پژوهشگران ارائه شده است و این فصل بآنها اختصاص داده شده است.

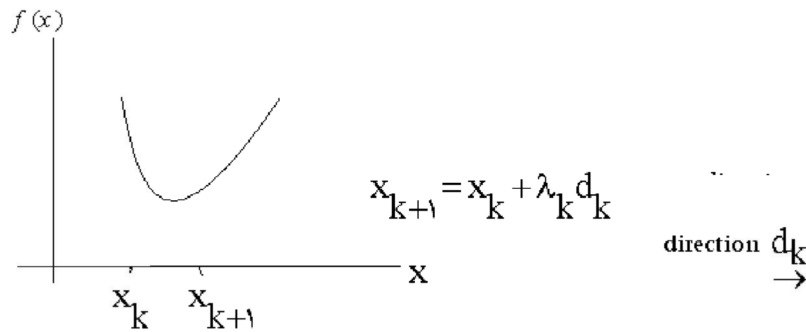
شایان ذکر است که این الگوریتمها ی جستجو، اساس بسیاری از الگوریتمهای بهینه سازی غیرخطی را تشکیل می دهد توضیح اینکه بسیاریی از الگوریتم های بهینه سازی غیرخطی چنین عمل می کنند(ص۳۴۴ بازارا و همکاران،۲۰۰۶):

با داشتن یک نقطه اولیه مثل X_K، یک بردار جهت مثل d_k یافته و باطول گام مناسب λ_kنقطه جدید $x_{k+1}=x_k+\lambda_k d_k$ را بدست آورده(شکل ۲-۱) فرایند تکرار می‌گردد. یافتنλ_k

---

[۱] Single-variable, Unconstrained Nonlinear Programming

شامل حل مساله کمینه سازی $\min f(x_k + \lambda_k d_k)$ است که یک جستجوی یک بعدی در متغیر λ است این کمینه سازی بسته به الگوریتم ممکن است روی تمام مقادیر حقیقی λ باشد یا فقط مقادیر غیرمنفی یا λهایی که $x_k + \lambda d_k$ را شدنی می‌سازد در برگیرد.



شکل۲-۱ نقطه تکرار k ام و (k+۱) ام

حال این تابع یک متغیره $\theta(\lambda)$ را در نظر بگیرید که باید کمینه شود یک راه کمینه سازی اینست که مشتق تابع یعنی θ' را صفر قرار دهیم و λ را از آن بدست آوریم. اما توجه کنید که غالباً θبه صورت تابعی مثل f ازچند متغیر است به ویژه با داشتن بردارهای $\mathbf{x}$و $\mathbf{d}$ در خیلی موارد θ به صورت زیر می باشد

$$\theta(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$$

اگر تابع f مشتق‌پذیر نباشد θ هم مشتق پذیرنخواهد بود. اگر تابع f مشتق پذیر باشد آنگاه ترانهاده بردار $\mathbf{d}$ را به d^t نشان داده وداریم :

$$\theta'(\lambda) = \mathbf{d}^t f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) \qquad (I)$$

برای یافتن یافتن آن مقدار λ که $\theta'(\lambda)$ را صفر می‌کند: بایدمعادله $d^{\,t} f(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{d}) = ۰$ حل شود که غالباً غیر خطی بر حسب λ است وحل آن گاه ساده نیست و به علاوه λ حاصل از $\theta'(\lambda)$ لزوماً مینیمم مطلوب نبوده و می‌تواند مینیمم موضعی یا نقطه دیگری موسوم به نقطه زینی[1] باشد. لذا عموماً بجز موارد

[1] با نقطه زینی در فصل ۳ آشنا خواهید شد

خاص از صفر قرار دادن مشتق اجتناب و در عوض از تکنیک‌های عددی برای مینیمم کردن تابع θ استفاده می‌شود"(پایان نقل از بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص۳۴۴).

ذیلاً یک مثال برای درک رابطه I فوق الذکر در حالت یک متغیره ذکر می شود، فرض کنید $f(x)=x^2$. طرف چپ رابطه I با توجه به :

$$\theta(\lambda)=f(x+\lambda d)=(x+\lambda d)^2$$

چنین است:

$$\text{طرف چپ} = \theta'(\lambda)=2d(x+\lambda d)$$

برای یافتن طرف راست رابطهI یعنی $d^t\nabla f(\mathbf{X}+\lambda d)$ توجه کنید:

$$f'(x)=2x \qquad f'(x+\lambda d)=2(x+\lambda d)$$

$$\text{طرف راست} = d\times 2(x+\lambda d)$$

لذا دیده می شود که رابطه I بر قرار است.

۲–۱–۱تعریف بازه عدم قطعیت

در مساله کمینه سازی تابع $\theta(\lambda)$ مشروط برآنکه $a\le\lambda\le b$ باشد، بازه $[a\ b]$ بازه عدم قطعیت نام دارد: زیرا مشخص نیست که آن مقدارλکه تابع را مینیمم می‌کند درکجای این بازه است در حین جستجو برای یافتن جواب اگر بتوانیم بخش‌هائی ازاین بازه را حذف کنیم بازه عدم قطعیت کاهش می‌یابد. به کمک قضیه زیر می‌توان بازه عدم قطعیت راکاهش داد.

قضیه ۲–۱

ص ۳۴۵ بازارا و همکاران(۲۰۰۶)

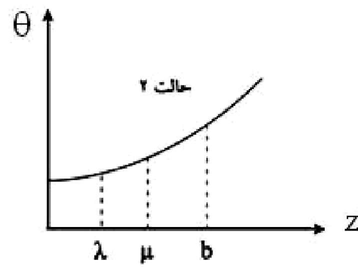
فرض کنید تابع $\theta(z):R\to R$ در فاصله $[a\ b]$ شبه محدب(کوازی کنوکس) اکید باشد و μ,λ ۲ مقدار متعلق به فاصله $[a\ b]$ باشد به طوری که $\lambda<\mu$ حال

حالت۱) اگر $\theta(\lambda)>\theta(\mu)$ آنگاه $\theta(z)\ge\theta(\lambda)$ برای تمام $z\in[a,\lambda]$.

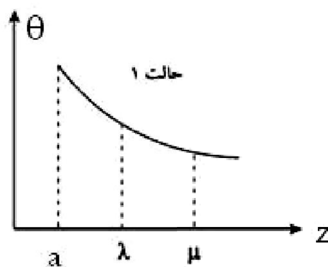
حالت ۲) اگر $\theta(\lambda)\le\theta(\mu)$ آنگاه $\theta(z)\ge\theta(\mu)$ برای تمام $z\in(\mu,b]$.

پایان قضیه■

شکل های ۲- ۳ و ۲-۴ این دو حالت را به طور هندسی نشان می دهد.



شکل ۲-۳ حالت۲در قضیه ۲-۱



شکل ۲-٤ حالت۱در قضیه ۲-۱

۲-۱-۲ معیار کارائی روش‌های جستجوی خطی

برای مقایسه روش‌های جستجوی خطی، نسبت کاهش تعریف شده در زیر مورد استفاده واقع می‌شود(براساس بازارا و همکاران،۲۰۰۶ ص۳۴۹):

$$\text{معیارکا رایی}\ E = \frac{L_{\upsilon}}{L_{0}} \leq 1$$

که در آن

L_{υ} طول بازه عدم قطعیت بعد از اخذ υ مشاهده

L_{0} طول بازه عدم قطعیت اولیه قبل از شروع به مشاهده

هرچه این نسبت کمتر باشد کارائی بیشتر است. منظور از مشاهده محاسبه تابع در یک نقطه است.

روشهای‌جستجوی فاقد استفاده ازمشتق برای تابع۱ متغیره بدون محدودیت

در این قسمت چند روش جستجو که از مشتق برای کمینه سازی توابع یک متغیره در محدوه بسته استفاده نمی کند تشریح می شود. این روش ها دو گروهند (ص ۳۴۶ بازاراو همکاران،۲۰۰۶و Sivazlian&Stanfel۱۹۷۵ ص ۳۴۴):

روش های جستجوی همزمان[1] نقاط

روش های جستجوی ترتیبی[2] نقاط

[1] Simultaneous search

[2] Sequential search

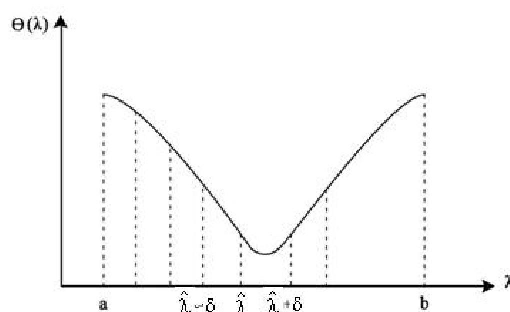
در نوع اول تعدادی نقطه ازقبل تعیین و از نتایج مشاهدات در یافتن نقاط بعد استفاده نمی‌شود. در نوع دوم مقادیر تابع در دورهای قبلی برای تعیین نقاط بعدی بکار می رود.

۲–۲ روشهای جستجوی همزمان(Simultaneous Search)

در روشهای موسوم به جستجوی با هم یا همزمان چند نقطه ازقبل مشخص و مقادیر تابع در آن نقاط تعیین شده و به کمک این مقادیر در مورد نقطه بهینه اظهار نظر می گردد. از جمله روشهای جستجوی همزمان، جستجوی یکنواخت می‌باشد که ذیلاً با آن آشنا می شوید.

۲–۲–۱ جستجوی یکنواخت [1]

فرض کنید $\theta(\lambda)$ یک تابع تک کوهانه [اکید][2] مانند شکل۲-۵ است که بدنبال یافتن مینیمم آن در بازه $[a=a_1 \quad b=b_1]$ می باشیم.



شکل ۲-۵ شکل تابع تک کوهانه برای جستجوی یکنواخت

در جستجوی یکنواخت یک سری نقطه از قبل در فاصله عدم قطعیت $[a_1 \quad b_1]$ مشخص می‌کنیم به طوری که $[a_1 \quad b_1]$ به تعدادی زیر فاصله با طول مساوی δ تقسیم گردد.



شکل۲- ۶ تقسیم بازه $[a_1 \quad b_1]$ به تعدادی زیر فاصله با طول مساوی δ

[1] Exhaustive search(Sivazlian&Stanfel,۱۹۷۵ ص ۳٤۷)

[2] تک کوهانه اکید با شبه محدب(کواز ی کنوکس) اکید هم ارز است(بازارا، ۲۰۰٦ص ۳٥٦)

نقاط بینابینی را با $a_1+k\delta$, $k=1,2,\ldots,v$ نشان می‌دهیم. مقدار تابع θ را در تمام این v نقطه بینابینی بدست می‌آوریم. فرض کنید ازبین این نقاط، $\hat{\lambda}$ نقطه‌ای بینابینی باشد که کمترین مقدار θ دارد. اگر تابع شبه محدب (کوازی کانوکس) اکید (بازارا و دیگران؛ ۲۰۰۶ ص ۳۴۶) باشد می‌توان نشان داد که مینیمم تابع θ در همسایگی δ از $\hat{\lambda}$ یعنی بازه $\hat{\lambda}\pm\delta=[\hat{\lambda}-\delta \quad \hat{\lambda}+\delta]$ اتفاق می‌افتد(بازارا و دیگران، ۲۰۰۶ ص۳۴۶ و Sivazlian&Stanfel۱۹۷۵ ص۳۴۷)

۲-۲-۱-۱ انتخاب تعداد نقاط و طول زیرفاصله ها(δ)

اگر تعداد نقاط بینا بینی را به v نمایش دهیم فاصله عدم قطعیت اولیه $[a_1 \;\; b_1]$ بعد از ارزیابی مقدار تابع درنقاط حاصله به فاصله‌ای با طول 2δ کاهش می یابد از آنجا که $\delta(v+1)=b_1-a_1$،پس طول هر زیرفاصله از $\delta=\frac{b_1-a_1}{v+1}$ بدست می‌آید. در ضمن تعداد نقاط بینابینی برابراست با(بازاراو دیگران، ۲۰۰۶ ص۳۴۶): $v=[\frac{b_1-a_1}{\delta}]-1$

منظور از $[\frac{b_1-a_1}{\delta}]$ جزء صحیح حاصل کسر $\frac{b_1-a_1}{\delta}$ است .

شایان ذکر است که از نسبت $\frac{1}{v+1}$ گاه با عنوان دقت یاد می شود و اگر طول فاصله نهائی عدم قطعیت کوچکتر (دقت زیادتر) بخواهیم باید v بزرگتر انتخاب گردد. تکنیکی که غالباً استفاده می‌شود تا محاسبات را کم کند این است که ابتدا از δ بزرگ و سپس از δ کوچکتر استفاده می گردد .

اگر نقطه میانی بازه عدم قطعیت نهائی به طور تقریبی به عنوان نقطه بهینه گرفته شود ماکزیمم انحراف برابر $\frac{1}{v+1}$ ضربدر طول فاصله اولیه (b_1-a_1)است. بنا براین برای یافتن نقطه بهینه در فاصله فرضاً ۰/۱۵ مقدار دقیق، باید رابطه $\frac{b_1-a_1}{v+1}\leq 0/15$ برقرار باشد

مثال۲-۱ مطلوب است مقدار مینیمم تابع $f(x)=x(x-1,5)$ در فاصله (۰،۱) با حداکثر انحراف ۰/۱ از مقدار واقعی.

حل:

$$\delta=\frac{b_1-a_1}{\nu+1} \quad \delta\leq 0/1 \Rightarrow \frac{1-0}{\nu+1}\leq\frac{1}{10}\Rightarrow \nu\geq 9$$

توجه کنید با $\nu=9$ داریم:

$$\delta(\nu+1)=b_1-a_1=1-0 \Rightarrow (9+1)\delta=1\Rightarrow \delta=0.1$$

با $\nu=9$ مقادیر متناظر تابع به ازای x_i طبق جدول زیر می باشد:

i	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	٩
x_i	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩
$f_i=f(x_i)$	=٠,١٤	٠,٢٦-	-٠,٣٦	=٠,٤٤	=٠,٥	=٠,٥٤	=٠,٥٦	-٠,٥٦	-٠,٥٤

با توجه به اینکه $f_8=f_7$ و به ازای۰/۹ مقدارتابع افزایش می‌ابد.پس بازه (۰/۸ ۰/۷) را به عنوان فاصله عدم قطعیت و مقدار میانی آن را ۰/۷۵ به عنوان نقطه اپتیمم در نظر میگیریم. پایان مثال ▲

مثال۲-۲ مطلوبست مقدار بهینه تابع $Min\ \theta(\lambda)=\lambda^2+\frac{54}{\lambda}$ دربازه.$[0\ \ 4]$

حل

δ را بدلخواه ۰/۵ اختیار می‌کنیم نقاط بینابینی چنین می‌شود.

λ	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	٤
$\theta(\lambda)$	∞	۱۰۸/۲۵	۵۵	۳۸/۲۵	۳۱	۲۷/۸۵	۲۷	۲۷/٦۸	۲۹/۵

از بین این نقاط کمترین مقدار $\theta(\lambda)$ها متعلق به $\hat{\lambda}=3$ است؛ پس می‌گوئیم مینیمم تابع در فاصله عدم قطعیت $3\pm\delta$یا $[3-0.5\quad 3+0.5]$ قرار دارد.

حال می‌توان فاصله اخیر را به تعدادی زیر فاصله با طول $\delta=0/1$ تقسیم نمود و عملیات بالا را تکرار کرد. تعداد نقطه بینابینی برابرمقدار زیر می گردد

$: \nu = [\frac{b_1 - a_1}{\delta}] - 1 = [\frac{3/5 - 2/5}{0.1}] - 1 = \frac{1}{0.1} - 1 = 9$

در این مرحله، هم پس از عملیات لازم باز $\hat{\lambda} = 3$ می‌شود پس مینیمم در بازه $\underset{3\pm0.1}{[2.9 \quad 3.1]}$قرار دارد.

حال می توان طولی مثل $\delta = 0.05$ برای بازه ها انتخاب و جستجوی جدیدی انجام داد:

λ	۲/۹	۲/۹۵	۳/	۳/۰۵	۳/۱
$\theta(\lambda)$	۲۷/۰۳	۲۷/۰۰۷	۲۷/۰۰	۲۷/۰۰۷	۲۷/۰۳

مینیمم تابع در فاصله عدم قطعیت3 ± 0.05یا $[3-0.05 \quad 3+0.05]$ قرار دارد.

گاه در این نوع جستجو با انتخاب سه نقطه یک حد پائین روی متغیر اعمال می‌شود که مراحل آن، چنین تشریح می شود:

۲-۲-۱-۲ الگوریتم جستجوی ۳ نقطه-۳ نقطه

الگوریتم ۳ نقطه-۳ نقطه ، همه nنقطه(شامل ابتدا و انتها) را با هم ارزیابی نمی‌کند بلکه درهر تکرار۳نقطه را بررسی نموده و سپس یکی را حذف و یک نقطه جدید اضافه می کند.

گام ۱

$$x_1 = a \quad x_2 = x_1 + \delta \quad x_3 = x_2 + \delta, \quad \delta = \frac{b-a}{n-1} \quad ,$$

گام۲

اگر $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$ یعنی اگر $f(x_2)$ از $f(x_1), f(x_3)$بزرگتر نباشد، نقطه مینیمم بین (x_1, x_3)است، متوقف شوید. در غیر اینصورت قرار دهید:

$x_1 \xleftarrow{\text{قدیم}} x_2$ و $x_2 \xleftarrow{\text{قدیم}} x_3$ و $x_3 \leftarrow x_2 + \delta$,

گام۳

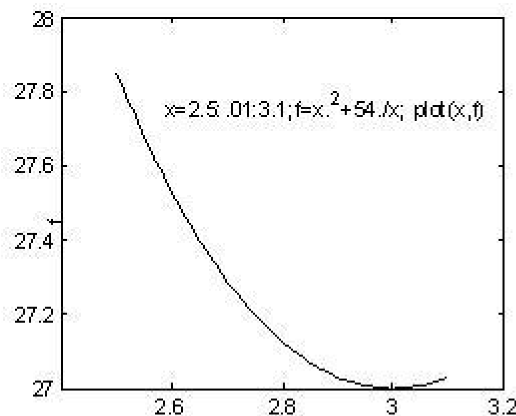
آیا $x_3 \leq b$؟ اگر جواب مثبت است به گام۲ بروید. در غیراینصورت مینیمم در فاصله $(a \quad b)$ وجود ندارد، یا یکی از نقطه‌های مرزی یعنی a یا b جواب است.

مثال۲-۳ (ترجمه یک مثال برای الگوریتم جستجوی یکنواحت توابع یک کوهانه)

مطلوبست حل $۰ \le x \le ۵$ $\min f(x) = x^{۲} + \frac{۵۴}{x}$ با روش فوق.

حل

این مساله حل دقیق **دارد** وهمانطور شکل زیر که به کمک متلب با دادن تابع به فرم x.^۲+۵٤./x رسم شده نشان می دهد$x^*=۳$.



اما با روش جستجو مطابق الگوریتم ۳ نقطه ای فوق الذکر :

تعداد نقاط بین $۰\le x\le ۵$ را ۹ می‌گیریم لذا تعداد همه نقطه ها (شامل ابتدا و انتها) برابر n=۱۱ می گردد.

گام۱

$$x_{۱} = ۰ \qquad \delta = \frac{۵-۰}{۱۱-۱} = ۰/۵ \qquad f(x_{۱}) = \infty$$

$$x_{۲} = ۰+۰/۵ = ۰/۵ \qquad f(x_{۲}) = ۱۰۸/۲۵$$

$$x_{۳} = ۰/۵+۰/۵ = ۱ \qquad f(x_{۳}) = ۵۵$$

$$f(x_{۱}) > f(x_{۲}) > f(x_{۳})$$

شرط گام ۲ برقرار نیست و مینیممم تابع بین ۱و۰ قرار ندارد.

$$x_{۱} = ۰/۵ \quad x_{۲} = ۱ \quad x_{۳} = ۱/۵$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$f = ۱۰۸/۲۵ > f = ۵۵ > f = ۳۸/۲۵$$

شرط برقرار نیست . مینیمم بین (۰/۵ ۱/۵) قرار ندارد حد پایین روی x برابر۱ قرار می گیرد.

این فرایند را تا آنجا تکرار کنید که

$$x_۱ = ۲/۵ \qquad x_۲ = ۳ \qquad x_۳ = ۳/۵$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$f: ۲۷/۸۵ \quad > \quad ۲۷ \quad < \quad ۲۷/۶۸$$

جواب بین [۳/۵ ۲/۵] است. اگر دقت بیشترخواسته شود به تقسیمات بیشتر بخش کنید یعنی تعدادنقاط را افزایش دهید ویا زیر فاصله نهایی بدست آمده را مجدداً تقسم کنید. نتایج تمام تکرار ها در جدول زیر داده شده است

جدول ۲-۱ تمام نتایج تکرار های مثال۲-۳

تکرار	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$f(x_۱)$	$f(x_۲)$	$f(x_۳)$	شرط گام ۲ برقرار است؟	
							خیر	بله
۱	۰	۰/۵	۱	∞	۱۰۸/۲۵	۵۵	×	
۲	۰/۵	۱	۱/۵	۱۰۸/۲۵	۵۵	۳۸/۲۵	×	
۳	۱	۱/۵	۲	۵۵	۳۸/۲۵	۳۱	×	
٤	۱/۵	۲	۲/۵	۳۸/۲۵	۳۱	۲۷/۸۵	×	
۵	۲	۲/۵	۳	۳۱	۲۷/۸۵	۲۷	×	
٦	۲/۵	۳	۳/۵	۲۷/۸۵	۲۷	۲۷/٦۸		✓

راه حل دوم (ارزیابی همزمان تمام نقاط)

راه دوم اینست که برای تمام نقاط (۰, ۰/۵, ۱,.....,۳,. ۳/۵ ,۴ ,۴/۵ و۵) مقدار تابع محاسبه و نقطه با کمترین مقدار تابع مشخص شود که در این جا برابر $\hat{x}=۳$ می شود. مینیمم این تابع شبه محدب (کوازی کنوکس) اکید در بازه $۳\pm۰/۵$ رخ می دهد.

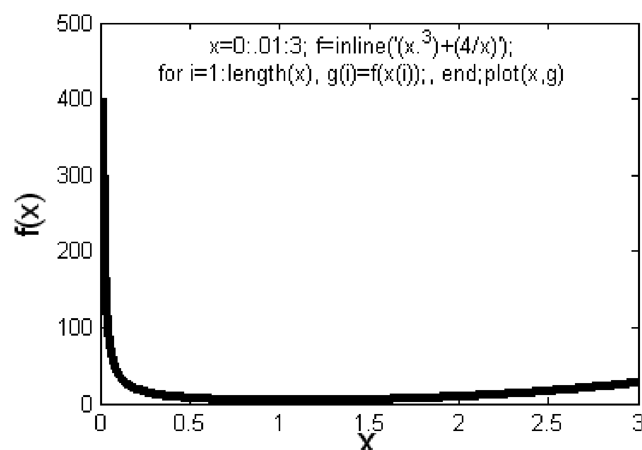
پایان مثال ▲

مثال۲-۴[1] مطلوبست رسم تابع $f(x)=x^{۳}+\frac{٤}{x}$ در فاصله $x\in[۰\ ۳]$ و یافتن مینیمم آن طی ۳ وهله به کمک جستجوی یکنواحت (ارزیابی همزمان تمام نقاط) با طول زیر فاصله δ=۰/۵ در وهله اول و ۰/۱و ۰/۰۵ در وهله های بعد.

حل:

رسم تابع به کمک دستورات زیر انجام ودر شکل زیر دیده می شود:

```
x=۰:.۰۱:۳; f=inline('(x.^۳)+(٤/x)'); for i=۱:length(x), g(i)=f(x(i));,
end;plot(x,g)
```



باδ = ۰/۵							
۳	۲/۵	۲	۱/۵	۱	۰/۵	۰	x
۲۸/۳	۱۷/۲	۱۰	٦/۰٤	۵	۸/۱۲۵	∞	f(x)

کمترین مقدارf(x) در $\hat{x}=۱$ است پس مینیمم در ۱±۰/۵ قراردارد.

حال می توان فاصله[۰/۵ ۱/۵] را به تعدادی زیر فاصله با $\delta=۰/۱$ تقسیم و مساله را مجدداً با این فاصله اولیه حل کرد:

[1] از خانم مهندس فرزانه حیدری دانش آموخته ارشد دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنرکرمان

$\delta=\cdot/\backslash$										
x	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۵
f(x)	۸/۱۲۵	۶/۹	۶/۰۵	۵/۵۱	۵/۱۷	۵	۴/۹۶۷۳۶ مینیمم	۵/۰۶	۵/۲۷	۵/۶	۶/۰۴

از بین این نقاط کمترین مقدارf(x) متعلق به $\hat{x}=1/1$ است پس مینیمم در ۱/۱±۰/۰۵ قراردارد. مجدداً می توان فاصله ۱/۱±۰/۱یعنی[۱/۲ ۱] را به تعدادی زیر فاصله باطول $\delta=0/05$ تقسیم کرد.:

با $\delta=0/05$					
X	۱	۱/۰۵	۱/۱	۱/۱۵	۱/۲
f(x)	۵	۴/۹۶۷۱	۴/۹۶۷۳۶	۴/۹۹۹۱	۵/۰۶۱۳

کمترین مقدارf(x) در $\hat{x}=1/05$ است پس مینیمم در ۱/۰۵±۰/۰۵ قراردارد. مجدداً می توان فاصله ۱/۰۵±۰/۱ را به تعدادی زیر فاصله باطول $\delta=0/025$ تقسیم کرد:

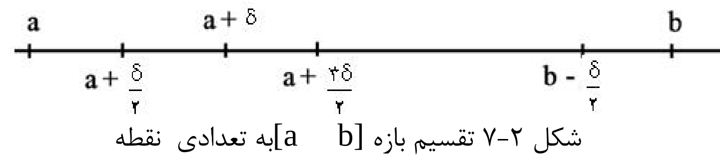
$\delta=0/025$				
X	۱/۰۲۵	۱/۰۵	۱/۰۷۵	۱/۱
f(x)	۴/۹۷۹۳	۴/۹۶۷۱	۴/۹۶۳۲مینیمم	۴/۹۶۷۳۶

از میان این نقاط کمترین مقدارf(x) متعلق به $\hat{x}=1/075$ است پس مینیمم در ۱/۰۷۵±۰/۰۲۵ قراردارد. پایان مثال ▲

۲–۲–۱–۳ اهمیت انتخاب صحیح تعداد نقاط و طول زیرفاصله ها(δ)

انتخاب تعداد نقاط و طول زیرفاصله ها(δ) از اهمیت زیادی برخوردار است و همیشه برای همه توابع نمی توان بیان کرد که مینیمم تابع در همسایگی نقطه با کمترین مقدار تابع قرار دارد، مگر اینکه تابع شبه محدب (کوازی کنوکس) اکید باشد. توضیح زیر این موضوع را برای جستجوی یکنواخت در حالت یک متغیره روشن می‌کند (از کتاب Sivazlian&Stanfe,۱۹۷۵ ص ۳۴۶)

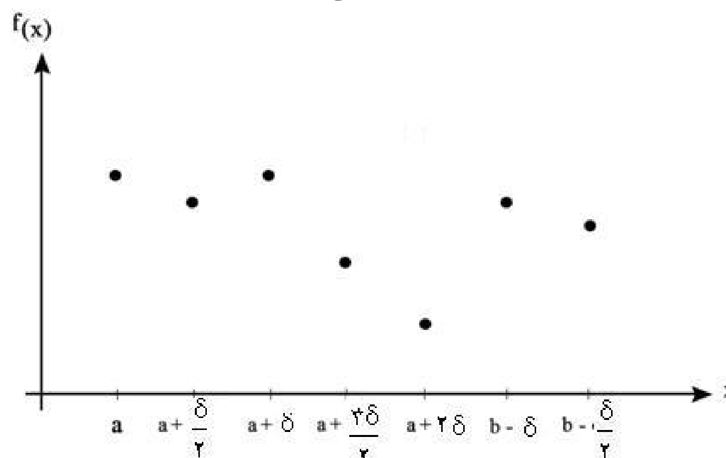
فرض کنید برای $a\leq x\leq b$ بخواهیم تابع f(x) را مینیمم کنیم. در فاصله [a b] تعدادی نقطه به فواصل مساوی $\frac{\delta}{2}$ تعبیه می‌کنیم این نقاط بینابینی که در شکل ۲-۷ نشان داده شده $S=\{\ a+\frac{\delta}{2}\ \ a+\delta\ \ \ a+\frac{3\delta}{2}\ ......\ b-\frac{\delta}{2}\ \}$ می باشد.



شکل ۲-۷ تقسیم بازه [a b]به تعدادی نقطه

نقطه ای از این مجموعهS را با p نشان داده و مقدار تابع f را درآن با f(p).

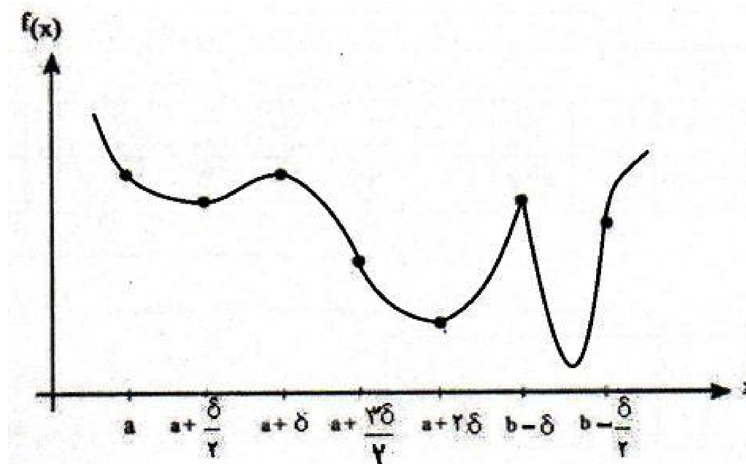
فرض کنید مقدار Z بازای تمام این نقاط محاسبه و در شکل زیر نشان داده شود. در ضمن فرض کنید که متوجه شدیم که در میان تمام نقاط متعلق به S $(p \in S)$یکی از این نقاط مثل $\hat{x}$ طوری است که $\forall p \in S \quad f(\hat{x}) \leq f(p)$. گفته شد همیشه نمی توان بیان کرد که که مینیمم تابع در $\left[\hat{x}-\frac{\delta}{۲} \quad \hat{x}+\frac{\delta}{۲}\right]$ می‌باشد. جهت توضیح این مطلب به شکل زیر توجه کنید. این شکل نشان می‌دهد که $\hat{x}=a+۲\delta$ پس نقطه‌ای از S که برای برآوردمقدار بهینه x (x*) انتخاب می‌شود



شکل ۲–۸ تبیین خطا در جستجوی همزمان

$a+۲\delta$ است. این انتخاب ممکن است اشتباه باشد شکل زیر تابعی را نشان می‌دهد که می تواند متناظر با داده‌های شکل قبل است و اشتباه بودن این استنتاج را میرساند. پس باید راجع به رفتار تابع به اندازه کافی بدانیم تا مطمئن شویم که این تکنیک کار خواهد

کرد و این انتخاب[1] صحیح میزان δ را ایجاب می کند. درضمن توجه کنید در این مساله که طول زیر فاصله $\frac{\delta}{۲}$ است داریم $v = \frac{۲}{\delta}(b-a)-۱$.



شکل ۲–۹

برنامه MATLAB برای روش یکنواخت [2]

توجه در هنگام واردکردن تابع قبل از علامت تقسیم(/)، توان(^) و ضرب(*) یک نقطه گذاشته شود. به عنوان مثال(۰,۷۵)./(۱+x.^۲)-.۶۵*x.*atan(۱./x)

```
%Uniform   Search
disp('please  put"." before the oprations( /,*,^)')
temp=input('Enter function (x is variable);','s');
f=inline(temp);
a(۱)=input('Enter x lower bound;');b(۱)=input('Enter x upper bound;');
e=input('Enter final interval length; ;');
x=a(۱):e:b(۱);n=((b(۱)-a(۱))/e)-۱;
A=f(x);
disp('min (f(x):')
min(f(x))
[val,ind]=find(A==min(f(x)));
Y=x(ind); length(Y);
if (length(Y)>۱)
   disp('Final interval is:')
   min(Y)
   max(Y)
else
```

[1] جواب این سوال که چه نوع اطلاعات از دنیای واقعی در انتخاب δ راهنمائی می‌نماید؟به عبارت دیگر اندازه کافیδ چقدر است؟در ص ۳۴۸-۳۴۹ (۱۹۷۵) Sivazlian&Stanfel به تفصیل آمده است.

[2] از خانم مهندس روستا دانش آموخته ارشد دانشکده فنی داشگاه شهید باهنرکرمان

```
disp('Final innterval is:')
  s=x(ind)-e
   h=x(ind)+e
end
```

تمرینات

مطلوبست رسم توابع زیر با MATLABو یافتن مینیمم آنها با جستجوی یکنواخت.

۱-تابع $x(x-1.5)$ در فاصله $x\in[0\ 2]$ و دقت $\frac{\delta}{b_1-a_1}=\frac{1}{v+1}\le 0/01$

جواب با $\delta=0/001$ $[0{,}749\ \ 0{,}751]$

۲-تابع f=۰,۶۵-۰,۷۵./(۱+x.^۲)-۰,۶۵*x.*atan(۱./x) را در فاصله $x\in[0\ 3]$ رسم و مینیمم آنرا با جستجوی یکنواخت با $\delta=0.3$ وسپس $\delta=0.1$ بیابید.

راهنمایی:

برای رسم، دستورات متلب زیر یا دستورات مندرج در مثال۲-۹ رامی توان بکار برد:

```
x=0:.01:3; f=inline('0,65-(0,75)./(1+x.^2)-.65*x.*atan(1./x) '); for i=1:length(x),
g(i)=f(x(i));, end;plot(x,g)
```

۳-تابع -x^4+5x^3+2x^2-24x در فاصله $x\in[0\ 3]$ با δ=0.2

جواب :[۱,۶ ۱,۲]

۴-تابع 4x^2-6x-3 در فاصله $x\in[0\ 5]$ با δ=0.2.

الف)الگوریتم ۳ نقطه-۳ نقطه و n=۱۰

ب) الگوریتم ۳ نقطه-۳ نقطه و n=۲۰

جواب الف:۱-۰ ب:۱-۰/۵

۵-تابع x^2+1 در فاصله $x\in[-1\ \ 0/75]$ با $\delta=0.25$ وسپس $\delta=0.05$.

جواب الف: ۰/۲۵ -۰/۲۵ ب: ۰/۰۵ -۰/۰۵

۶-تابع $4x^2+e^x$ در فاصله $x\in[-1\ \ 1]$ با $\delta=0.5$ وسپس با بازه عدم قطعیت(۰/۵ -۰/۵) بدست آمده با $\delta=0.2$. جواب ۰/۱ -۰/۳

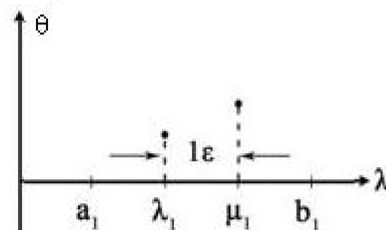
۲-۳جستجوی ترتیبی(Sequential Search)

ازویژگی های روشهای جستجوی ترتیبی(دنباله ای) این است که از اطلاعاتی که تکرارهای قبلی فراهم می‌کنند استفاده می نمایند اما ازمشتق استفاده نمی کنند. در این رابطه ۳ روش دو رسته ای، فیبو ناتچی و تقسیم طلایی توضیح داده خواهد شد.

۲-۳-۱جستجوی دو رسته‌ای Dichotomous search[1]

یکی از روشهای جستجوی ترتیبی روش جستجوی ۲رسته‌ای است. تابع $\theta: R \to R$را که باید طی فاصله $[a_1\ b_1]$ کمینه شود درنظربگیرید. فرض‌کنیدکه این تابع شبه‌محدب (کوازی‌کنوکس)اکید باشد. کمترین تعداد نقطه‌ای که لازم است مقدار تابع در آن نقاط محاسبه می‌شود تا فاصله عدم قطعیت کاهش یابد برابر "دو" می باشد. پس مقدار تابع در ابتدا در ۲ نقطه بدست آورده می‌شود این دو نقطه λ_1,μ_1 بطور متقارن به فاصله $\frac{\varepsilon}{2}$ از نقطه میانی $\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ قرار داده می‌شود[2]، بسته به مقادیر تابع در نقاط λ_1,μ_1 یعنی $\theta\left(\lambda_1=\frac{a_1+b_1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \theta\left(\mu_1=\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ یک فاصله جدید عدم قطعیت طبق توضیحات زیربدست می‌آید.

I) اگر $\theta(\lambda_1)<\theta(\mu_1)$ فاصله عدم قطعیت جدید $[a_1\ \mu_1]$خواهد بود (شکل۲-۱۰)

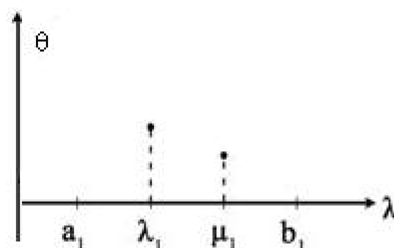


شکل۲-۱۰حالتI

II) اگر $\theta(\lambda_1)>\theta(\mu_1)$ فاصله عدم قطعیت جدید $[\lambda_1\ b_1]$ خواهد بود(شکل۲-۱۱)

[1] از: بازاراو همکاران(۲۰۰٦) ص ۳٤۷ , Sivazlian&Stanfel(۱۹۷۵) ۳٥٤

[2] دلائل این امر در آخر ص ۳٤۷ بازاراو همکاران(۲۰۰٦)



شکل ۲-۱۱حالت II

زیرا اطمینان می یابیم که مینیمم در فاصله قطعیت جدید است.

(III اگر دو مقدار $\theta(\lambda_1),\theta(\mu_1)$ برابر شدند، فاصله عدم قطعیت جدید $[\lambda_1, \mu_1]$ خواهد بود. پس از اینکه فاصله عدم قطعیت جدید تعیین شد، فرایند با مشخص کردن دو نقطه در فاصله جدید تکرار می‌گردد.

۲-۳-۱-۱خلاصه روش دو رسته‌ای [1]

گامهای روش دو رسته‌ای برای کمینه‌سازی تابع θ که شبه محدب(کوازی کنوکس) اکید در فاصله $[a_1 \quad b_1]$ چنین است:

گام آغازین

انتخاب طول مجاز فاصله نهایی عدم قطعیت(ℓ) و مقدار کوچک ε.

مقدار ثابت $\varepsilon > 0$ موسوم به ثابت تشخیص پذیری(تمیز)[2] و نیز طول مجاز فاصله نهایی عدم قطعیت $\ell > 0$ را برگزینید ε خیلی کوچک اشتباه به همراه می‌آورد.

فرض کنید $[a_1 \quad b_1]$ اولین فاصله عدم قطعیت بوده شماره تکرار(K)را مساوی یک بگیرید و به گام اصلی بروید.

گام اصلی

مرحله ۱- اگر $b_K - a_K \leq \ell$ متوقف شوید. مینیمم تابع در فاصله $[a_K \quad b_K]$ است. در غیراینصورت μ_K, λ_K را مطابق زیر در نظر گرفته و به مرحله ۲ بروید.

---

[1] ص ۳۴۸ بازارا و همکاران(۲۰۰۶)

[2] distingushibility constant = resolution constant

$$\mu_k,\lambda_k \text{ نقاط } = \left\{ \text{نقطه میانی } [a_k \quad b_k] \pm \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$\mu_K,\lambda_K \text{ نقاط}= \left[\text{نقطه میانی } [a_k \quad b_k] \pm \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$\lambda_K = \frac{a_K + b_K}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \mu_K = \frac{a_K + b_K}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

مرحله ۲- اگر $\theta(\lambda_K)<\theta(\mu_K)$ آنگاه $b_{K+1}=\mu_K$, $a_{K+1}=a_K$ را قرار دهید در غیراینصورت $b_{K+1}=b_K$, $a_{K+1}=\lambda_K$. K را با ۱+ K جایگزین و به مرحله ۱ بروید

توجه کنید

- طول بازه عدم قطعیت در شروع تکرار ۱+ K برابر طول بازه عدم قطعیت درپایان تکرار K است با

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \ell_k = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

- بعد از v بار ارزیابی تابع، طول فاصله نهایی عدم قطعیت، L_v، برابر است با

$$L_v = \frac{b_1 - a_1}{2^{\frac{v}{2}}} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}}\right) \qquad v = 2,4,,\ldots$$

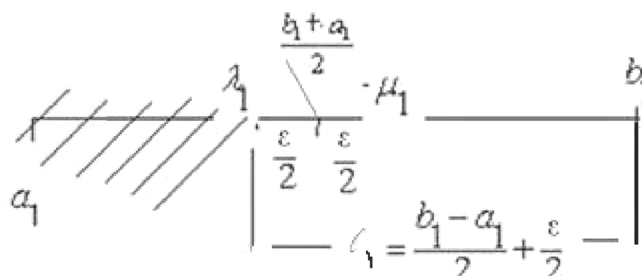
که در آن v عددی است زوج .

اثبات:

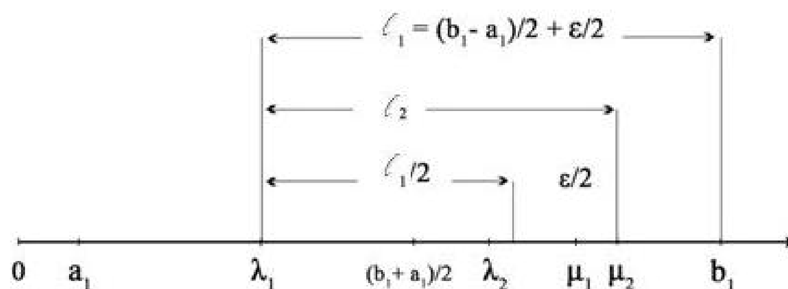
در اینجا با تعریف تکرار بعنوان تعیین ۲ مقدار جدید از تابع، طول فاصله بعد از v=۲,٤,٦,.. بار ارزیابی تابع (یا بعداز تکرارkام... ,۲و۱ = K) با $\ell_K = L_v$ نشان داده شده است($K = \frac{v}{۲}$).

اگر تابع θ (تابع مورد کمینه‌سازی) کوازی کانوکس و $\theta(\lambda_1)>\theta(\mu_1)$باشد بخش $(a_1 \quad \lambda_1)$ حذف می گردد (شکل۲-۱۲). طول فاصله بعد از تکرار اول(ℓ_1)چنین است(شکل ۲-۱۳):

$$\ell_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$



شکل۲-۱۲



شکل ۲-۱۳

با تعریف تکرار بعنوان تعیین ۲ مقدار جدید از تابع، فاصله عدم قطعیت بعداز تکرار دوم وسوم:

$$\ell_2 = \frac{L_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b_1 - a_1}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\ell_3 = \frac{L_2}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1 + \varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

بعد از K تکرار داریم:

$$\ell_K = \frac{1}{2}\ell_{K-1} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^K} + \left(\underbrace{\sum_{J=1}^{K} \frac{1}{2} j^K}_{\text{تصاعد}}\right) \times \varepsilon = \frac{b_1 - a_1}{2^K} + \frac{\overset{\text{اول}}{\frac{1}{2}} - \overset{\text{آخر} \times q}{\frac{1}{2^{k+1}}}}{\underset{q}{\frac{1}{2}}} \times \varepsilon$$

$$\ell_K = \frac{b_1 - a_1}{2^K} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^K}\right)$$

طول فاصله عدم قطعیت <u>بعد</u> از V بار ارزیابی یا $K = \frac{V}{2}$ تکرار، یا در **<u>شروع</u>** تکرار $k+1$ (که هر تکرار شامل دو نقطه است)چنین می شود

$$L_{\nu}=\frac{b_1-a_1}{2^{\frac{\nu}{2}}}+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\qquad \nu=2,4,6,\ldots$$

پایان اثبات■

بجای دادن ℓ بعنوان معیار توقف می‌توان بنحوی از فرمول فوق هم بدون صرف نظر یابا صرف نظر کردن از جمله دوم، برای توقف استفاده نمود

بدون صرف نظر از جمله دوم و قرار دادن طول فاصله اولیه با ($L_0=b_1-a_1$):

$$\frac{L_{\nu}}{L_{0}}=(\frac{1}{2})^{\frac{\nu}{2}}+\frac{\varepsilon}{L_{0}}\left(1-(\frac{1}{2})^{\frac{\nu}{2}}\right)\qquad \nu=\text{زوج}$$

با صرف نظر از جمله دوم:

$$\frac{L_{\nu}}{L_{0}}\cong(\frac{1}{2})^{\frac{\nu}{2}}\qquad \nu=2,4,\ldots$$

اگرطول فاصله نهایی را بعد از ν ارزیابی (بعداز تکرار $K=\frac{\nu}{2}$ام) برابر $\ell_K=L_{\nu}$ بگیریم

$$\frac{\ell_K}{L_0}\cong\left(\frac{1}{2}\right)^K\quad K=1,2,\ldots$$

۲-۳-۱-۲ تعیین تعداد تکرار(K) و *تعداد مشاهده*(ν) درجستجوی دو رسته‌ای

در روش ۲ دسته ای اگر طول فاصله اولیه (L_0) و نهایی مطلوب(ℓ) داده شده باشد تعداد مشاهده و تعداد تکرارچنین قابل محاسه است

$$\frac{\ell}{L_0}\cong(0/5)^{\frac{\nu}{2}}\Rightarrow$$

$$\nu=2\frac{\ln(\frac{L_0}{\ell})}{\ln 2}\qquad \nu\in\{2,4,6,\ldots\}\qquad,\qquad K=\frac{\nu}{2}$$

واگر معیار کارایی($\frac{L_{\nu}}{L_0}$)به صورت $0<a<1$ $\quad \frac{L_{\nu}}{L_0}\le a$ داده شده باشد آنگاه به طور تقریبی داریم:

$$(\frac{1}{2})^K \le a \Rightarrow$$

$$K \ge \ln a / \ln 0/5 \qquad K \in \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$$

چون معیار کارایی تقریبی برابر $(\frac{1}{2})^K$ است بهتر است که K بزرگتراز $\frac{\ln a}{\ln 0/5}$انتخاب شود: $K > \frac{\ln a}{\ln 0/5}$

یا چون $K = \frac{v}{2}$، v بزرگتراز $\frac{2\ln a}{\ln 0/5}$ انتخاب گردد: ، $v > \frac{2\ln a}{\ln 0/5}$.

البته همانطور که مثال زیرنشان می دهد اگر ε داده شده باشد لازم نیست که $\frac{L_v}{L_0}$ تقریب زده شود. بلکه رابطه دقیق قابل استفاده است.

مثال ۲-۵

می‌خواهیم مینیمم تابع $f(x) = \frac{x}{2}(2x-3)$ در فاصله (۰ ۱) با روش ۲ دسته ای ($\varepsilon = 0.001$) بیابیم. kوv را چنان بیابدکه طول بازه نهایی ۲۰٪ طول فاصله اولیه باشد.

حل

مقدار وسط بازه نهایی را جواب بهینه می دانیم. شرط ۲۰٪ را چنین می توان بیان نمود:

$$E = \frac{L_v}{L_0} \le 0.20$$

که در آن E برابر است با:

$$E = \frac{1}{2^{\frac{\upsilon}{2}}} + \frac{\varepsilon}{L_0}\left(1 - \frac{1}{2^{\upsilon/2}}\right)$$

$$E = \frac{1}{2^{\frac{\upsilon}{2}}} + \frac{\varepsilon}{L_0}\left(1 - \frac{1}{2^{\upsilon/2}}\right) \le 0.20 \qquad t = \frac{1}{2^{\upsilon/2}} \to t + \frac{0/001}{1-0}(1-t) \le \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$t \le \frac{199}{999} \Rightarrow 2^{\frac{\upsilon}{2}} \ge \frac{999}{199} \Rightarrow v \ge \frac{\log(\frac{999}{199})}{\log(2)} = 4/66 \xrightarrow{v:\text{زوج}} = \upsilon = 6 \to K = \frac{\upsilon}{2} = 3$$

پایان مثال▲

مثال ۲-۶ :

ν چه میزان انتخاب گردد تا طول فاصله عدم قطعیت نهائی ما حداکثر ۱۵٪ طول فاصله اولیه باشد.

حل:

$$\ell_K \leq ۰/۱۵ L_۰$$

$$\frac{\ell_K}{L_۰} \leq ۰/۱۵ \rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^K \leq ۰/۱۵ \Rightarrow K \geq -\frac{\text{Log}۰/۱۵}{\text{Log}۲} = ۲.۷۳ \rightarrow K = ۳$$

$$K = \frac{\nu}{۲} = ۳ : \text{شمارتکرارها}$$

$$\nu = ۶$$

اگر از رابطه بدون تقریب استفاده می شد با $\varepsilon = ۰.۰۰۱$ و $L_۰ = ۲$

$$\frac{L_\nu}{L_۰} = (\tfrac{۱}{۲})^{\frac{\nu}{۲}} + \frac{\varepsilon}{L_۰}\left(۱ - (\tfrac{۱}{۲})^{\frac{\nu}{۲}}\right) = ۰/۱۵ \qquad (\tfrac{۱}{۲})^{\frac{\nu}{۲}} = A \Rightarrow$$

$$A + \frac{۰/۰۰۰۱}{۲}(۱ - A) \leq ۰/۱۵ \Rightarrow$$

$$۰/۹۹۹۹۵A \geq ۰/۰۹۹۹۵ \quad \Rightarrow A = (\tfrac{۱}{۲})^{\frac{\nu}{۲}} = 0.0999549 \Rightarrow$$

$$\frac{\nu}{۲}\log ۰.۵ \geq \log 0.0999549 \Rightarrow \nu \geq ۲ \times ۳/۳۲۲$$

چون ν زوج است، ۸ انتخاب شود؛ لذا $k = ۴$.

پایان مثال ▲

بد نیست بدانید که روشی به نام جستجوی متساوی ا لفاصله وجود دارد که در مراجعی مثل Sivazlian&Stanfel قابل مطالعه است.

مثال ۲-۷ برای روش دو رسته ای:

مینیمم تابع $f(x)=-x(1/5-x)$ را در فاصله [۰،۱]طوری بدست آورید که فاصله نهایی حداکثر ۲۰٪ فاصله اولیه شود یعنی: $\frac{L_v}{L_0}\leq 0/2$. ε را برابر ۰/۰۰۱ بگیرید.

حل:

ابتدا شرط توقف را بدست می آوریم

$$\frac{L_v}{L_0}\leq 0/2 \Rightarrow \frac{L_0\times 2^{-\frac{v}{2}}+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}}\right)}{L_0}=\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}}+\frac{\varepsilon}{L_0}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}}\right)\leq\frac{2}{10}\Rightarrow$$

اگر مقادیر $\varepsilon=0.001$ $\quad L_0=1-0=1$ در فرمول بگذاریم، خواهیم داشت:

$v\geq 5/02$

شرط توقف :

چون تعداد نقاط, عددی زوج می‌باشد پس $v=6$ نقطه را طی $K=\frac{6}{2}=3$ تکرار باید بررسی کنیم.

برای تکرار اول ($K=1$)

μ_1,λ_1 ،که در همسایگی $\frac{\varepsilon}{2}$ نقطه وسط فا صله آغازین قرار دارند، چنین محاسبه می‌شود:

$$\lambda_1=\frac{b_1+a_1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{0+1}{2}-\frac{0/001}{2}=0/4995$$

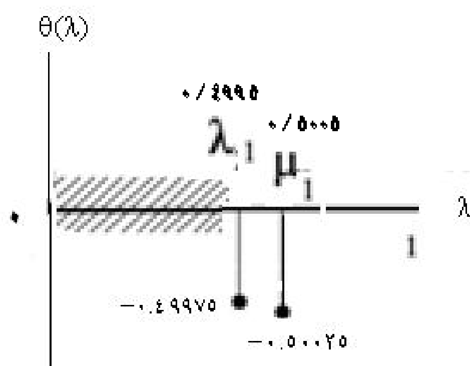
$$\mu_1=\frac{b_1+a_1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=0/5+0/0005=0/5005$$

مقادیر تابع در این ۲ نقطه مربوط به تکرار اول

$$\theta(\lambda_1)=-\lambda_1(1.5-\lambda_1)=-(0.4995)(1.5-0.4995)=-0.49975$$

$$\theta(\mu_1)=-\mu_1(1.5-\mu_1)=-0.50025$$

چون $\theta(\lambda_1)>\theta(\mu_1)$ پس فاصله عدم قطعیت جدید $[\lambda_1 \quad b_1]=[0/4995 \quad 1]$ می‌شود.



برای تکرار دوم ($K = ۲$)

$\mu_۲,\lambda_۲$ در همسایگی $\frac{\varepsilon}{۲}$ نقطه وسط فاصله جدید($\frac{۰.۴۹۹۵+۱}{۲}$) خواهد بود.

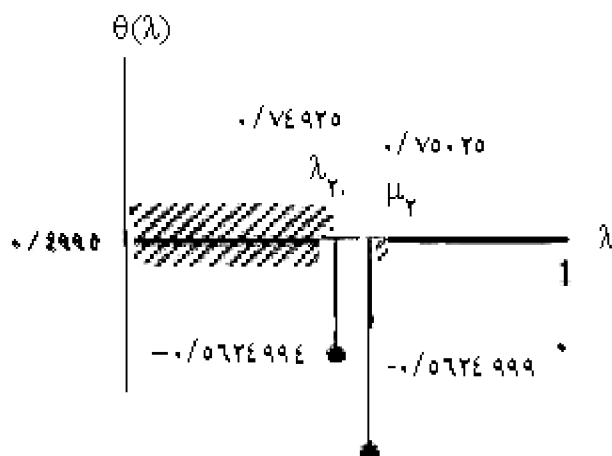
$$\lambda_۲ = \frac{۰.۴۹۹۵+۱}{۲} - \frac{\overset{۰/۰۰۱}{\varepsilon}}{۲} = ۰.۷۴۹۲۵$$

$$\mu_۲ = \frac{۰.۴۹۹۵+۱}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = ۰.۷۵۰۲۵$$

$$\theta(\lambda_۲) = -(۰.۷۴۹۲۵)(۱/۵ - ۰.۷۴۹۲۵) = -۰/۵۶۲۴۹۹۴$$

$$\theta(\mu_۲) = -(۰.۷۵۰۲۵)(۱/۵ - ۰.۷۵۰۲۵) = -۰/۵۶۲۴۹۹۹$$

چون $\theta(\lambda_۲) > \theta(\mu_۲)$ پس فاصله عدم قطعیت جدید $[\lambda_۲ \quad b_۱] = [۰/۷۴۹۲۵ \quad ۱]$ خواهد بود.



برای تکرار سوم ($K = ۳$)

μ_3, λ_3 درهمسایگی مرکز فاصله جدید انتخاب می‌شود.

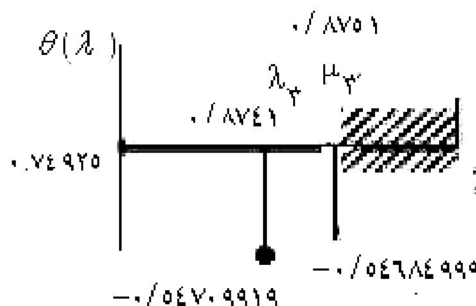
$$\lambda_{3} = \frac{0.74925 + 1}{2} - \frac{0.001}{2} = 0.8741$$

$$\mu_{3} = \frac{0.74925 + 1}{2} + \frac{0.001}{2} = 0.8751$$

$$\theta(\lambda_{3}) = -0.8741(1.5 - 0.8741) = -0.54709919$$

$$\theta(\mu_{3}) = -0.8751(1.5 - 0.8751) = -0.54684999$$

دز این تکرار چون $\theta(\lambda_3) < \theta(\mu_3)$ پس سمت راست بازه از μ_3 حذف می شود.



چون سه تکرار باید انجام می شد همین‌جا متوقف و اعلام می‌شود که مینیمم در فاصله عدم قطعیت جدید یعنی $[\lambda_3 \quad \mu_3] = [0.74925 \quad 0.8751]$ می‌باشد. پایان مثال ▲

توجه:

رابطه تعداد مشاهده (v) باتعداد تکرار(k)درروش دورسته ای $v = 2k$ است.
زیرا در هر تکرار این روش مقدار تابع را در دو نقطه جدید به دست می آوریم.

۲-۳-۱-۳ معیار کارائی جستجوی دو رسته‌ای

در بخش ۲-۱-۲ دیدید نسبت $E = \frac{L_v}{L_0}$ که بین صفر ویک بدست می‌آید به عنوان معیارکارایی یک الگوریتم جستجوی خطی به کار می رود. که در آن:

L_v طول بازه عدم قطعیت بعد از اخذ v مشاهده

L_0 طول بازه عدم قطعیت اولیه قبل از شروع مشاهده

در جستجوی دو رسته‌ای معیارکارایی E برابر است با:

$$E = \frac{1}{2^{\frac{\upsilon}{2}}} + \frac{\varepsilon}{L_0}\left(1 - \frac{1}{2^{\upsilon/2}}\right)$$

یا تقریباً برابر است با : $E \cong (\frac{1}{2})^{\frac{\upsilon}{2}} = (\frac{1}{2})^{K}$.

تمرینات با استفاده ازجستجوی ۲ رسته ای(Dichotomous) مطلوبست

۱. مینیمم تابع $\varepsilon = 0.001 \quad \frac{L_v}{L_0} \le 0/2 \quad x \in [0 \ \ 1] \quad \theta(x) = 5x^2 - 5x - 3$

۲. مینیمم تابع $\varepsilon = 0.001 \quad \frac{L_v}{L_0} \le 0/1 \quad x \in [0 \ \ 1] \quad \theta(x) = x^2 - 2x$

جواب [۱ ۰/۹۳۶۵]با تعداد تکرار : K = ۴

۳. مینیمم تابع $\varepsilon = 0.01 \quad \ell \le 0/1 \quad x \in [-3 \ \ 6] \quad \theta(x) = x^2 + 2x$

۴. مینیمم تابع $x \in [-3 \ \ 6] \quad \theta(x) = x^2 + 2x \quad \varepsilon = 0.01 \quad \ell \le 0/2$

جواب $[-0/88215 \quad -1/0334]$ با تعداد تکرار : $K=6 \Leftarrow K = \frac{\ln(\frac{L_0}{0/2})}{\ln 2}$

۵. مینیمم تابع $x \in [-1 \quad 3] \quad \theta(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x + 5} \quad \varepsilon = 0.001 \quad \frac{L_v}{L_0} \le 0/1$

جواب [۲/۱۵۱۲ ۱,۵۴۹۴] درتکرار : $K = 4 \leftarrow v = 8 \leftarrow 6/64 = \frac{2\ln(.1)}{\ln 0/5} \le v$

۶. مینیمم تابع $\varepsilon = 0.001 \quad \frac{L_v}{L_0} < 0/25 \quad x \in [-1 \quad ./75] \quad \theta(x) = x^2 + 1$

جواب $[0/18875 \quad -0/1255]$ در تکرار : $K = 3 \leftarrow v = 6 \leftarrow 4 = \frac{2\ln(.25)}{\ln 0/5} < v$

۷.مینیمم تابع $x\in[-۰/۵ \quad ./۵]$ $\theta(x)=۵x^{۵}-۴x^{۴}+۱۲x^{۳}-۱۱x^{۲}+۲x-۱$

$\varepsilon=۰.۰۰۱ \quad \frac{L_{۷}}{L_{۰}}\le ۰/۰۱$. جواب $[-۱/۵۴۱ \quad ۰/۰۶۲۹]$

۸.مینیمم تابع $x\in[۱/۵ \quad ۲/۵]$ $\theta(x)=x^{۲}+\frac{۱۶}{x}$ $\varepsilon=۰.۰۰۴$ $\frac{L_{۷}}{L_{۰}}\le ۰/۲$

جواب دقیق :۲

۹.مینیمم تابع $\varepsilon=۰.۲ \quad L_{۷}\le ۰/۱۵$ $x\in[۱ \quad ۳]$ $\theta(x)=x^{۲}-۵x$

جواب $[۲/۶۶ \quad ۲/۳۵]$

۲-۳-۲ جستجوی فیبوناتچی

از دیگر روشهای جستجوی ترتیبی جستجوی فیبوناتچی است که یک تکنیک جستجوی بهین[۱] برای توا بع یک متغیره است در حالیکه تقسیم طلائی که بعداً با آن آشنا خواهید شد یک روش نزدیک به بهینه[۲]است. این جستجو برای یافتن نقطه بهینه تابع محدب کامل مفید است. تعداد ارزیابی های تابع در تکرار اول ۲و در تکرار های بعد یک می باشد. لذا بعد از kتکرار در کل n=k+۱ مشاهده داریم. منظور از مشاهده، محاسبه مقدار تابع در نقطه است.

۲-۳-۲-۱ تاریخچه

نام این جستجو از کار یک ایتالیائی بنام لئوناردا پیزا سرچشمه می‌گیردکه علاقمند به مطالعه رشد جمعیت خرگوش‌ها شد. دنباله اعداد صحیحی که مدل او قرار گرفت دنباله فیبوناتچی است که به صورت $\{F_n\}$ n=۱,۲,۳... نمایش داده می شود؛ که درآن F_n از رابطه بازگشتی زیر بدست می‌آید بطوریکه هر عدد دنباله جمع دو عدد قبلی است:

$$F_n=F_{n-۱}+F_{n-۲} \quad n\ge ۲$$
$$F_۱=۱ \ , \ F_۰=۱$$

---

[۱] optimal

[۲] near optimal

چند عدد از این دنباله در جدول زیر داده شده است.

جدول ۲-۳ چند عدد از دنباله فیبوناتچی													
n	۰	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
F_n	١	١	٢	٣	٥	٨	١٣	٢١	٣٤	٥٥	٨٩	١٤٤	٢٣٣

۲-۳-۲-۲ تعداد مشاهده مورد نیاز(n)

در روش فیبوناتچی برخلاف روشهای ۲ رسته ای و تقسیم طلائی تعداد کل مشاهدات از قبل باید مشخص شود که از معایب این روش است . بعداً خواهید دید در یک بازه عدم قطعیت $[a_k \quad b_k]$ برای تعیین ۲ نقطه μ_k,λ_kدر بازه نیاز به اعداد فیبوناتچی می‌باشدکه تابع تعدادمشاهده است. می توان نشان داد. فاصله عدم قطعیت نهایی(ℓ) بر حسب فاصله اولیه $[a_1 \quad b_1]$ برابراست با

$$\ell = b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{F_n}$$

که نشان دهنده دقت روش است. هرچه n بیشتر باشد ℓ کمترو دقت بیشتر است. ازاین فرمول در محاسبه n هم می توان بهره گرفت.

۲-۳-۲-۳ الگوریتم فیبوناتچی برای کمینه سازی یک تابع شبه محدب (کوازی کنوکس)اکیددر یک فاصله بسته

کتاب بازارا و دیگران(۲۰۰۶) ص ۳۵۳ پس از یک سری استدلال ومقدمه مراحل روش جستجوی فیبوناتچی برای یافتن مینیمم تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)اکید θ در فاصله $[a_1 \quad b_1]$ را چنین بیان می‌دارد:

مرحله آغازین

یک مقدار مطلوب مثل $\ell > 0$ برای فاصله عدم قطعیت نهائی مشخص و مقدار کوچک ثابت تشخیص پذیری (تمیز) [1] $\varepsilon > 0$ را نیز مشخص کنید.

---
[1] Ditinguishibility constant, resolution constant

اگر $[a_1 \quad b_1]$ فاصله عدم قطعیت اولیه باشد تعداد مشاهدات (n) را چنان تعیین کنید که $F_n > \frac{b_1 - a_1}{\ell}$.

آنگاه μ_1, λ_1 را از

$$\lambda_1 = b_1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

محاسبه کنید[1].

μ_1 از رابطه زیر هم قابل محاسبه است:

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) \overset{F_{n-1}=F_n-F_{n-2}}{=} a_1 + (1 - \frac{F_{n-2}}{F_n})(b_1 - a_1) = b_1 - \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

سپس مقدارتابع θ را در نقاط μ_1, λ_1 محاسبه کنید یعنی $\theta(\mu_1), \theta(\lambda_1)$ را .

شماره تکرار (K) را مساوی ۱ قرار داده به مرحله اصلی بروید.

مرحله اصلی

گام ۱

اگر $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ به گام ۲ و اگر $\theta(\lambda_k) \le \theta(\mu_k)$ به گام ۳ بروید

گام ۲

در این گام طرف چپ بازه عدم قطعیت قبلی از λ حذف می شود.

$a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$ به علاوه $\lambda_{k+1} = \mu_k$ و

---

[1] $$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1) = a_1 + (1 - \frac{F_{n-1}}{F_n})(b_k - a_k) = b_1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) \overset{F_{n-1}=F_n-F_{n-2}}{=} a_1 + (1 - \frac{F_{n-2}}{F_n})(b_1 - a_1) = b_1 - \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

$$\lambda_{k+1} = \mu_k$$

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$$

اگر $k = n-2$ به گام ۵ بروید در غیراینصورت به گام۴

گام۳

در این گام طرف راست بازه عدم قطعیت قبلی از μ حذف می شود.

$$b_{k+1} = \mu_k \quad , \; a_{k+1} = a_k$$

به علاوه[1]

$$\mu_{k+1} = \lambda_k , \quad \lambda_{k+1} = b_{k+1} - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$$

اگر $k=n-2$ به گام۵ در غیراینصورت به گام ۴ بروید

گام ٤ شماره تکرار (K) را مساوی $K+1$ گرفته و به گام ۱ بروید

گام ۵ تشکیل بازه نهایی

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}$$

$$\mu_n = \lambda_{n-1} + \varepsilon$$

اگر $\theta(\lambda_n) > \theta(\mu_n)$

$$a_n = \lambda_n \quad , \; b_n = b_{n-1}$$

در غیراینصورت یعنی اگر $\theta(\lambda_n) \leq \theta(\mu_n)$ با قرار دادن $a_n = a_{n-1} \; , \quad b_n = \lambda_n$

متوقف شوید. جواب بهینه در فاصله $[a_n \quad b_n]$ است.

توجه کنید

- همواره یکی از دو نقطه جدید b_n, a_n در تکرار جدید یکی از نقاط تکرار قبلی می باشد (به جز مرحله آغازین).

---

[1] $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_{k+1} + \frac{F_{n-k} - F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}) = b_{k+1} - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$

- با اعمال دقت زیاد در محاسبه μ وλها درآخرین مرحله $(k=n-1)$ ۲نقطه بر هم منطبق می‌شود. ان چنان که (آوریل،۱۹۷۶ ص ۲۲۸)

$$\lambda_n = \mu_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$$

مثال ۲- ۸

مطلوبست مینیمم تابع $0 < x < 10$ $\quad \theta(x) = (x-3)^2, \quad \ell \le 2/2, \quad \varepsilon = 0.01$

حل

تابع محدب است(چرا؟) که قوی تراز شبه محدب(کوازی کنوکس)اکیداست. پس می توان الگوریتم فیبوناتچی را بکار گرفت. $b_1 = 10 \quad a_1 = 0$.

ابتدا محاسبه n:

$$\ell = \frac{b_1 - a_1}{F_n} \le 2.2 \qquad \frac{10}{F_n} \le 2.2$$

$$\Rightarrow F_n \ge \frac{10}{2.2} = 4.5 \Rightarrow F_n = 5 \quad n = 4$$

با حداقل n=۴ شرط $\ell \le 2/2$ تامین می شود

مراحل حل با روش مشروحه فوق:

مرحله آغازین:

$$\lambda_1 = b_1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) = 10 - \frac{3}{5}(10-0) = 4 \qquad \left(\frac{F_3}{F_4}\right)$$

یــــــا

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{2}{5}(10-0) = 4$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) = 6$$

یــــــا

$$\mu_1 = b_1 - \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1) = 10 - \frac{2}{5}(10-0) = 6$$

$\theta(\lambda_1)=1, \quad \theta(\mu_1)=9$

تکرار $k=1$

مرحله اصلی گام ۱

$\theta(\lambda_1)=1<\theta(\mu_1)=9$ پس به گام ۳ می‌رویم.

مرحله اصلی گام ۳

$$k=1 \quad n=4$$
$$b_{k+1}=\mu_k \qquad b_2=\mu_1=6$$
$$a_{k+1}=a_k \qquad a_2=a_1=0$$
$$\lambda_2=b_2-\frac{F_{4-1-1}=2}{F_{4-1}=3}(b_{1+1}-a_{1+1})=2 \text{ or } \lambda_2=a_2+\frac{F_{n-k-2}=1}{F_{n-k}=3}(b_{k+1}-a_{k+1})=2$$
$$\mu_{k+1}=\lambda_k \Rightarrow \mu_2=\lambda_1=4$$
$$\theta(\lambda_2=2)=1 \quad , \quad \theta(\mu_2=4)=1$$

چون $k\neq n-2$ به گام ۴ می رویم.

مرحله اصلی گام ۴

تکرار $k=k+1=2$

مرحله اصلی- گام ۱

چون $\theta(\lambda_2)=\theta(\mu_2)$ به گام ۳ باید رفت(براساس بازارا و همکاران ص ۳۵۳)

مرحله اصلی- گام ۳

$$k=2 \quad n=4$$
$$a_{k+1}=a_k \quad a_3=a_2=0 \quad b_{k+1}=\mu_k \text{ or } b_3=\mu_2=4$$
$$\mu_{K+1}=\lambda_K \Rightarrow \mu_3=\lambda_2=2$$
$$\lambda_{K+1}=b_{K+!}-\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1}-a_{k+1}) \qquad \lambda_3=4-\frac{F_{4-2-1}=1}{F_{4-2}=2}(4-0)=2$$

چون $k=n-2$ به گام ۵ می‌رویم. طبق این گام

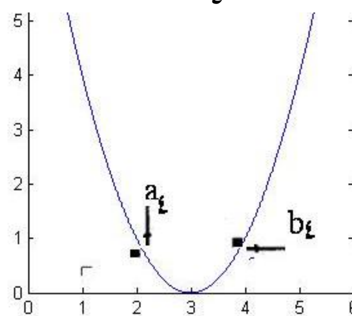
$$\lambda_n=\lambda_{n-1} \qquad n=4$$
$$\lambda_4=\lambda_3=2$$
$$\mu_n=\lambda_{n-1}+\varepsilon \qquad \mu_4=2+0/01=2.01$$

$\theta(\lambda_{٤})=١ > \theta(\mu_{٤})=٠.٩٨٠١$

در گام ۵ قرار داریم. برای توقف چون $\theta(\lambda_n)>\theta(\mu_n)$ بایدچنین عمل کنیم

$a_n=\lambda_n \quad , \quad b_n=b_{n-١} \qquad a_{٤}=\lambda_{٤}=٢ \qquad b_{٤}=b_{٣}=٤$

جواب نهایی دربازه $b_{٤}=٤ \qquad a_{٤}=٢$ قرار دارد(شکل زیر)



اگر طول یازه نهایی کمترداده شده بود دقت بیشرمی شد. پایان مثال ▲

مثال ۲–۹ : مطلوب است رسم تابع f(x)= ٠,٦٥-[٠,٧٥/(١+x^٢)]-(٠,٦٥x)tan−١(١/x)

آیا تابع محدب یا لااقل کوازی کنوکس است؟

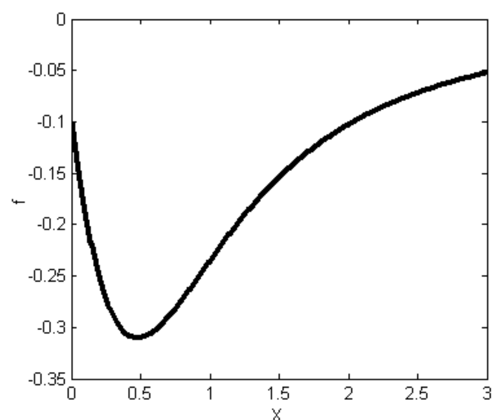
مینیمم تابع را در فاصله[٣،٠] با استفاده از روش جستجوی فیبوناچی به طوری که $٠/٢ \le \ell \le ٠/٣$ بیابید.

حل: ابتدا تابع را بادستورات زیر در محیط متلب رسم می کنیم:

```
x=۰:.۰۱:۳;f=.۶۵-(۰,۷۵)./(۱+x.^۲)-.۶۵*x.*atan(۱./x);plot(x,f)
```

یا

```
x=٠:.٠١:٣; f=inline('٠,٦٥-(٠,٧٥)./(١+x.^٢)-.٦٥*x.*atan(١./x) '); for
i=١:length(x), g(i)=f(x(i));, end;plot(x,g)
```



این تابع در کل فاصله داده شده محدب نیست اما کوازی کنوکس است و می توان روش فیبوناتچی را اعمال کرد.

توضیح:

$$f(x) = ۰.۶۵ - \left[\frac{۰.۷۵}{۱ + x^{۲}}\right] - ۰.۶۵x \tan^{-۱}(\frac{۱}{x})$$

مشتق اول

```
clc
syms x
f=۰,۶۵-((۰,۷۵)./(۱+x.^۲))-۰,۶۵*x.*atan(۱./x); diff(f)
```

```
ans =
  (۳*x)/(۲*(x^۲ + ۱)^۲) - (۱۳*atan(۱/x))/۲۰ +
۱۳/(۲۰*x*(۱/x^۲ + ۱))
```

$$f'(x) = -\left[\frac{-۲x(۰.۷۵)}{(۱+x^{۲})^{۲}}\right] - [۰.۶۵ \tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) + \frac{\frac{-۱(۰.۶۵x)}{x^{۲}}}{۱+\frac{۱}{x^{۲}}}]$$

$$f'(x) = \frac{۱.۵x}{(۱ + x^{۲})^{۲}} - ۰.۶۵ \tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) + \frac{۰.۶۵x}{۱ + x^{۲}}$$

مشتق دوم

$$f''(x) = \frac{۱.۵(۱ + x^{۲})^{۲} - ۲(۲x)(۱ + x^{۲})(۱.۵x)}{(۱ + x^{۲})^{٤}} - \frac{\frac{-۰.۶۵}{x^{۲}}}{۱ + \frac{۱}{x^{۲}}} +$$

$$+\frac{۰.٦٥(۱+x^{۲})-۲x^{۲}(۰.٦٥)}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۱.٥(۱+x^{۲})[۱+x^{۲}-٤x^{۲}]}{(۱+x^{۲})^{٤}}+\frac{۰.٦٥}{۱+x^{۲}}+\frac{۰.٦٥(۱-x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۱.۵-۴.۵x^{۲}+۰.۶۵x^{۴}+۱.۳x^{۲}+۰.۶۵+۰.۶۵-۰.۶۵x^{۴}}{(۱+x^{۲})^{۳}}$$

$$\frac{d^{۲}f(x)}{dx^{۲}}=\frac{-۳.۲x^{۲}+۲.۸}{(۱+x^{۲})^{۳}}$$

البته با متلب هم می توان بدست آورد:

```
clc
syms x
f=۰,٦٥-((۰,٧٥)./(۱+x.^۲))-۰,٦٥*x.*atan(۱./x);
t=diff(f);
diff(t)
```

تابع در کل فاصله داده شده شرط تحدب را ندارد زیرا مشتق دوم آن($\frac{d^{۲}f}{dx^{۲}}$)در آن بازه غیر منفی نیست تا تابع محدب باشد . مخرج مثبت است اما صورت در کل بازه $[۰,۳]$ مثبت نیست بلکه در بین ریشه های آن یعنی $[-\sqrt{۰.۸۷۵} \quad +\sqrt{۰.۸۷۵}]$ چنین است.

تابع شرط کوازی کنوکس بودن را دارا می باشد زیرامقدارتابع به ازای هرنقطه از ترکیب محدب از۲ نقطه، از ماکزیمم مقادیر تابع در آن ۲ نقطه کمتر است.

مر حله آغازین روش فیبوناتچی:

$$F_n=\frac{b_{۱}-a_{۱}}{\ell}\Rightarrow ۰/۲\le \ell=\frac{۳}{F_n}\le ۰/۳\Rightarrow ۱۰\le F_n\le ۱٥\Rightarrow n=٦$$

برای ۶ مشاهده مراحل زیر را انجام می دهیم.

مرحله اصلی گام ۱: با توجه به روابط گفته شده در الگوریتم داریم

$$\lambda_{۱}=b_{۱}-\frac{F_{n-۱}}{F_n}(b_{۱}-a_{۱})=۳-\frac{۸}{۱۳}(۳-۰)=۱/۱٥۳۸$$

$$\mu_{۱}=a_{۱}+\frac{F_{n-۱}}{F_n}(b_{۱}-a_{۱})=۰+\frac{۸}{۱۳}(۳-۰)=۱/۸٤٦۱$$

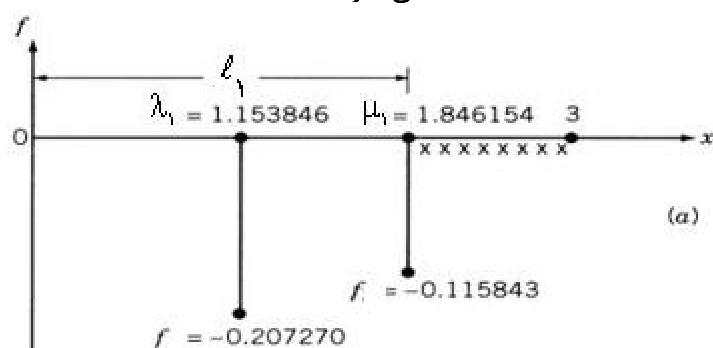
$f(\mu_{۱})=-۰,۱۱٥۸٤۳$ $\qquad$ $f(\lambda_{۱})=-۰,۲۰۷۲۷۰$

$k=1$

مرحله اصلی

گام ۱

چون $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ ، فاصله $[\mu_1, ۳)$ حذف می شود:



چون $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ به گام ۳ می رویم

گام ۳

$$k=۱ \qquad a_{k+۱}=a_۲=۰, \qquad b_{k+۱}=b_۲=\mu_۱=۱/۸۴۶۱۵۴$$
$$b_۲=\mu_۱ \qquad a۲=a۱$$

بعد داریم:

$$\mu_{k+۱}=\lambda_k$$
$$\lambda_{k+۱}=a_{k+۱}+\frac{F_{n-k-۲}}{F_{n-k}}(b_{k+۱}-a_{k+۱})=b_{k+۱}-\frac{F_{n-k-۱}}{F_{n-k}}(b_{k+۱}-a_{k+۱})$$

$$a_۲=۰ \quad b_۲=۱/۸۴۶۱۵۴$$
$$\mu_۲=\lambda_۱=۱/۱۵۳۸۴۶$$
$$\lambda_۲=b_۲-\frac{F_{۶-۲}}{F_{۶-۱}}(b_۲-a_۲)=۱/۸۴۶۱۵۴-\frac{۵}{۸}(۱/۸۴۶۱۵۴-۰)=۰/۶۹۲۳$$

or

$$\lambda_۲=a_۲+\frac{F_{۶-۱-۲}}{F_{۶-۱}}(b_۲-a_۲)=۰+\frac{۳}{۸}(۱/۸۴۶۱۵۴-۰)=۰/۶۹۲۳$$

چون $k \neq n-۲$ به گام ٤ باید رفت

k=k+۱=۲

گام ۱

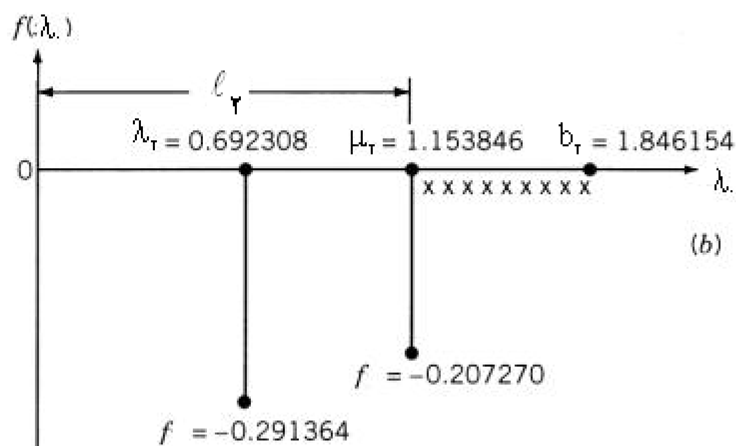
$f(\mu_۲) = -۰/۲۰۷۲۷۰ \quad f(\lambda_۲) = -۰,۲۹۱۳٦٤$

چون $f(\mu_۲) > f(\lambda_۲)$ به گام ۳

گام ۳

$a_{۲+۱} = a_۲ = ۰, b_{۲+۱} = \mu_۲ = ۱/۱۵۳۸٤٦$

فاصله $[\mu_۲, b_۲]$ حذف می شود:



چون $k \neq n-۲$ به گام ٤ باید رفت

گام ٤

k=k+۱=۳

گام ۱

چون $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$ به گام ۳ باید رفت

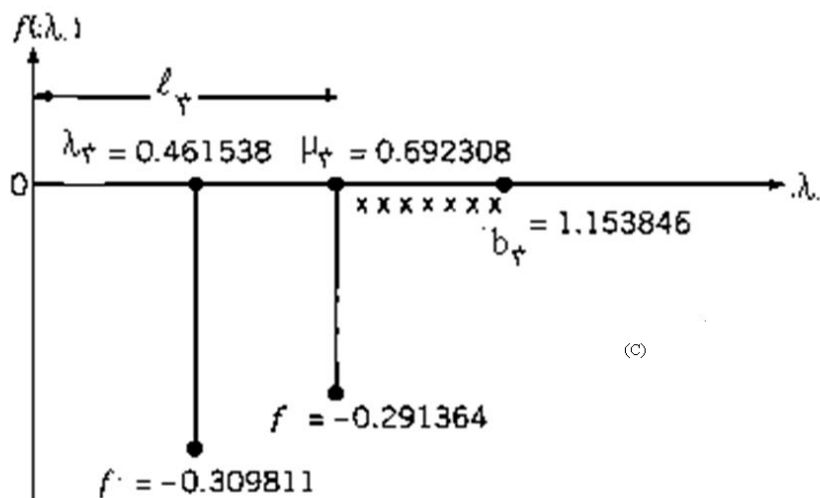
گام ۳

$a_{۲+۱} = a_۲ = ۰, b_{۲+۱} = \mu_۲ = ۱/۱۵۳۸٤٦$

$\lambda_{k+۱} \text{ or } \lambda_۳ = b_{k+۱} - \frac{F_{٦-۲-۱}}{F_۰}(b_{k+۱} - a_{k+۱}) = ۰/٤٦۱۵۳۸ \quad f(\lambda_۳) = -۰,۳۰۹۸۱۱$

$\mu_{k+1} = \mu_{۳} = \lambda_{۲} = ۰/۶۹۲۳ \quad f(\mu_{۳}) = -۰.۲۹۱۳۶۴$
$k \neq n - ۲$

چون $f(\lambda_{۳}) < f(\mu_{۳})$ پس فاصله $[\mu_{۳}, b_{۳}]$ حذف می شود و به گام ۴ می رویم



گام ٤

گام ۱ → k=۲+۱=۳

گام ۱

چون $f(\lambda_{۳}) < f(\mu_{۳})$ به گام ۳ می رویم

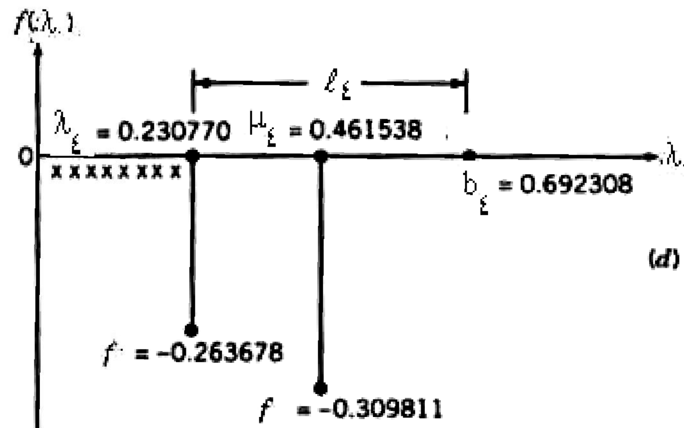
گام ۳

$$a_{٤} = a_{۳} = ۰, b_{٤} = \mu_{۳} = ۰/۶۹۲۳$$

$$\lambda_{k+1} \text{or} \lambda_{٤} = a_{٤} - \frac{F_{۶-۳-۱}}{F_{۵}}(b_{٤} - a_{٤}) = ۰/۲۳۰۷۷ \qquad f(\lambda_{٤}) = -۰/۲۶۳۶۷۸$$

$$\mu_{k+1} \text{ or } \mu_{٤} = \lambda_{۳} = ۰/٤۶۱۵۳۸ \qquad f(\mu_{٤}) = -۰/۳۰۹۸۱۱$$

پس $f(\mu_{٤}) < f(\lambda_{٤})$:و لذا مقادیر قبل از $\lambda_{٤}$ حذف می‌شود .

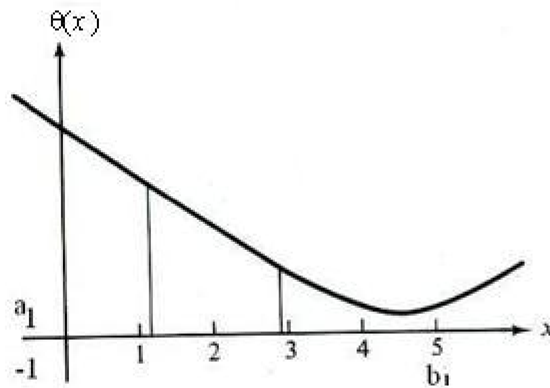


فاصله عدم قطعیت درپایان این تکرار $[\lambda_4 = ۰/۲۳۰۷۷۰, b_4 = ۰/٦۹۲۳۰۸]$ با طول ۰/۴۶۱۵. می شود. مساله را باید همینطور ادامه داد تا $۰/۲ \le \ell \le ۰/۳$ حاصل شود.

پایان مثال ▲

مثال ۲–۱۰ : ص ۳٦۸ (۱۹۷۵) Sivazlian&Stanfel

نقطه بهینه تابع یک کوهانه داده شده در شکل زیر را در [۵ ۱-] با روش جستجوی فیبوناچی طوری بدست آوریدکه نقطه اکستریمم در بازه‌ای با طول ۰/۱ قرار گیرد.



حل

تابع محدب است.تعداد مشاهدات (n) را باید چنان تعیین کنیم که داشته باشیم:

$$F_n \ge \frac{b_۱ - a_۱}{\ell}$$

$$F_n \geq \frac{b_1 - a_1}{\ell} = \frac{6}{0/1} = 60 \Rightarrow F_n = 89 \Rightarrow n = 10$$

با مراجعه به جدول ۲-۳ در می یابیم عدد ۶۰جزواعداد فیبو ناتچی نیست؛ F_n را برابر ۸۹ می گیریم که نتیجه می دهد $\ell = 0/0674$. پس تعداد مشاهدات (n)برابر ۱۰مشاهده کافی است.

k=۱

$$\lambda_1 = b_1 - \frac{F_{n-1} = F_9}{F_n = F_{10}}(b_1 - a_1) = 5 - \frac{55}{89}(6) \cong 1/3$$

یــــــا

$$= a_1 + \frac{F_{n-2} = F_8}{F_n = F_{10}}(b_1 - a_1) = -1 + \frac{34}{89}(6) \cong 1/3$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1} = F_9}{F_n}(b_1 - a_1) = -1 + \frac{55}{89}(6) = 2/7$$

یــــــا

$$= b_1 - \frac{F_{n-2} = F_8}{F_n = F_{10}}(b_1 - a_1) = 5 - \frac{34}{89}(6) \cong 2/7$$

مرحله اصلی گام ۱:با مراجعه به شکل در می یابیم $\theta(\lambda_1) > \theta(\mu_1)$ به گام ۲ می رویم

$$a_{k+1} = a_2 = \lambda_1 = 1/3 \quad , \ b_2 = b_1 = 5 \quad \lambda_2 = \mu_1 = 2/7$$

$$\mu_{k_{+1}} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$$

$$\mu_2 = a_2 + \frac{F_{10-1-1} = 34}{F_{10-1} = 55}(\overset{5}{b_2} - \overset{1/3}{a_2}) = 3/6$$

$$\theta(\lambda_2) > \theta(\mu_2)$$

$$k = 2$$

$$a_3 = \lambda_2 = 2/7 \ , \ b_3 = b_2 = 5 \qquad \lambda_3 = \mu_2 = 3/6$$

$$\mu_3 = a_3 + \frac{F_{10-2-1} = 21}{F_{10-2} = 34}(\underset{5}{b_3} - \underset{2/7}{a_3}) = 4/1$$

همینطور ادامه می دهیم. پایان مثال ▲

شایان ذکر است که روش فبیونانچی در یافتن نقطه بهینه یک توابع تک کوهانه بسیار کاراست مثال ص۳۵۴بازارا و دیگران (۲۰۰۶) نیز در مورد جستجوی فیبوناتچی و مثال ص ۳۶۵ Sivazlian&Stanfel(۱۹۷۵) برای کاربرد روش فیبوناتچی در مساله بیشینه سازی قابل مطالعه است.

تمرینات

مطلوبست رسم شکل تابع در مسایل زیر به کمکMATLAB وحل آنها بروش جستجوی فیبوناتچی

۱-مطلوبست حل $x\in[-۲ \quad ./۵]$ $\text{Min } \theta(x)=x^{۲}+۲x$ بروش جستجوی فیبوناتچی با شرط توقف$\varepsilon=۰.۰۱$ $\ell\leq۰/۲,$

جواب۰,۸۴۶۲ - -۱,۰۳۸۵ پس از ۶مشاهده ۴ تکرار

۲-مطلوبست حل $\text{Min } \theta(x)=x^{۲}-۳x \quad x\in[۰ \quad ۲]$

$\varepsilon=۰.۰۰۱ \quad \ell\leq۰/۱,$

[۰,۷۶۱۹ ۰,۶۶۶۷] پس از ۷ مشاهده ۵ تکرار؟

۳-مطلوبست حل $x\in[۰ \quad ۲۵]$ $\text{Min } \theta(x)=۳x^{۲}-۲۱.۶x-۱۰۰$ بروش جستجوی فیبوناتچی با شرط توقف$\varepsilon=۰.۵$ $\ell\leq۲/۲,$

جواب ۳,۸۴۶۲ ۱,۹۲۳۱ پس از ۶مشاهده ۴ تکرار

۴-مطلوبست حل $x\in[-۱ \quad ٤]$ $\text{Min } \theta(x)=۳x^{۲}-۱۰x-٤$ بروش جستجوی فیبوناتچی با شرط توقف$\varepsilon=۰.۰۱$ $\ell\leq۰/۱,$

جواب ۱,۷۳۴ ۱,۶۳۶۴ پس از ۹مشاهده ۷ تکرار

۵-با $\varepsilon=۰.۰۱$ $\ell\leq۰/۲,$ مطلوبست حل $x\in[۰ \quad ۳]$ $\text{Min } \theta(x)=۳x^{۲}-۲x$

جواب[۰,۴۲۸۶ ۰,۲۸۵۷] پس از ۷مشاهده۵تکرار

۶-مطلوبست حل $\text{Min } \theta(x)=x^{۲}+۱ \quad x\in[-۱ \quad ۰/۷۵]$

$\varepsilon=۰.۰۱ \quad \ell\leq۰/۲۵,$

جواب [۰,۰۹۳۸ - ۰,۱۲۵۰] پس از ۵ مشاهده ۳ تکرار

۷-مطلوبست حل $x \in [-۲ \quad ۲]$ $\text{Min } \theta(x) = x^۲ - ۲x$ $\varepsilon = ۰.۰۱$, $\ell \leq ۰/۲$

جواب [۱,۴۹۲۱ ۰,۹۸۴۲] پس از ۵ تکرار

۸-یک برنامه برای الگوریتم فیبو ناتچی به یکی از زبانهای برنامه نویسی نوشته و آنرا برای یکی از مسائل فوق اجرا کنید

برنامه در محیط متلب برای کمینه سازی توابع یک متغیره با روش فیبوناتچی چنین می تواند آغاز شود

```
% Fibbonacci Search Method  for minimization
 temp=input('Enter function(x is a variable):','s');
f=inline(temp)
a=input('Enter a, the left endpoint of the interval:');
b=input('Enter b, the right endpoint of the interval:');
tol=input('Enter  length of final  uncertainty  interval :');
e=input('Enter e, distinguishability constant:');
fib(۱)=۱;fib(۲)=۲;
for i=۲:۱۰۰
   fib(i+۱)=fib(i-۱)+fib(i); end……
```

۲-۳-۳ روش جستجوی تقسیم طلائی

یکی دیگر از روشهای جستجوی ترتیبی روش جستجوی موسوم به تقسیم طلایی(زرین) است که ذیلاً برای کمینه سازی یک تابع شبه محدب(کوازی کنوکس)اکید تشریح می‌شود[۱]. این روش هم ساده است و هم کارا (واگنر ،۱۹۶۹ص ۵۲۵)و عیب روش جستجوی فیبوناتچی را، که در آن باید تعداد مشاهدات یا ارزیابی‌ها (v) از قبل مشخص باشد، نداشته و تقریب خوبی از آنست (آوریل۱۹۷۶ص۲۳۲ آوریل،۲۰۰۳ ص۴۰۳). همان طور که بعداً خواهید دید نسبت کارائی روش تقسیم طلایی برابر $۰.۶۱۸^{v+۱}$ است.

تابع $\theta(x)$ را در نظر بگیرید که باید کمینه گردد

[۱] مراجع: ص۱۲۲مک کورمیک،۱۹۸۳و ص ٦٦٨ وینستون ١٩٩٤

$$Min \quad \theta(x)$$
$$a \le x \le b$$

در برخی نقاط ممکن است مقداری برای $\theta(x)$ وجود نداشته باشد یا حل $\theta(x) = 0$ مشکل باشد وبخواهیم بایک روش جستجو مقدارار بهینه تابع را بیابیم.

۲-۳-۲-۱ مقدمه

روش جستجوی تقسیم طلایی طی چند تکرار، بدنبال فاصله عدم قطعیت کوچکی می‌گردد که مقدار بهینه در آن قرار دارد. این روش بر پایه ۲ فرض زیر بنا شده است (Sivazilian&Stanfel, ۱۹۷۵ ص۳۶۱):

$$1) \quad \ell_{K-1} = \ell_K + \ell_{K+1} \qquad K=1,2,3,...$$

که درآن $\ell_K = b_K - a_K$ طول فاصله عدم قطعیت در پایان تکرار kام

و $\ell_{K+1} = b_{K+1} - a_{K+1}$

$$2) \quad \frac{\ell_K}{\ell_{K-1}} = \frac{\ell_{K+1}}{\ell_K} = \alpha \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad \text{یا} \quad b_{K+1} - a_{K+1} = \alpha\,(b_K - a_K)$$

یعنی نسبت طول دو فاصله عدم قطعیت متوالی برابر یک مقدار ثابت بین صفر و یک است($\alpha \in (0 \quad 1)$)

در روش تقسیم طلائی، نقاط μ_K, λ_K در بین این فاصله چنان انتخاب می‌شود که ۲ شرط فوق را ارضاء نماید.

یافتن نسبت $\boldsymbol{\alpha}$ با توجه به ۲فرض فوق:

با جایگذاری ℓ_{K-1} از فرض اول در دوم

$$\frac{\ell_K}{\ell_K+\ell_{K+1}}=\frac{\ell_{K+1}}{\ell_K}\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{\ell_{K+1}}{\ell_K}}=\frac{\ell_{K+1}}{\ell_K}$$

$$\frac{\ell_{K+1}}{\ell_K}=\alpha\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\alpha}=\alpha\Rightarrow\alpha^2+\alpha-1=0\qquad \alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0/618\\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}=-1/618\end{cases}$$

نسبت ۲ فاصله منفی نمی‌شود پس $\alpha=0/618$.

همانطور که ذیلاً نشان داده می‌شود. روش تقسیم طلائی تقریب خوبی از جستجوی فیپونانچی است(آوریل،۲۰۰۳ ص ۴۰۳) زیرا نسبت مورد استفاده در الگوریتم فیبوناتچی برای تعیین نقاط($\frac{F_{n-1}}{F_n}$)در n های نسبتاً بزرگ بر نسبت طلایی (α)منطبق می شود (از n=۱۲ ببعد این انطباق برقرار است)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cong 0.618$$

اثبات:

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\qquad n\geq 2$$

$$\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{F_{n-1}}{F_{n-1}}+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\gamma\qquad \frac{1}{\gamma}=1+\gamma\Rightarrow\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$$

پایان اثبات ■

۲-۳-۲-۲ وجه تسمیه روش تقسیم طلائی

برای پی بردن به وجه تسمیه روش تقسیم‌بندی طلائی، پاره‌خط $[0 \quad 1]$ درشکل زیر را در نظر بگیرید که به دو بخش تقسیم شده است (وینستون، ۱۹۹۴ص ۶۷۴).



شکل ۲-۱۴

در هنر و معماری گفته می شود پاره خط فوق به دو بخش طلائی تقسیم شده است اگر

$$\frac{\text{طول تمام پاره خط}}{\text{طول بخش بزرگتر}} = \frac{\text{طول بخش بزرگتر}}{\text{طول بخش کوچکتر}}$$

براحتی قابل نشان دادن است که برای اینکه پاره خط به طور طلائی تقسیم شود α باید برابر $\alpha=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ باشد.

موارد کاربردی نسبت طلایی

تقسیم طلائی کاربردهای فراوان در طبیعت و خلقت خداوندو در هنر و معماری دارد، به کتاب برگامین و همکاران(۱۹۶۳) رجوع شود(به نقل از۱۹۷۵ ,Sivazlian&Stanfel ص۳۶۳). ازجمله جاهایی که این نسبت دیده می شود:

در بدن و مجسمه سازی برخی نسبت ها برابر نسبت طلایی است.

نسبت ضلع به قطر ۵ ضلعی منتظم برابر $\alpha=۰/۶۱۸$ است و

نسبت وتر روبرو به زاویه ۳۶ درجه به شعاع هر دایره برابر $\alpha=۰/۶۱۸$ است. در ضمن داریم:

$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+....}}}}=۰/۶۱۸, \qquad \frac{۱}{۰/۶۱۸}=۱/۶۱۸$$

$$\left(\frac{۱}{۰/۶۱۸}\right)^{۲}=(۱/۶۱۸)^{۲}=۲/۶۱۸, \qquad \frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+...}}}}}=۰/۶۱۸$$

محل قرار گرفتن مسجد شیخ لطف اله اصفهان در یک ضلع میدان امام اصفهان، ضلع را به طور طلایی تقسیم نموده است[1].

[1] از کتاب ,Jason Elliot,۲۰۰۶ Mirror of the Unseen St. Martin's Press (با تشکراز آقای علی بازرگان)

قابل ذکر است که در حل معادله تفاضلی جستجوی فیبوناتچی که دنباله اعداد را تولید می نماید یعنی $F(n)-\mathbf{F(n-1)}-\mathbf{F(n-2)}=\mathbf{0}$ به نسبت طلایی برخورد می گردد. بدین ترتیب که راه حلی مانند اعمال تبدیل z تابع $F(n)$، که در اینجا با $Z_F(z)$ نشان داده می‌شود، روی طرفین حاصل زیر را به همراه می آورد:

$$Z_F(z)=Z_F(z)(Z^{-1}+Z^{-2})$$

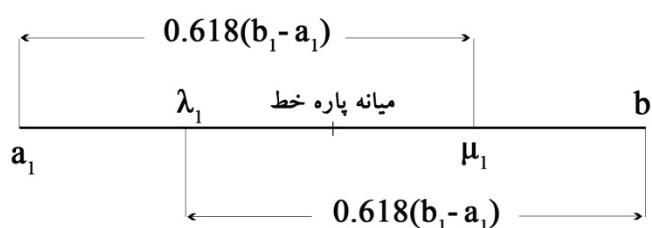
وباز نویسی آن، معادله شاخص $z^2-z-1=0$ را می‌دهد که جواب آن $\frac{1}{\alpha}$ و $-\alpha$ است (لی و ژائو[1]،۲۰۱۳)که در آن $\alpha = 0.618$ نسبت طلایی است. این ۲ جواب در نوشتن جواب عمومی معادله تفاضلی فوق الذکر بکار می آید.

۲-۳-۲-۳خلاصه روش تقسیم طلائی

برای کمینه سازی یک تابع شبه محدب(کوازیکنوکس)اکید مثل $\theta(x)$ در فاصله $[a_1 \quad b_1]$

مرحله آغازین: مقدار $\ell>0$ را بعنوان طول فاصله عدم قطعیت نهائی برگزینید. μ_1,λ_1 رادر فاصله $[a_1 \quad b_1]$ طوری انتخاب کنید که

$$\mu_1=a_1+\alpha(b_1-a_1)$$
$$\lambda_1=a_1+(1-\alpha)(b_1-a_1)=b_1-\alpha(b_1-a_1)$$



شکل۲-۱۵

مقدار تابع را در این دو نقطه قرینه نسبت به میانه پاره خط بدست آورید یعنی $\theta(\lambda_1),\theta(\mu_1)$ را. آنگاه K را برابر یک قرار داده و به مرحله اصلی بروید.

[1] Li & Zhao

مرحله اصلی **گام ۱**

اگر $b_k - a_k < \ell$ متوقف شوید جواب بهینه در $[a_k \quad b_k]$ قرار دارد.

درغیر این صورت

اگر $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$است به گام ۲ بروید

اگر $\theta(\lambda_k) \le \theta(\mu_k)$است به گام ۳ بروید.

گام۲

b_{k+1}, a_{k+1} را چنین قرار دهید.

$$b_{k+1} = b_k \, , a_{k+1} = \lambda_k$$

$$\lambda_{K+1} = \mu_k \quad , \quad \mu_{k+1} = a_{k+1} + (\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$$

$\theta(\mu_{K+1})$ را محاسبه و به گام ۴ بروید.

گام ۳

b_{k+1}وa_{k+1} را برابر مقادیر زیر قرار دهید:

$$b_{k+1} = \mu_k \, , a_{k+1} = a_k$$

به علاوه

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}), \qquad \mu_{k+1} = \lambda_k$$

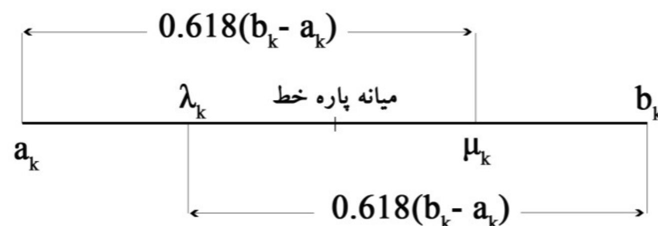
or

$$\lambda_{k+1} = b_{k+1} - \alpha(b_{k+1} - a_{k+1}), \qquad \mu_{k+1} = \lambda_k$$

$\theta(\lambda_{k+1})$ را محاسبه و به گام ۴ بروید.

گام ۴ k را با $k+1$ جایگزین و به گام ۱ بروید.

موقعیت ۲ نقطه در هر تکرار روش تقسیم طلایی در شکل ۲-۱۶ داده شده است:



شکل ۲-۱۶ موقعیت نقاط در هر تکرار روش تقسیم طلایی

۲-۳-۲-۴ نسبت کارایی روش تقسیم طلایی

طول بازه عدم قطعیت را درشروع تکرار K+۱ (پایان تکرار K ام)به $\ell_K = (b_k - a_k)$ یا

در پایانv مشاهده(منظور محاسبه vمقدار تابع درv نقطه) به L_v نشان می دهیم ، براساس ص۳٦۳ Sivazlian&Stafenl (۱۹۷٥) :

$$\frac{L_v}{L_0} = 0.618^{v-1} \qquad \equiv \qquad \frac{\ell_K}{L_0} = 0.618^{K}$$

که درآن

ℓ_K طول بازه عدم قطعیت در پایان تکرارK ام

L_v طول بازه عدم قطعیت پس از v بار مشاهده(بارمحاسبه تابع) و

$L_0 = b_1 - a_1$ طول بازه عدم قطعیت اولیه است

اثبات: چون نسبت بازه های عدم قطعیت متوالی ثابت است پس

$$\frac{\ell_K}{\ell_{K-1}} = \alpha \Rightarrow \ell_K = \alpha\ell_{K-1} = \alpha(\alpha\ell_{K-2}) = \alpha^2(\alpha\ell_{K-3}) = \ldots \Rightarrow$$

$$\ell_K = \alpha^K (b_1 - a_1) \overset{\alpha=0/618}{\Rightarrow} \ell_K = 0.618^K L_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\ell_K}{L_0} = 0.618^K$$

پایان اثبات ■

اگر تعداد تکرار برابرK باشد،تعداد مشاهدات در اولین تکرار ۲ بوده ودر بقیه عملاً یک مشاهده جدید داریم. پس تعداد مشاهدات کل یکی بیش از تعداد تکرار کل است. به عبارت دیگر اگر تعداد مشاهده برابر vباشد تعداد تکرار برابر

$K = v - 1$

است واگر ℓ طول فاصله عدم قطعیت نهایی در پایان vمشاهده و(پایان تکرار kام) باشد داریم

$$\frac{L_{نهایی} = \ell}{L_{اولیه} = L_0} = 0.618^{v-1} = 0.618^K \qquad L_{نهایی} = \ell_K = L_v = \ell = b_k - a_k \quad .$$

که در آن

$b_K - a_K$ طول بازه عدم قطعیت درپایان تکرار Kام(شروع تکرار K+1) می باشد.

L_v طول بازه عدم قطعیت پس از vمشاهده .

۲-۳-۲-۵ تعیین تعداد تکرار

اگر فاصله نهایی عدم قطعیت (ℓ) داده شده باشد، تعداد تکرار لازم از رابطه $\frac{\ell_k}{L_\cdot} = \cdot.\text{٦١٨}^k$ بدست می‌آید. واگر ℓ به صورت نسبتی از $L_\cdot$ داده شده باشد یا به طور معادل نسبت کارایی به صورت حداکثر داده شده باشد یعنی اگر $\cdot < a < \text{١}$ $\frac{\ell}{L_\cdot} \le a$ داده شده باشد آنگاه چون $\cdot/\text{٦١٨}^K \le a$ پس:

$$v = K + \text{١}, \qquad K \ge \frac{\ln(a)}{\ln \cdot/\text{٦١٨}} \qquad , K \in \{\text{١}, \text{٢}, \text{٣}, \ldots\}$$

انتخاب شود.

مثال[1] ۲-۱۱ (ص ۳۵۰ بازاراو همکاران،۲۰۰۶) :

مطلوبست جواب مساله زیر از طریق جستجوی تقسیم طلایی

$$\min \theta(\lambda) = \lambda^{\text{٢}} + \text{٢}\lambda \qquad -\text{٣} \le \lambda \le \text{٥} \qquad \ell \le \cdot/\text{٢}$$

حل[2]:

تابعی که باید کمینه شود، شبه محدب(کوازی کنوکس)اکید است و طول فاصله عدم قطعیت اولیه برابر ۸ می‌باشد. در اینجا قصد اینست که طول فاصله عدم قطعیت نهایی حداکثر ۰/۲ شود یعنی

$$L_{\text{نهایی}} = \ell \le \cdot.\text{٢} \Rightarrow \frac{\ell}{L_\cdot} \le \frac{\cdot/\text{٥}}{\cdot/\text{٥} - (-\text{٢})} \Rightarrow (\cdot/\text{٦١٨})^{v-\text{١}} \le \cdot/\cdot\text{٢٥}$$

---

[1] مثالهای ص۶۷۱ وینستون (۱۹۹۴) ، ص۱۲۳مک کورمیک(۱۹۸۳) و ص ۵۲۶ واگنر(۱۹۶۹) درمورد جستجوی تقسیم طلایی قابل مطالعه است.

[2] این یک مثال برای کاربرد روش تقسیم طلایی است و الا جواب دقیق $\lambda = -\text{١}$ دارد:مشتق دوم غیرمنفی است پس مساله مینیمم دارد $\frac{d\theta(\lambda)}{d\lambda} = \cdot \Rightarrow \text{٢}\lambda + \text{٢} = \cdot \Rightarrow \lambda = -\text{١}$

$$K \geq \frac{\ln ۰/۰۲۵}{\ln ۰/۶۱۸} = ۷/۶۷ \rightarrow K \geq ۸ \rightarrow v-۱ \geq ۸ \Rightarrow v \geq ۹$$

تکرار K=۱

$$\lambda_۱ = b_۱ - (\alpha)(b_۱ - a_۱) = ۵ - (۰.۶۱۸)[۵-(-۳)] = ۰.۰۵۶$$

یا

$$\lambda_۱ = a_۱ + (۱-\alpha)(b_۱ - a_۱) = -۳ + (۱-۰.۶۱۸)[۵-(-۳)] = ۰.۰۵۶$$

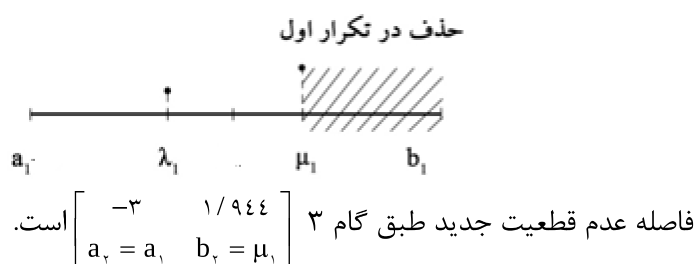
$$\mu_۱ = -۳ + (۰.۶۱۸)(۸) = ۱/۹۴۴$$

$$\theta(\lambda) = \lambda^۲ + ۲\lambda$$

$$\theta(\lambda_۱) = (۰.۰۵۶)^۲ + ۲(۰.۰۵۶) = ۰.۱۱۵$$

$$\theta(\mu_۱) = ۱/۹۴۴^۲ - ۲(۱/۹۴۴) = ۷/۶۷۷ > \theta(\lambda_۱)$$

$$\Rightarrow \theta(\mu_۱) > \theta(\lambda_۱)$$



فاصله عدم قطعیت جدید طبق گام ۳ $\begin{bmatrix} -۳ & ۱/۹۴۴ \\ a_۲ = a_۱ & b_۲ = \mu_۱ \end{bmatrix}$ است.

تکرار K=۲

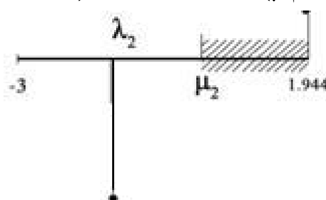
$$\lambda_۲ = -۳ + (۱-\alpha)(۱/۹۴۴ + ۳) = -۱/۱۱۲$$

یا

$$\lambda_۲ = ۱/۹۴۴ - (\alpha)(۱/۹۴۴ + ۳) = -۱/۱۱۲$$

$$\mu_۲ = \lambda_۱ = ۰/۰۵۶$$

$$\theta(\lambda_۲) = (-۱/۱۱۲)^۲ + ۲(-۱/۱۱۲) = -۰/۹۸۷ < \theta(\mu_۲ = ۰/۰۵۶) = ۰/۱۱۵$$



فاصله عدم قطعیت جدید طبق گام ۳: $b_۳ = \mu_۲ = ۰/۰۵۶$ $\quad a_۳ = a_۲ = -۳$

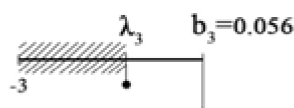
تکرار K=۳

$$\lambda_{۳} = -۳ + (۱-\alpha)(۰/۰۵۶+۳) = -۱/۸۳۲ \quad \text{or} \quad \lambda_{۳} = ۰/۰۵۶ - \alpha(۰/۰۵۶+۳) = -۱/۸۳۲$$

$$\mu_{۳} = \lambda_{۲} = -۱/۱۱۲$$

$$\theta(\lambda_{۳}) = (-۱/۸۳۲)^{۲} + ۲(-۱/۸۳۲) = -۰/۳۰۸$$

$$\theta(\mu_{۳}) = \theta(-۱/۱۱۲) = -۰/۹۸۷$$



فاصله عدم قطعیت جدید طبق گام ۳:

$$a_{۴} = \lambda_{۳} = -۱/۸۳۲ \qquad b_{۴} = b_{۳} = ۰/۰۵۶$$

تکرار K=۴

$a_{۴} = -۱,۸۳۲ \quad b_{۴} = ۰,۰۵۶$

$\lambda_{۴} = \mu_{۳} = -۱,۱۱۲$

$\mu_{۴} = a_{۴} + \alpha\,(b_{۴} - a_{۴}) = -۱,۸۳۲ + ۰,۶۱۸(۰,۰۵۶-(-۱,۸۳۲)) = -۰,۶۶۵۲$

$\theta(\lambda_{۴}) = (-۱,۱۱۲)^{۲} + ۲(-۱,۱۱۲) = -۰,۹۸۸$

$\theta(\mu_{۴}) = (-۰,۶۶۵۲)^{۲} + ۲(-۰,۶۶۵۲) = -۰,۸۸۸$

$\theta(\lambda_{۴}) < \theta(\mu_{۴})$



بازه عدم قطعیت جدید طبق گام ۳: [-۱,۸۳۲ , -۰,۶۶۵۲]

تکرار K=۵

$a_{5} = -۱,۸۳۲ \quad b_{۵} = -۰,۶۶۵۲$

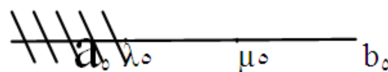
$\lambda_{۵} = a_{۵} + (۱-\alpha)(b_{۵} - a_{۵}) = -۱,۸۳۲ + (۱-۰,۶۱۸)(-۰,۶۶۵۲-(-۱,۸۳۲)) = -۱,۳۸۶$

$\mu_{۵} = \lambda_{۴} = -۱,۱۱۲$

$\theta(\lambda_{۵}) = (-۱,۳۸۶)^{۲} + ۲(-۱,۳۸۶) = -۰,۸۵$

$\theta(\mu_{۵}) = (-۱,۱۱۲)^{۲} + ۲(-۱,۱۱۲) = -۰,۹۸۸$

$\theta(\lambda_{۵}) > \theta(\mu_{۵})$



بازه عدم قطعیت جدید = [۱,۳۸۶- , ۰,٦٦٥۲-]

تکرار K=۶

$a_۶= -۱,۳۸۶ \quad b_۶ = -۰,۶۶۵۲$

$\lambda_٦ = \mu_۵ = -۱,۱۱۲$

$\mu_٦ = a_٦ + \alpha (b_٦ - a_٦) = -۱,۳۸٦+ ۰,٦۱۸(-۰,٦٦٥۲-(-۱,۳۸٦))= -۰,۹٤$

$\theta(\lambda_٦) =(-۱,۱۱۲)^۲ +۲(-۱,۱۱۲) = -۰,۹۸۸ , \quad \theta(\mu_٦) =(-۰,۹٤)^۲ +۲(-۰,۹٤) = -۰,۹۹٦٤$

$\theta(\lambda_٦)> \theta(\mu_٦)$



بازه عدم قطعیت جدید = [۱,۱۱۲- , ۰,٦٦٥۲-]

تکرار K=۷

$a_۷= -۱,۱۱۲ \quad b_۷ = -۰,۶۶۵۲$

$\lambda_۷ = \mu_٦ = -۰,۹٤$

$\mu_۷ = a_۷ + \alpha (b_۷ - a_۷) = -۱,۱۱۲+ ۰,٦۱۸(-۰,٦٦٥۲-(-۱,۱۱۲))= -۰,۸۳٦$

$\theta(\lambda_۷) =(-۰,۹٤)^۲ +۲(-۰,۹٤) = -۰,۹۹٦٤, \theta(\mu_۷) =(-۰,۸۳٦)^۲ +۲(-۰,۸۳٦) = -۰,۹۷۳۱$

$\theta(\lambda_۷)< \theta(\mu_۷)$

بازه عدم قطعیت جدید = [۱,۱۱۲- , ۰,۸۳٦-]



تکرار K=۸

$a_8= -۱,۱۱۲ \quad b_۸ = -۰,۸۳۶$

$\lambda_۸ = a_۸ +(۱- \alpha)(b_۸ - a_۸) = -۱,۱۱۲+(۱- ۰,٦۱۸)(-۰,۸۳٦-(-۱,۱۱۲))= -۱,۰۰٦$

$\mu_۸ = \lambda_۷= -۰,۹۳٦$

$\theta(\lambda_۸) =(-۱,۰۰٦)^۲ +۲(-۱,۰۰٦) = -۰,۹۹۹, \quad \theta(\mu_۸) =(-۰,۹٤)^۲ +۲(-۰,۹۳٦) = -۰,۹۸۸٤$

$\theta(\lambda_۸)< \theta(\mu_۸)$

بازه عدم قطعیت جدید = [۱,۱۱۲- , ۰.۹۴-]

بازه عدم قطعیت نهایی = [۱,۱۱۲- , ۰,۹۴-]



جدول زیرکل نتایج تکرار ها را نشان می دهد ؛پس از ۸ تکرار، [۱/۱۱۲- ۰/۹۳٦-]به عنوان فاصله عدم قطعیت بدست می آید. پایان مثال ▲

جدول ۲-۴خلاصه محاسبات روش تقسیم طلایی (ص ۳۵۱ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)

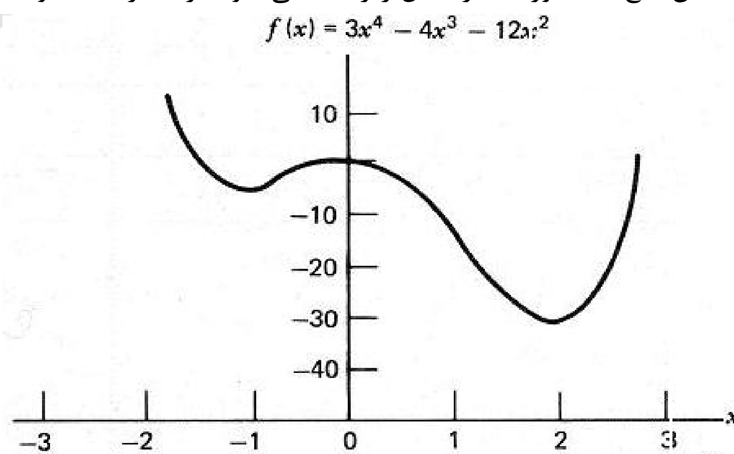
K	a_K	b_K	λ_K	μ_K	$\theta(\lambda_k)$	$\theta(\mu_k)$
۱	−۳,۰۰۰	۵/۰۰۰	۰/۰۵٦	۱/۹٤٤	۰,۱۱٥*	۷,٦٦۷*
۲	−۳,۰۰۰	۱,۹٤٤	−۱,۱۱۲	۰/۰۵٦	۰,۹۸۷*	۰,۱۱٥
۳	−۳,۰۰۰	۰,۰۵٦	−۱,۸۳۲	−۱,۱۱۲	۰،۳۰۸*	−۰,۹۸۷
٤	−۱,۸۳۲	۰,۰۵٦	−۱,۱۱۲	−۰/٦٦٤	−۰,۹۸۷	−۰,۸۸۷*
٥	−۱,۸۳۲	−۰,٦٦٤	−۱،۳۸٤	−۱,۱۱۲	−۰/۸٥۳*	−۰,۹۸۷
٦	−۱،۳۸٤	−۰,٦٦٤	−۱,۱۱۲	−۰/۹۳٦	−۰,۹۸۷	−۰,۹۹٦*
۷	−۱,۱۱۲	−۰,٦٦٤	−۰/۹۳٦	−۰/۸٤۰	−۰,۹۹٦	−۰,۹۷٤*
۸	−۱,۱۱۲	−۰،۸٤۰	−۱/۰۱٦	−۰/۹۳٦	−۱*	−۰/۹۹٦
	−۱,۱۱۲	−۰،۹۳٦	نتیجه ۸ تکرار			

علامت * بیانگر آنست که این مقدار تابع در تکرار مربوطه محاسبه شده است.

مثال ۲–۱۲: (مک کورمیک،۱۹۸۳ ص۱۲٤)

مطلوبست مینیمم تابع $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳ - ۱۲x^۲$ درفاصله [۳   ۱] با روش تقسیم طلایی به طوری که نسبت کارایی کمتر از ۰/۱ گردد.

حل این تابع همانطور که در شکل زیردیده می شود در ۲ بازه تک کوهانه است.



فاصله اولیه برای استفاده از الگوریتم تقسیم طلایی به صورت $a_۱=۱, b_۱=۳$ است لذا

$$\mu_۱ = ۱/۷۶۳۹۳۲ \qquad \lambda_۱ = ۲/۳۶۰۶۸۰۲$$

محاسبه تعدادتکرار

$$۰.۶۱۸^{K} < ۰.۱ \rightarrow K > \frac{log\,۰.۱}{log\,۰.۶۱۸} = \frac{-۱}{-۰.۲۰۹} = ۴.۷۸ \rightarrow K = ۵$$

جدول زیر محاسبات تکرارهارانشان میدهد. در تکرارهای بعداز تکرار۱ تنها یک محاسبه جدید لازم است. زیر نقطه جدید و مقدار تابع متناظر باآن خط کشیده شده است.

جدول ۲-۵ نقاط و مقادیر تابع در آن نقاط در روش تقسیم طلایی(مک کورمیک،۱۹۸۳ص ۱۲٤)

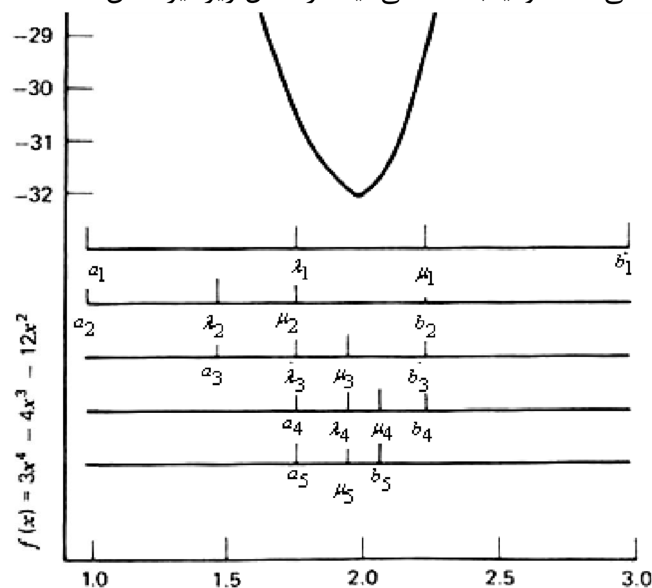
K	b_K	a_K	λ_K	$f(\lambda_K)$	μ_K	$f(\mu_K)$
۱	۱/۰	۳,۰	۱,۷٦۳۹۲۰	- ۳۰,۲٤۷٦	۲,۲۳۳٦۰٦۸۰	-۲۹,۷۲۱٤
۲	۱/۰	۲/۲۳٦۱	۱,٤۷۲۱۳٦۰	-۲٤,٦۷۷۷	۱,۷٦۳۹۳۲۰	-۳۰،۲٤۷٦
۳	۱/٤۷۲۱	۲/۲۳٦۱	۱,۷٦۳۹۲۰	-۳۰,۲٤۷٦	۱,۹٤٤۲۷۱۹	۳۱,۸۹۱٦
٤	۱/۷٦۳۹	۲/۲۳٦۱	۱,۹٤٤۲۷۱۹	-۳۱,۸۹۱٦	۲,۰۵۵۷۲۸۱	-۳۱,۸۸٤۷
۵	۱/۸۷۵۳	۲/۰۵۵۷	۱,۸۷۵۳	-۳۱,٤۷۸۹	۱,۹٤٤۲۷۱۹	-۳۱,۸۹۱۸
	۱/۸۷۵۳	۲/۰۵۵۷	نتیجه ۵ تکرار			

در پایان تکرار پنجم (K=۵) نسبت کارایی به مقدار زیر می رسد

$$\text{نسبت کارایی} = ۰/۶۱۸^{۵} = ۰/۰۹$$

و فاصله عدم قطعیت نهایی [۲/۰۵۵۷ ۱/ ۸۷۵۳] خواهد بود.

سلسه نقاطی که متوالیاً بدست می آید در شکل زیر نیز نشان داده شده است.



پایان مثال ▲

۲-۳-۲-۶برنامه متلب برای کمینه سازی تابع یک متغیره با تقسیم طلایی

یک برنامه متلب برای حل مسایل کمینه سازی **توابع یک متغیره با** روش طلایی چنین است:

برنامه متلب برای کمینه سازی توابع یک متغیره با روش تقسیم طلایی

```
% Golden Section Search Method
temp=input('Enter function(x is a variable):','s');
f=inline(temp)
a(۱)=input('Enter x Lower bound:');
b(۱)=input('Enter x Upper bound:');
l=input('Enter l (lenght of final interval):')
r=((۵^۰,۵)-۱)/۲;
x(۱)=a(۱)+(r)*(b(۱)-a(۱));
y(۱)=b(۱)-r*(b(۱)-a(۱));
for i=۱:۱۰۰
if f(x(i))<f(y(i))
a(i+۱)=y(i);
b(i+۱)=b(i);
y(i+۱)=x(i);
x(i+۱)=a(i+۱)+r*(b(i+۱)-a(i+۱));
else
a(i+۱)=a(i);
b(i+۱)=x(i);
y(i+۱)=b(i+۱)-(r)*(b(i+۱)-a(i+۱));
x(i+۱)=y(i);
end
if abs(b(i+۱)-a(i+۱))<l
break
end
end
A=a(i+۱);B=b(i+۱);
disp('Final interval is:')
disp([A,B])
x(i)=(A+B)/۲;
x(i)
disp(['Number of iteration =' ] ), i
```

مثال: ۲-۱۳

مطلوبست حل مساله زیر با روش تقسیم طلایی با $\ell<۰/۲۵$

$$\begin{aligned}&\text{Max } -x^۲-۱\\&\text{s.t.}\\&-۱\le x\le ۰/۷۵\end{aligned}$$

حل:

برای اینکه از الگوریتم داده شده که برای کمینه سازی است استفاده کنیم مساله را چنین می نویسیم

$$\begin{aligned}&\text{Min } x^۲+۱\\&\text{s.t.}\\&-۱\le x\le ۰/۷۵\end{aligned}$$

حل:

برای این مساله با$\ell<۰/۲۵$ پس از ۵ تکرار در روش طلایی به فاصله عدم قطعیت [۰/۰۷۶۲- ۰/۸۱۵] می رسیم(ص۶۷۱ وینستون ،۱۹۹۴)

حل با نرم افزارمتلب (کد فوق)

```
Enter function(x is a variable):x^۲+۱
f     = Inline function:
    f(x) = x^۲+۱
Enter x Lower bound:-۱
Enter x Upper bound:.۷۵
Enter l (lenght of final unceartainty interval):.۲۵
Final uncertainty interval is:
  - ۰,۰۷۶۲          ۰,۰۸۱۶
Midpoint is
ans =۰,۰۰۲۷        number of iterations:  i     = ۵
```

▲

تمرينات

مطلوبست رسم شکل تابع مسایل زیر بامتلب وحل آنها بروش تقسیم طلایی

۱) $x\in[۱\ \ ۱٥]$ $\text{Min}\ \theta(x)=x^{٤}-۱٥x^{۳}-۷۲x^{۲}-۱۱۳٥x$

الف)با شرط توقف $\ell\leq ۰/٥$ جواب ۱۰,۶۱۶۸ ۱۰,۱۳۴۷ در تکرار۷

ب) با شرط توقف $|\theta(x_{\nu})-\theta(x_{\nu-۱})|\leq ۰/۱$

۲-مطلوبست حل $x\in[۳\ \ ٥]$ $\text{Min}\ \theta(x)=(x-٤.۱)^{۲}$ باه $K=$

جواب [۴/۲۳۶ ۴/۰۵۵]

۳-مطلوبست حل $\ell\leq ۰/۲$ $\lambda\in[-۳\ \ ۳]$ $\text{Min}\ \theta(\lambda)=\lambda^{۲}+۲\lambda$

جواب [۰,۹۱۴۹ - ۱,۰۴۲۶ -] در تکرار ۸

۴-مطلوبست حل $\ell\leq ۰/٤$ $x\in[-۲\ \ ۲]$ $\text{Min}\ \theta(x)=x^{۲}+۳x-۲$

جواب در تکرار پنجم: [۱,۲۷۸۶- ۱,۶۳۹۳-]

۵-مطلوبست حل $\ell\leq ۰/٤$ $x\in[-۲\ \ ۲]$ $\text{Min}\ \theta(x)=۲x^{۲}+٤x$

جواب در تکرار پنجم: [۰,۸۳۲۷ - ۱,۱۹۳۳-]

۶-مطلوبست حل $\ell\leq ۰/۲$ $x\in[۰\ \ ۲]$ $\text{Min}\ \theta(x)=x^{۳}-x^{۲}-x+۱$

جواب در تکرار پنجم: [۱,۰۵۵۷ ۰,۸۷۵۴]

۷=مطلوبست حل $\ell\leq ۰/۱$ $x\in[۰\ \ ۲]$ $\text{Min}\ \theta(x)=x^{۳}+\frac{۲}{(۱+x)^{۲}}$ بروش تقسیم طلایی جواب در تکرارهفتم: [۰,٦۰۹۹ ۰,٥٤۱۰]

۸=مطلوبست حل $\ell\leq ۰/۱$ $x\in[۱\ \ ۲]$ $\text{Min}\ \theta(x)=x^{۳}-۲\sin(x)$ بروش تقسیم طلایی جواب در تکرارپنچم: [۱,۰۹ ۱۰]

۲-۳-۳ نکاتی در مورد چند روش جستجو ی یک متغیره

جدول زیر نکاتی را در مورد چند روش جستجو یک متغیره بدون استفاده از مشتق نشان می‌دهد(اقتباس از بازاراو همکاران، ۲۰۰۶ص۳۵۵).

جدول۲-۶ چند ویژگی ۴ روش جستجوی توابع یک متغیره

نام روش جستجو یک متغیره بی محدودیت بدون استفاده از مشتق (فارسی)	(انگلیسی)	n (تعداد مشاهدات)= کوچکترین عدد صحیح مثبت ارضاء کننده رابطه نامساوی	معیار کارائی	رابطه n و تعداد تکرار(K)
یکنواخت	Uniform or Exhaustive	$n \geq \frac{b_۱ - a_۱}{\frac{\ell}{۲}} - ۱$		
۲رسته‌ای	Dichotomous	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{n}{۲}} \leq \frac{\ell}{b_۱ - a_۱}$	تقریباً $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{n}{۲}}$	$K = \frac{n}{۲}$
تقسیم طلائی	Golden Section	$(۰/۶۱۸)^{n-۱} \geq \frac{\ell}{b_۱ - a_۱}$	$(۰/۶۱۸)^{n-۱}$	$K = n - ۱$
فیبونانچی	Fibonacci	F_n کوچکترین عدد بدست آمده ازدنباله اعدادفیبوناتچی ارضاء کننده نامساوی $F_n \geq \frac{b_۱ - a_۱}{\ell}$	$\frac{۱}{F_n}$	

طبق جدول فوق هرچه n بیشتر شود طول فاصله نهایی و مقدار معیار کارایی کمتر می شود که دال بر دقت و کارایی بیشتر است. در ضمن تعداد مشاهدات تابعی از $\frac{b_۱ - a_۱}{\ell}$ می‌باشد؛ برای یک مقدار ثابت این کسر، آن الگوریتم که با تعداد مشاهدات کمتر به جواب می رسد، کاراتر است، می‌توان تحقیق کرد که کاراترین این ۴ متد، روش فیبوناتچی است بعد از آن تقسیم طلائی بعد دورسته‌ای و سپس یکنواخت.

برای n باندازه کافی بزرگ، روش طلائی با فیبوناتچی یکسان عمل می‌کنند زیرا میزان کارایی هر دو به هم می رسد(بازارا، ۲۰۰۶ص۳۵۵):

$$\left(\frac{1}{F_n}\right)_{n\to\infty} = (0/618)^{n-1}$$

اضافه می نمایدکه روشهای ۲رسته ای وتقسیم طلائی این حسن را دارند که دانستن تعداد ارزیابی‌ها قبل از شروع جستجو برخلاف روش فیبوناتچی لزومی ندارد. ازجمله روشهای جستجوی دیگردر زمینه بهینه سازی بی محدودیت که مستقیماً وبدون اطلاعی ازگرادیان یا مشتق تابع میتوانند جواب بهینه تابع را بدست دهند جستجوی دکتر دبلیو اچ سوان [۱] می باشد.

روشهای بهینه‌سازی با جستجوی خطی (Line Search)به کمک مشتق برای توابع یک متغیره بی محدودیت

برای کمینه سازی توابع یک متغیره در فاصله بسته روشهایی وجود دارد که از مشتق استفاده می کنندازجمله:

روش ۲ نیم سازی [۲]که از مشتق اول استفاده می کند و روش نیوتن که از مشتق اول ودوم استفاده می کند.

دراین بخش این ۲روش تشریح می‌شود: روشهایی هم در همین راستا تحت عنوان شبه نیوتن وجود دارد که به عنوان نمونه می توان به رائو(۲۰۰۹) مراجعه نمود. برای تعریف جستجوی خطی به بخش۲-۱-۳ مراجعه شود.

۲-۴روش جستجوی دو نیم سازی(Bisection)

بازارا و همکاران(۲۰۰۶)

روش جستجوی دو نیم سازی ازجمله روشهای کمینه کردن یا بیشینه کردن توابع یک متغیره بی محدودیت است که از مشتق استفاده می کند. فرض کنید که

---

[۱] Swann, W.H. ۱۹۷۲ Direct Search Methods. In Numerical Methods for Unconstrained Optimization; Murray, W., Ed.; Academic Press: Salt Lake City, UT, USA, ; pp. ۱۳–۲۸

[۲] bisection

بخواهیم تابعی تک متغیره و**مشتق‌پذیر** مثل θ را در فاصله بسته $[a_1 \quad b_1]$ کمینه کنیم تابع محدب گونه(سودو کنوکس)است (بازاراو همکاران،۲۰۰۶) و مشتق آن معلوم. توجه کنید $\theta'(a_1)\leq 0 \;, \theta'(b_1)\geq 0$(مک کور میک،۱۹۸۳ ص ۱۲۰)طول فاصله عدم قطعیت در این روش در هر تکرار نصف می‌شود وبعد از n مشاهده یا kتکرار طول بازه عدم قطعیت به $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(b_1-a_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{K}(b_1-a_1)$ کاهش می‌یابد[1].

۲–۴–۱ محاسبه تعداد مشاهدات (n) و تعداد تکرار(K) لازم

اگر طول فاصله عدم قطعیت نهایی(ℓ)داده شده باشد از $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(b_1-a_1)\leq \ell$ یا $\frac{b_1-a_1}{\ell}\leq 2^{n}$ برای یافتن n استفاده شود. n کوچکترین عدد صحیح است که نامساوی را ارضاء می‌کند, برای یافتن تعداد تکرار از $\frac{\ell}{b_1-a_1}\leq 2^{-K}$ استفاده شود.K کوچکترین عدد صحیح است که این نامساوی را ارضاء کند,

این روش در هر تکرار، فاصله عدم قطعیت را نصف می‌کند و شامل الگوریتمی ساده و غالباً مفید است. روش از این خاصیت استفاده می‌کند که در تابع یک کوهانه، علامت مشتق تابع ($\theta'(x)$)بیش از یکبار عوض نمی‌شود تابعی را که این روش بهینه می‌کند فقط در نقطه بهین(اپتیمال) دارای مشتق صفر است(واگنر،۱۹۶۹ ص ۵۲۶).

۲–۴–۲ خلاصه روش دو نیم سازی برای کمینه سازی تابع سودوکنوکس

$[a_1 \quad b_1]$فاصله عدم قطعیت اولیه میباشد و می خواهیم تابع محدب گونه (سودوکنوکس) θ رادر این فاصله بسته متناهی کمینه کنیم. یادآوری می شود توابع محدب‌گونه مشتق‌پذیر(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص ۳۵۶) و اکیداً تک کوهانه اند

---

[1] طول فاصله عدم قطعیت درآخرتکرار kام در روش ۲نیم سازی(Bisection) برابر $0/5^{k}(b_1-a_1)$ ودر تقسیم طلایی $0/618^{K}(b_1-a_1)$ است

(راویندران[۱]،۲۰۰۸ ص ۶-۲). ذیلاً خلاصه روش دو نیم سازی آورده می شود (از بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص ۳۵۶).

مرحله آغازین

با داشتن فاصله اولیه $[a_۱ \quad b_۱]$وطول فاصله مجاز نهائی(ℓ)، n را به صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت از $\frac{b_۱ - a_۱}{\ell} \geq ۲^n$بیابید. شماره تکرار($k$)را برابر ۱قرار داده و به مرحله اصلی بروید.

مرحله اصلی

گام۱

λ_k را برابر $\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{۲}$ (میانه$[a_k \quad b_k]$)قرار دهید، مشتق تابع را در λ_k حساب کنید.

حالتA اگر $\theta'(\lambda_k) = ۰$ متوقف شوید λ_k جواب بهینه است.

حالتB اگر $\theta'(\lambda_k) > ۰$ به گام ۲ بروید

حالتC اگر $\theta'(\lambda_k) < ۰$به گام ۳ بروید

گام ۲

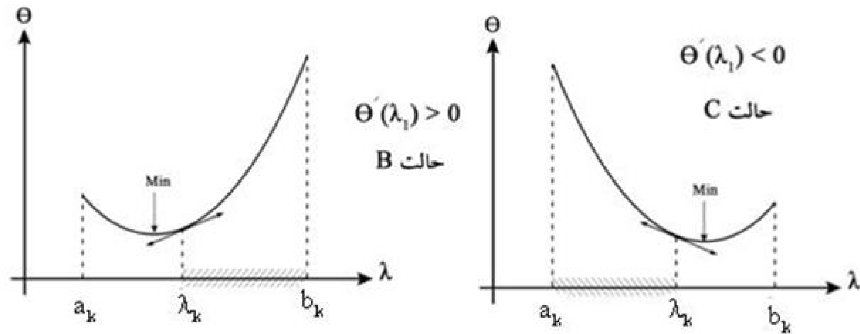
پس از قرار دادن $a_{k+۱} = a_k$ و $b_{k+۱} = \lambda_k$ به گام ۴ بروید(سمت راست بازه عدم قطعیت قبلی حذف می شود)

گام ۳

پس از قرار دادن $a_{k+۱} = \lambda_k$ و $b_{k+۱} = b_k$ به گام ۴ بروید. (سمت چپ بازه عدم قطعیت قبلی حذف می شود)

---

[۱] Ravindran



شکل ۲-۱۸

گام٤

اگر $k \neq n$ ، k را برابر k+۱ قرار داده و گام ۱ را تکرار کنید.

معیار توقف

اگر k=n متوقف شوید مینیمم تابع در فاصله $[a_{n+1} \quad b_{n+1}]$ است(بازارا وهمکاران ،۲۰۰۶).

با

اگرفاصله $[a_{k+1} \quad b_{k+1}]$ باندازه کافی کوچک بود متوقف شوید و گرنه گام ۱ را تکرار کنید. (مک کورمیک،۱۹۸۳):

مثال ۲-۱۴ :[1](مثال ۸.۲.۱ صفحه ۳۵۷ کتاب بازاراو همکاران،۲۰۰٦برای روش دونیمسازی)

مطلوبست مینیمم تابع$\lambda^۲ + ۲\lambda$در فاصله $-۳ \leq \lambda \leq ۶$ با فرض $\ell \leq ۰.۲$.

حل: مرحله آغازین: به دست آوردن n، تعداد مشاهدات:

$$\ell \geq \frac{b_۱ - a_۱}{۲^n} \Rightarrow ۰.۲ \geq \frac{٦ - (-۳)}{۲^n} \Rightarrow ۲^n \geq ٤٥$$

$$n \geq {}^{\log ٤٥}\!/_{\log ۲} \Rightarrow n \geq ٥.٤٩ \Rightarrow n = ٦_{\text{حداقل}}$$

$$k = ۱$$

گام ۱ $\quad \lambda_۱ = \frac{a_۱ + b_۱}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱.٥$ و $\theta'(\lambda_۱) = ۲\lambda_۱ + ۲$

[1] از اقایان مهندس مسعود حاج غنی و مهندس سعید محمد زاده دانش آموختگان دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

$$\theta'(\lambda_1) = 5.0 > 0 \xrightarrow{\text{گام ۲}} \begin{cases} a_{k+1} = a_k \rightarrow a_2 = a_1 = -3.0 \\ b_{k+1} = \lambda_k \rightarrow b_2 = \lambda_1 = 1.5 \end{cases}$$

$$k = 1 \neq n \Longrightarrow k \rightarrow k + 1 = 2$$

بازه عدم قطعیت جدید[۱,۵ ۳-]می باشد.

k=۲

$$\lambda_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-3 + 1.5}{2} = -0.75 \text{ و } \theta'(\lambda_2) = 0.5 > 0 \longrightarrow \text{گام ۲}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{k+1} = a_k \rightarrow a_3 = a_2 = -3.0 \\ b_{k+1} = \lambda_k \rightarrow b_3 = \lambda_2 = -0.75 \end{cases}$$

$$k \rightarrow k + 1 = 3$$

بازه عدم قطعیت جدید [۰,۷۵- ۳-] می باشد.

k=۳

$$\lambda_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{-3.75}{2} = -1.875 \text{ و } \theta'(\lambda_3) = -1.75 < 0$$

$$\Longrightarrow a_{k+1} = \lambda_k \rightarrow a_4 = \lambda_3 = -1.8750 \quad , \quad b_{k+1} = b_k \rightarrow b_4 = b_3 = -0.75$$

$$k \rightarrow k + 1 = 4$$

بازه عدم قطعیت جدید[۷۵ .۰- ۱,۸۷۵-]میباشد.

k=٤

$$\lambda_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{-2.625}{2} = -1.3125 \text{ و } \theta'(\lambda_4) = -0.625 < 0$$

$$\Longrightarrow a_5 = \lambda_4 = -1.3125 \quad , \quad b_5 = b_4 = -0.75$$

$$k \rightarrow k + 1 = 5$$

بازه عدم قطعیت جدید[۰,۷۵- ۱.۳۱۲۵-] می‌باشد

---

k=٥

$$\lambda_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{-2.0625}{2} = -1.0313 \text{ و } \theta'(\lambda_5) = -0.0625 < 0$$

$$a_6 = \lambda_5 = -1.0313 \quad , \quad b_6 = b_5 = -0.75$$

$$k \rightarrow k + 1 = 6$$

بازه عدم قطعیت جدید:[۰,۷۵-   ۱,۰۳۱۳-].

---

k=٦

$$\lambda_6 = \frac{a_6 + b_6}{۲} = \frac{-۱.۷۸۱۳}{۲} = -۰.۸۹۰۷ \quad , \quad \theta'(\lambda_6) = ۰.۲۱۸۶ > ۰$$

$k = ۶ = n$ شرط توقف ارضاء شده

$a_7 = a_6 = -۱.۰۳۱۳ \ , \ b_7 = \lambda_6 = -۰.۸۹۰۷$

بازه عدم قطعیت جدید:[۰,۸۹۰۷- ۱,۰۳۱۳-] با طول۰/۱۴

مینیمم تابع در بازه $[a_7 , b_7] = [-۱.۰۳۱۳, \quad -۰.۸۹۰۷]$است.

نقطه میانی این بازه (۰,۹۶۱۰-)، تقریبی برای نقطه بهینه تابع است.

خلاصه نتایج تکرارها در جدول زیر دیده می شود

جدول ۲-۷ خلاصه نتایج تکرارهای مثال ۲-۱۴

تکرار	a_k	b_k	λ_k	$\theta'(\lambda_k)$
۱	-۳,۰	۶,۰	۱,۵۰	۵
۲	-۳,۰	۱,۵۰	-۰,۷۵	۰,۵
۳	-۳,۰	=۰,۷۵	-۱,۸۷۵	-۱,۷۵
٤	-۱,۸۷۵	=۰,۷۵	-۱,۳۱۲۵	-۰,٦۲۵
٥	-۱,۳۱۲۵	=۰,۷۵	-۱,۰۳۱۳	-۰,۰٦۲۵
٦	-۱,۰۳۱۳	=۰,۷۵	۰,۸۹۰۷-	۰,۲۱۸٦
نتیجه	-۱,۰۳۱۳	=۰,۸۹۰۷		

جدول زیر تعداد مشاهدات و نسبت طول فاصله عدم قطعیت به فاصله اولیه در روشهای تقسیم طلایی یا زرین و دو نیم سازی را برای این مثال مقایسه نموده است. در مقایسه، ۲نیم سازی بهتر عمل کرده است.

جدول ۲-۸ مقایسه روشهای تقسیم طلایی و دو نیم سازی در حل مثال ۲-۱۴

تکرار (k)	دو نیم سازی(Bisection)		تقسیم طلایی(Golden Section)	
	تعدادمشاهده در پایان تکرار	$\frac{\ell_k}{L_۰ = L\text{اولیه}} = ۲^{-k}$	تعدادمشاهده در پایان تکرار	$\frac{\ell_k}{L_۰} = ۰.٦۱۸^k$
۱	۱	۰/٥	۲	۰/٦۱۸
۲	۲	۰/۲٥	۳	۰/۳۸۱۹
۳	۳	۰/۱۲٥	٤	۰/۲۳٦
٤	٤	۰/۰٦۲٥	٥	۰/۱٤٥۹
٥	٥	۰/۰۳۱۳	٦	۰/۰۹
٦	٦	۰/۰۱٥٦	۷	۰/۰٥٦

جدول ۲-۸ مقایسه روشهای تقسیم طلایی و دو نیم سازی در حل مثال ۲-۱۴

تقسیم طلایی (Golden Section)		دو نیم سازی (Bisection)		
$\frac{\ell_k}{L_0} = 0.618^k$	تعدادمشاهده در پایان تکرار	$\frac{\ell_k}{L_0 = L_{\text{اولیه}}} = 2^{-k}$	تعدادمشاهده در پایان تکرار	تکرار (k)
۰/۰۳٤	۸	۰/۰۰۷۸	۷	۷
۰/۰۲۱۳	۹	۰/۰۰۳۹	۸	۸
۰/۰۱۳۱	۱۰	۰/۰۰۲	۹	۹
۰/۰۰۸	۱۱	۰/۰۰۰۹۷	۱۰	۱۰

پایان مثال ▲

مثال ۲-۱۵: (ص ۵۲۸ واگنر،۱۹٦۹)

مینیمم تابع زیررا به روش دو نیم سازی وروش تقسیم طلائی در فاصله $[0,10]$ بیابید $\ell \le 0/4$.

$$\theta(x) = \begin{cases} -x & 0 \le x \le 6 \\ x-12 & x \ge 6 \end{cases}$$

برای هر ۲ روش nرا به دست آورید.

حل

با روش دو نیم سازی

$$0/4 \ge \ell \ge \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

یا

$$\frac{1}{\ell} \le \frac{2^n}{b_1 - a_1} \qquad \ell \le 0/4 \Rightarrow \frac{2^n}{b_1 - a_1} \ge \frac{1}{0/4} \qquad 2^n \ge \frac{10-0}{0/4} = 25$$

$$n \ge \frac{\log 25}{\log 2} = 4.6 \qquad n \ge 5$$

$n=5= k$

نتایج حل مثال۲-۱۵ با روش دو نیم سازی

طول فاصله در خاتمه	$\frac{\text{طول فاصله عدم قطیت نهاي}}{\text{طول فاصله اولیه}} = \frac{\ell_k}{L_0}$	$\frac{d\theta}{dx}\Big\|_{x=\lambda_k} = \theta'(\lambda_k)$	$\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{٢}$	b_k	a_k	تکرار (k)
٥	٠/٥	-١	$\lambda_١ = ٥$	$b_١$=١٠	$a_١$=٠	١
٢/٥	٠/٢٥	١	$\lambda_٢$=٧/٥	١٠	٥	٢
١/٢٥	٠/١٢٥	١	٦/٢٥	٧/٥	٥	٣
٠/٦٢٥	٠/٠٦٢٥	-١	٥/٦٢٥	٦/٢٥	٥	٤
٠/٣١٢٥	٠/٠٣١٢٥	-١	٥/٩٤	٦/٢٥	٥/٦٢٥	٥
٠/٣١	نتیجه ⟵			٦/٢٥	٥/٩٤	

جواب در بازه(۵/۹۴   ۶/۲۵) قرار دارد که دارا ی طول ۰/۳۱ می باشد.

حل با روش تقسیم طلائی

$$(٠/٦١٨)^{n-١} \geq \frac{\ell}{b_١ - a_١} \Rightarrow \ell \leq (٠/٦١٨)^{n-١}(b_١ - a_١) \Rightarrow$$

$$\frac{١}{\ell} \geq \frac{١}{٠/٤} \Rightarrow (٠/٦١٨)^{n-١}(b_١ - a_١) \geq ٠/٤ \Rightarrow$$

$$(٠/٦١٨)^{n-١} \geq \frac{٠/٤}{١٠} \Rightarrow n-١ \geq \frac{\log(٠/٠٤)}{\log(٠/٦١٨)} \Rightarrow n-١ \geq ٦/٧$$

$$n \geq ٨ \quad \longrightarrow \quad k+١ \geq ٨ \quad k \geq ٧$$

اگر $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$

$$\lambda_{K+١} = \mu_k \quad , \quad \mu_{k+١} = a_{k+١} + (\alpha)(b_{k+١} - a_{k+١}) \qquad \& \quad b_{k+١} = b_k \, , a_{k+١} = \lambda_k$$

اگر $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$

$$b_{k+١} = \mu_k \; , \; a_{k+١} = a_k$$

$$\lambda_{k+١} = b_{k+١} - \alpha(b_{k+١} - a_{k+١}), \qquad \mu_{k+١} = \lambda_k$$

نتایج حل مثال با روش تقسیم طلایی در جدول زیر آمده است

جدول ۲-۹ نتایج حل مثال ۲-۱۵ با روش تقسیم طلایی

K	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$\theta(\lambda_k)$	$\theta(\mu_k)$	$\frac{\ell_k}{L_0} = ۰/۶۱۸^k$	ℓ_k
۱	۰	۱۰	۳/۸۲	۶/۱۸	−۳/۸۲	−۵/۸۲	۰/۶۱۸	۶/۱۸
۲	۳/۸۲	۱۰	۶/۱۸	۷/۶۴	−۵/۸۲	−۴/۳۶	۰/۳۸۲	۳/۸۲
۳	۳/۸۲	۷/۶۴	۵/۲۸	۶/۱۸	−۵/۲۸	−۵/۸۲	۰/۲۳۶	۲/۳۶
٤	۵/۲۸	۷/۶٤	۶/۱۸	۶/۷۳	−۵/۸۲	−۵/۲۷	۰/۱٤۶	۱/٤۶
۵	۵/۲۸	۶/۷٤	۵/۸٤	۶/۱۸	−۵/۸٤	−۵/۸۲	۰,۰۹۰۱	۰/۹
۶	۵/۲۸	۶/۱۸	۵/۶۲	۵/۸٤	−۵/۶۲	−۵/۸٤	۰,۰۵۵۷	۰/۵
۷	۵/۶۲	۶/۱۸	۵/۸٤	۵/۹۷	−۵/۸٤	−۵/۹۷	۰,۰۳٤٤	۰/۳
	۵/۸۳	۶/۱۸	نتیجه⟵					

پایان مثال ▲

ازآنجا که الگوریتم ها با معیاری به نام نرخ همگرایی مقایسه می شوند، ذیلاً به آن می پردازیم.

۲–۵ تعریف نرخ همگرایی

در واقع در الگوریتم هایی مثل روش نیوتن که بعد ازاین خواهد آمد، دنباله ای از اعداد تولید می‌شود. مقصود اینست که ببینیم سرعت رسیدن به هدف در این دنباله چه میزان است سرعتی که با آن یک دنباله همگرا به سمت حدش میل می کند نرخ همگرایی نامیده می‌شود (ویکی پدیا). فرض کنید یک دنباله مثل $\{x_n\}$ متعلق به R^n داریم که با میل n به سمت بینهایت به نقطه $\bar{x}$ میل می کندو برای تمام kهای نسبتاً کافی بزرگ و $x_k \neq \bar{x}$، نرخ همگرایی چنین تعریف می‌شود (آوریل ۱۹۷۶ص۲۱۹ آوریل،۲۰۰۳ ص۳۸۲و بازارا وهمکاران، ۲۰۰۶ ص ۳۳۱):

اگر یک عدد غیر منفی p موسوم به مرتبه همگرایی[۱] ویک عدد نامتناهی $\alpha \neq ۰$ موسوم به نسبت همگرایی چنان وجود داشته باشد که:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\| x_{k+1} - \bar{x} \|}{\| x_k - \bar{x} \|^p} = \alpha < \infty$$

---

[۱] order of convrgence

گفته می‌شود دنباله با مرتبه (نرخ) p به سمت $\bar{x}$ همگرایی دارد. $\|x_k - \bar{x}\|$ که در واقع طول بردار $A = x_k - \bar{x}$ است خطای kامین مقدار بدست آمده نامیده می شود وبه لگاریتم آن گاه معیار دقت اطلاق می گردد.

در عمل انواع نرخ زیر از اهمیت برخوردار است:

اگر p=۱ و $0 < \alpha < 1$ نرخ همگرایی دنباله را به سمت $\bar{x}$ خطی گویند (بازارا و همکاران,۲۰۰۶ ص ۳۳۱)

اگر p>۱ نرخ همگرایی دنباله را به سمت $\bar{x}$ مافوق خطی گویند.

تعریف ضعیف تر همگرایی مافوق خطی به صورت زیر است ((α = ۰ , p = ۱ :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|} = 0$$

۲ حالت خاص ما فوق خطی چنین است.

اگر p=۲ و $\alpha < \infty$ نرخ همگرایی دنباله را کوادراتیک(از درجه دوم) گویند(بازاراو همکاران, ۲۰۰۶ ص ۳۳۱)

اگر p=۳ نرخ همگرایی دنباله را درجه ۳ گویند.

توجه

- هر چه p بیشتر باشد سرعت همگرایی بیشتراست (بازارا و همکاران ،۲۰۰۶ ص ۳۳۱)
- برای یک p ثابت هرچه α کوچکتر، همگرایی سریع تر است(بازاراو همکاران، ۲۰۰۶ ص ۳۳۲)

-همگرایی مافوق خطی بیش از همگرایی خطی است وبه ویژه همگرایی کوادراتیک بسیار تا بسیار سریع تر از همگرایی خطی است.

-غالب الگوریتم های برنامه ریزی غیر خطیِ مورد علاقه، همگرایی خطی و کوادراتیک دارند.

همگرایی خطی نرخ رضایت بخشی برای الگوریتم های برنامه ریزی غیر خطی است(بستر کاس،۱۹۹۹ ص ۶۵). -

-روش تقسیم طلایی از نظر همگرایی از نوع خطی است(مک کورمیک ص ۱۲۳).

- نرخ همگرایی روش دو نیمسازی خطی است(مک کوور میک ص ۱۲۰)

-نرخ همگرایی روش نیوتن، حداقل کوادراتیک (در جه ۲) است(مک کور میک،۱۹۸۳ قضایای ص ۱۱۱و۱۱۲). تعبیر این مطلب این است که نهایتاً هر تکرار روش نیو تن،دقت برآورد را [حداقل] ۲ برابرنسبت به تکرار قبل می نماید. در حالی که دقت متدی بنام سکانت[1]، که نرخ همگرایی آن ۱/۶۱۸ می باشد، باندازه ۶۲٪ هر تکرار، افزایش می یابد (مککورمیک ص ۱۱۹).

توضیح در مورد دقت روش نیوتن اینطور است: قبلا گفته شد که از $\log\|x_k - \bar{x}\|$ گاه به عنوان دقت روش جستجو یاد می‌شود. با توجه به کوادراتیک (درجه ۲)بودن نرخ همگرایی روش نیوتن ،برای k های نسبتاً بزرگ این روش طبق تعریف $\frac{\|x_{k+1}-\bar{x}\|}{\|x_k-\bar{x}\|^2} = \alpha$ و لذا

$$\log\|x_{k+1} - \bar{x}\| = \log\alpha + 2\log\|x_k - \bar{x}\|$$

پس

$$\log\|x_{k+1} - \bar{x}\| - 2\log\|x_k - \bar{x}\| > 0$$
$$\log\|x_{k+1} - \bar{x}\| > 2\log\|x_k - \bar{x}\| \quad .$$

اینست که می گوئیم دقت هر تکرار از تکرارهای نسبتاً بالای روش نیوتن نسبت به تکرار قبل آن حداقل ۲ برابر می شود.

در جدول مثال ۲-۱۹ هم دیده می شود از یک تکرار به بالا این نا مساوی صدق می‌کند. **یعنی دقت روش نیوتن حداقل ۲ برابر است.** به عبارت دیگرخطای تکرار بعدی کمتر از خطای تکرار قبلی است.

مثال ۲-۱۶: [2] برای نرخ همگرایی خطی

$$x_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n \equiv 0.1,\quad 0.01,\quad 0.001, \ldots \quad \bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\frac{\|x_{K+1}-\bar{x}\|}{\|x_K-\bar{x}\|} = \frac{\left\|\left(\frac{1}{10}\right)^{K+1} - 0\right\|}{\left\|\left(\frac{1}{10}\right)^{K} - 0\right\|} = \frac{1}{10} \qquad \lim_{K\to\infty}\frac{\|x_{K+1}-\bar{x}\|}{\|x_K-\bar{x}\|} = \frac{1}{10} \blacktriangle$$

مثال ۲-۱۷:برای نرخ همگرایی ما فوق خطی

$$x_n = \frac{1}{n!} \equiv 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \qquad \bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

---

[1] Secant

[2] مرجع هر سه مثال: یک pdf نوشته آر . ام فروند درMIT پیرامون همگرایی(convergence)

$$\frac{\|x_{K+1}-\bar{x}\|}{\|x_K-\bar{x}\|}=\frac{\left\|\frac{1}{(k+1)!}-0\right\|}{\left\|\frac{1}{(k)!}-0\right\|}=\frac{1}{k+1} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\|x_{K+1}-\bar{x}\|}{\|x_K-\bar{x}\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$$

پس طبق تعریف دوم، نرخ همگرایی این دنباله مافوق خطی است. ▲

مثال ۲-۱۸: برای نرخ همگرایی کوادراتیک

$$x_n=\left(\frac{1}{10}\right)^{2^n}\equiv 0.01,\ 0.0001,\ 0.00000001,\ \ldots$$

$$\bar{x}=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

$$\frac{\|x_{K+1}-\bar{x}\|}{\|x_K-\bar{x}\|^p}=\frac{\left\|\left(\frac{1}{10}\right)^{2^{k+1}}-0\right\|}{\left\|\left(\frac{1}{10}\right)^{2^k}-0\right\|^p},\ p=2\rightarrow\lim_{k\to\infty}\frac{\|x_{K+1}-\bar{x}\|}{\|x_K-\bar{x}\|^p}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2^{k+1}}}{\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{2^k}\right)^2}=1<\infty$$ ▲

تمرینات

۱-مطلوبست مینیمم $f(x)=x^2-3x+5$ درفاصله $[2 \quad 3]$ با روش دو نیمسازی وطول فاصله نهایی حداکثر یک صدم($\ell \le 0.01$).

جواب ۷ تکرار $[۲/۰۰۷۸ \quad ۲]$

۲- مطلوبست مینیمم $f(x)=x^3-x^2-x+1$ در فاصله $[-2 \quad 3]$ با روش دو نیمسازی و $\ell \le 0.2$ جواب $[\frac{۹}{۸} \quad \frac{۳۱}{۳۲}]$ در ۵ تکرار.

۳- مطلوبست مینیمم $f(x)=x^2+1$ در فاصله $[-1 \quad 0.75]$ با روش دو نیمسازی و $\ell \le 0.25$ جواب $[-۰/۱۲۵ \quad ۰/۰۹۳۸]$ ۳ تکرار.

۴- مطلوبست مینیمم $f(x)=x^2-3$ در فاصله $[1 \quad 2]$ با روش دو نیمسازی و $\ell \le 0.01$ جواب $[۱ \quad ۱/۰۰۷۸]$ ۷ تکرار.

۵- مطلوبست حل $Min\ f(x)=x^۲-۲x$ در بازه $[0.5 \quad 1.5]$ با $\ell \le ۰.٤$

جواب: $x^*=۱$ در تکرار اول.

۶-نشان دهید اگر $x \in (۰ \quad ۱)$ دنباله $\{x^n\}$ به طور خطی به صفر همگراست و نه به صورت کوادراتیک.

۷-مطلوبست حل $\min f(x)=x(x-۱.۵)$ در $[0 \quad 1]$ با روش دو نیمسازی و $\ell \le ۰.٤$. جواب: $x^*=۰/۷۵$ در ۲ تکرار.

۸ -نشان دهید دنباله های $\{\frac{1}{n}\}$, $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n^3}\}$, ... همگرایی خطی دارند.

۹ - آیا دنباله $\{x^{2^n}\}, n=0,1,2,...$ با شرط $x \in (۰ \quad ۱)$ به طور خطی به صفر همگراست؟

۱۰-برای حل $\min f(x)=x(x-۱.۵)$ در فاصله $[0 \quad 1]$. تعداد تکرار را طوری تعیین کنید طول بازه نهایی حداکثر ۱۰٪ طول بازه اولیه باشد یا $\frac{l}{L_۰}=۲^{-k} \le ۰.۱$.

۱۱- آیا دنباله $\left\{(\frac{۱}{n})\right\}^{n^۲}$ برای اعداد طبیعی($n \in N$) به صورت خطی همگراست یا به صورت کوادراتیک؟

۲-۶ روش نیوتن برای بهینه سازی توابع یک متغیره بدون محدودیت

اساس روش نیوتن این است که از تقریب مرتبه دوم بسط تیلور تابع استفاده می کند. بسط تیلور تابع یک متغیره $\theta(\lambda)$ حول λ_k چنین است (از کتاب فقیددکتر اصغرپور، ۱۳۸۱)

$$\theta(\lambda)=\theta(\lambda_k)+\frac{\lambda-\lambda_k}{1!}\theta'(\lambda_k)+\frac{(\lambda-\lambda_k)^2}{2!}\theta''(\lambda_k)+\ldots$$
$$+\frac{(\lambda-\lambda_k)^n}{n!}\theta^{(n)}(\lambda_k)+\frac{(\lambda-\lambda_k)^{n+1}}{(n+1)!}\theta^{(n+1)}(\lambda_k)$$

با صرفنظر از جملات بالاتر تقریب مرتبه دوم تابع $\theta(\lambda)$ حول λ_k چنین می شود:

$$\theta(\lambda)\cong\theta(\lambda_k)+\frac{(\lambda-\lambda_k)}{1!}\theta'(\lambda_k)+\frac{(\lambda-\lambda_k)^2}{2!}\theta''(\lambda_k)$$

این تقریب را که یک سهمی است با $q(\lambda)$ نشان می‌دهیم:

$$q(\lambda)=\theta(\lambda_k)+\theta'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)+\frac{(\lambda-\lambda_k)^2}{2}\theta''(\lambda_k)$$

از $q(\lambda)$ که چند جمله ای در جه ۲ بر حسب λ است نسبت λ به مشتق می‌گیریم

$$q'(\lambda)=0+\theta'(\lambda_k)+\theta''(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)$$

و مساوی صفر قرار می‌دهیم. فرض کنید $q(\lambda)$ به ازای نقطه λ_{k+1} صفر شود پس

$$\lambda=\lambda_{k+1}\Rightarrow q'(\lambda_{k+1})=0\Rightarrow\theta'(\lambda_k)+\theta''(\lambda_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=0$$

با فرض وجود داشتن مشتقات اول ودوم و غیر صفر بودن مشتق دوم در λ_k $(\theta''(\lambda_k)\neq 0)$:

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k-\frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)}$$ نقطه بهینه تابع سهمی تقریب زننده

شایان ذکر است $\frac{-\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)}$ موسوم به **جهت نیوتنی** در نقطه λ_k است.

اگر تابع $\theta(\lambda)$ واقعاً درجه۲ باشد اپتیمم آن دقیقاً λ_{k+1} به ازای k=۱ خواهدبود (اقتباس از Himmelblau,۱۹۷۲page۷۵). اما برای یک تابع کلی غیرخطی λ_{k+1} اپتیمم تابع اصلی نیست.

۲-۶-۱ الگوریتم روش نیو تن

الگوریتم روش نیوتن را برای یافتن مینیمم تابع $\theta(\lambda)$ با نقطه اولیه λ_1 و ثابت تمیز ε می توان چنین نوشت:

$Algorithm \quad Newton(\lambda_1, \theta(\lambda), \varepsilon)$

$k := 1$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)}$$

$k := k + 1$

توقف:

اگر

$|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < \varepsilon$

یا

$\theta'(\lambda) < \varepsilon$

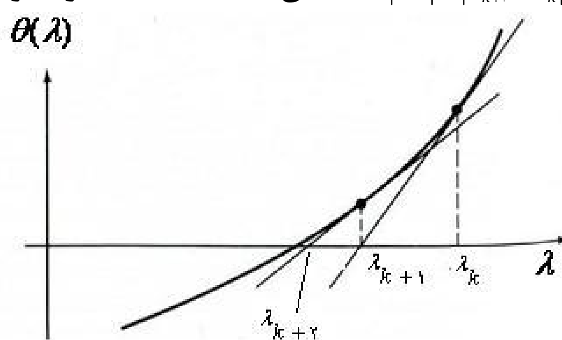
بایدبطور مرتب تابع را حول نقطه های جدید بسط دهیم و مینیمم تابع سهمی حاصل را بدست آوریم. یعنی به طور متوالی رابطه $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)}$ تکرار باید شود تا وقتی که $|\Delta\lambda| = |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \varepsilon$ یا $\theta'(\lambda_k) < \varepsilon$ (بازارا و همکاران، ۲۰۰۶ ص ۳۵۸).
ε یک عدد اسکالر کوچک از قبل تعیین شده مانند یک صدم است.

مکرراً رابطه فوق را اجرا کردن یعنی بسط مکرر حول نقطه جدید یعنی λ_{k+1} و بدست آوردن توابع سهمی جدید برای برازش به تابع و محاسبه اپتیمم آنها .

روش نیوتن برای توابع ۲ بار مشتق پذیری که مشتق دوم برای λ_k در تکرار ها صفر نشود مناسب است. برای شروع کردن این متد، λ_k اولیه با شرط $\theta''(\lambda_k) \neq 0$ را مقداری حدس زده(در روشهای تکرار شونده گاه مقدار اولیه چند بار عوض می شود). و سپس به طور متوالی ازرابطه

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)} \qquad k = 1,2,3...$$

استفاده می شود. شکل۲-۲۰ این روش تکرار شونده را نشان می دهد. k تاجایی پیش می رود که $|\Delta\lambda| = |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \varepsilon$ یا تاجایی که $\theta'(\lambda) < \varepsilon$.(**شرط توقف**).



شکل ۲-۲۰ روش نیوتن

(شکل ۱-۸ آوریل،۲۰۰۳ ص۲۱٦ آوریل،۱۹۷٦)

ذیلاً یک برنامه برای روش نیوتن در محیط متلب آمده است

یک برنامه در محیط MATLAB برای روش نیوتن در بهینه سازی توا بع یک متغیره بی محدودیت

```
syms x
temp=input('Enter function(x as variable):');
x۰=input('Enter x۰:');
e=input('Enter epsilon i.e. distinguishability
constant:');
A=diff(temp);
f=inline(A);
format compact
format long
a=diff(A);
g=inline(a);
if abs(g(x۰))==۰
disp('the code is terminated because the value of the
seconnd derivative at x۰ is zero ')
else
k=۱;
xn=x۰-(f(x۰)/g(x۰));
while abs(xn-x۰)>e
disp(xn);
x۰=xn;
xn=x۰-(f(x۰)/g(x۰));
k=k+۱;
```

```
end
err=abs(xn-x۰);
disp( ' the solution is : ');
disp(sprintf('k=%٤,۰f ,        xkFinal= %٤,٢f ' , k, xn))
 end
```

یک اجرا

Enter function(x as variable):(x–٣)^٤

Enter x۰:۰

Enter epsilon i.e. distinguishability constant:۰,۰۰۱

the solution is : k= ١٩ ,x_kFinal= ٣,۰۰

مثال٢-١٩: (ص ٣٩١ دکتر اصغر پور،١٣٨١)

تابع $\theta(\lambda)=(\lambda-٣)^{٤}$ را در نظربگیرید. با $\varepsilon=0.005$ نقطه میمیم این تابع را با روش نیوتن بیابید[١].

حل:

$$\theta'(\lambda)=4(\lambda-3)^3 \qquad \theta''(\lambda)=12(\lambda-3)^2$$

در هر تکرار روش نیوتن نقطه بهینه حاصل تقریبی به صورت زیر خواهد بود

$$\lambda_{k+١}=\lambda_k-\frac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)}=\lambda_k-\frac{٤(\lambda_k-٣)^{٣}}{١٢(\lambda_k-٣)^{٢}}=\lambda_k-\frac{\lambda_k-٣}{٣}$$

پس از ساده کردن:

$$\lambda_{k+١}=\frac{٢}{٣}\lambda_k+١ \qquad\qquad k=١,٢,٣,...$$

بدلخواه مبدارا نقطه شروع می گیریم یعنی $\lambda_١=۰$ (λ_kاولیه را نمی‌توان برابر ٣ انتخاب کرد زیرا $\theta''(٣)=۰$ و رابطه فوق را بطور متوالی تکرار می‌کنیم.

$K=١$

$$\lambda_٢=\frac{٢}{٣}\lambda_١+١=\frac{٢}{٣}(۰)+١=١ \qquad \lambda_{k+١}-\lambda_k=١-۰=١>\varepsilon$$

[١] گر چه مقدار جواب این مساله براحتی با مشتق گیری تابع قابل محاسبه است اما همیشه اینطور نیست مثلاً برای تابع $sinx+\frac{x^{٤}}{lnx}$.

$K = ۲$

$\lambda_{۳} = \frac{۲}{۳}\lambda_{۲} + ۱ = \frac{۲}{۳} + ۱ = \frac{۵}{۳} \qquad |\lambda_{k+۱} - \lambda_k| = |\frac{۵}{۳} - ۱| = \frac{۲}{۳} > \varepsilon$

$K = ۳$

$\lambda_{۴} = \frac{۲}{۳}\lambda_{۳} + ۱ = \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۵}{۳}\right) + ۱ = \frac{۱۰}{۹} + ۱ = ۲\frac{۸}{۹} = \frac{۱۹}{۹} \qquad |\lambda_{۴} - \lambda_{۳}| = |\frac{۱۹}{۹} - \frac{۵}{۳}| = \frac{۴}{۹} > \varepsilon$

$K = ۴$

$\lambda_{۵} = ۲\frac{۱۱}{۲۷} \qquad |\lambda_{k+۱} - \lambda_k| = |۲\frac{۱۱}{۲۷} - \frac{۱۹}{۹}| = \frac{۸}{۲۷} > \varepsilon ,$

$K = ۵$

$\lambda_{۶} = ۲\frac{۴۹}{۸۱} \qquad |\lambda_{۶} - \lambda_{۵}| = |۲\frac{۴۹}{۸۱} - ۲\frac{۱۱}{۲۷}| = \frac{۱۶}{۸۱} = ۰/۱۹۸$

$K = ۶$

$\lambda_{۷} = \frac{۲}{۳}\lambda_{۶} + ۱ = ۲\frac{۹۸}{۲۴۳} = ۲/۷۳$

k	λ_k	مینیمم سهمی‌های برازش شده $\lambda_{k+۱} = \frac{۲}{۳}\lambda_k + ۱$	$\lvert\Delta\lambda\rvert = \lvert\lambda_{k+۱} - \lambda_k\rvert$	$\log(\lVert(\lambda_{k+۱} - ۳)\rVert) - ۲\log(\lVert(\lambda_k - ۳)\rVert)$
۱	$\lambda_{۱} = ۰$	$\lambda_{۲} = ۱$	$۱ - ۰ = ۱$	−۰,۶۵۳۲
۲	$\lambda_{۲} = ۱$	$\lambda_{۳} = \frac{۲}{۳}(۱) + ۱ = \frac{۵}{۳}$	$\lvert\frac{۵}{۳} - \frac{۱}{۱}\rvert = \frac{۲}{۳} = ۰/۶۶$	−۰,۴۷۷۱
۳	$\lambda_{۳} = \frac{۵}{۳}$	$\lambda_{۴} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۵}{۳} + ۱ = \frac{۱۹}{۹}$	$\lvert\frac{۱۹}{۹} - \frac{۵}{۳}\rvert = \frac{۴}{۹} = ۰/۴۴$	−۰,۳۰۱۰
۴	$\lambda_{۴} = \frac{۱۹}{۹}$	$\lambda_{۵} = ۲\frac{۱۱}{۲۷}$	$\lvert ۲\frac{۱۱}{۲۷} - \frac{۱۹}{۹}\rvert = ۰/۲۹$	−۰,۱۲۴۹
۵	$۲\frac{۱۱}{۲۷}$	$\lambda_{۶} = ۲\frac{۴۹}{۸۱}$	$\lvert ۲\frac{۴۹}{۸۱} - ۲\frac{۱۱}{۲۷}\rvert = ۰/۱۹۸$	۰,۰۵۱۲
۶	$۲\frac{۴۹}{}$	$\lambda_{۷} = ۲\frac{۹۸}{} = ۲/۷۳$	۰/۱۳۲	۰,۲۲۷۲
۷	۲,۷۳۶۶	$\lambda_{۸} = ۲/۸۲۴۴۱$	۰/۰۸۸	۰,۴۰۳۳
۸	۲,۸۲۴۴۱	$\lambda_{۹} = ۲/۸۸۲۹۴۴$	۰/۰۵۹	۰,۵۷۹۴
۹	۲,۸۸۲۹۴۴	$\lambda_{۱۰} = ۲/۹۲۱۹۶$	۰/۰۳۹	۰,۷۵۵۵
۱۰	۲,۹۲۱۹۶	$\lambda_{۱۱} = ۲/۹۴۷۹$	۰/۰۲۶	۰,۹۳۱۶
۱۱	۲,۹۴۷۹۷	$\lambda_{۱۲} = ۲/۹۶۵۳$	۰/۰۱۷	۱,۱۰۷۷
۱۲	۲,۹۶۵۳۲	$\lambda_{۱۳} = ۲,۹۷۶۹$	۰/۰۱۱۶	۱,۲۸۳۸
۱۳	۲,۹۷۶۸۸		۰/۰۰۸	۱,۴۵۹۹
۱۴	۲,۹۸۴۶	$\lambda_{۱۵} = ۲.۹۸۹۷$	۰/۰۰۵۱	۱,۶۳۶۰
۱۵	۲,۹۸۴۹۷			

در پایان تکرار ϵ،۱۵ > $|\Delta\lambda| =$ ۰,۰۰۳۴ ، $\lambda^* =$ ۲,۹۹۳۱ لذا ۲/۹۹۳۱ به عنوان مینیمم تابع بدست می‌آید. جواب دقیق ۳= $\bar{x}$ می‌باشد. در ضمن نحوه محاسبه یکی از اعداد ستون اول سمت راست ذیلاً به عنوان نمونه آورده می شود:

K=۷ log(||($\lambda_{k+۱}$ − ۳)||)-۲log(||(λ_k-۳)||)= log(||(۲.۸۸۲۹٤۴ − ۳)||)-۲log(||(۲,۸۲۴۴۱-۳)||)= -۰,۹۳۱۶-۲*۰,۷۵۵۵

MATLAB:

log۱۰(abs(۲,۸۸۲۹۴۴-۳))-۲*log۱۰(abs(۲,۸۲۴۴۱-۳))=۰,۵۷۹۴ ▲

یکی از نکات قابل توجه در روش نیوتن سرعت همگرانی(نزدیک شدن) است. نرخ همگرایی این روش حداقل کوادراتیک (p=۲) است(مک کورمیک، ۱۹۸۳ص۱۴۷).[۱] یک تعبیر این مطلب این است که در تکرار های بالا، هر تکرار این روش دقت برآورد را حداقل ۲ برابر می‌کند(اقتباس ازص۱۲۲ مک کور میک،۱۹۸۳) که توضیح آن در پایان بخش ۲-۵ آمده است. قابل ذکر است که در مثال فوق درتکرارهای ۹۰به بالا حاصل $\frac{\|\lambda_{K+۱}-۳\|}{\|\lambda_K-۳\|^۲}$ ثابت و برابر۱/۲۳ خواهد شد.

۲-۶-۲ نکاتی پیرامون نقطه شروع در روش نیوتن

موفقیت روش نیوتن به عواملی ازجمله نقطه شروع بستگی دارد. روش نیوتن را ممکن است با یکی از روشهای دیگر جستجو توام بکار برد زیرا بهتر است که نقطه شروع(λ_Kاولیه) بقدرکافی به نقطه بهینه مطلق مساله نزدیک باشد(اصغرپور ،۱۳۷۰ ص۳۹۳) و لذا می‌توان نقطه شروع را با استفاده از سایر روشهای جستجو مشخص کرد. مثال زیر ۲ نقطه شروع را بکار می برد که در یکی دورزدگی رخ می دهد.

مثال ۲-۲۰ (ص ۳۵۸ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

مطلوبست یافتن نقطه بهینه تابع زیر با روش نیوتن

$$Min\theta(\lambda) = \begin{cases} ٤\lambda^۳ - ۳\lambda^٤ & \lambda \geq ۰ \\ ٤\lambda^۳ + ۳\lambda^٤ & \lambda < ۰ \end{cases}$$

تابع دارای مشتق اول و دوم می‌باشد پس می‌توان روش نیوتن را اعمال کرد:

---

[۱] در این مورد قضیه صفحه ۱۲۲ مک کورمیک (۱۹۸۳) قابل مطالعه است.

$$\theta'(\lambda)=\begin{cases}12(\lambda^{2}-\lambda^{3}) & \lambda\geq 0\\ 12(\lambda^{2}+\lambda^{3}) & \lambda<0\end{cases} \quad \text{و} \quad \theta''(\lambda)=\begin{cases}12(2\lambda-3\lambda^{2}) & \lambda\geq 0\\ 12(2\lambda+3\lambda^{2}) & \lambda<0\end{cases}$$

به یک نقطه شروع نیاز داریم قبل از اعمال روش نیوتن این نقطه را می‌توان از فاصله نهائی قطعیت بدست آمده از یک روش جستجو مثل روش دونیمسازی برگزید.

چند تکرار روش نیوتن برای مثال ۲-۲۰ با نقطه شروع $\lambda_1=0/4$

K	λ_k	$\theta'(\lambda_k)$	$\theta''(\lambda_k)$	مینیمم سهمی‌های برازش شده $\lambda_{k+1}=\lambda_k-\dfrac{\theta'(\lambda_k)}{\theta''(\lambda_k)}$	$\lvert\Delta\lambda\rvert$
۱	۰/٤	۱/۱٥۲	۳/۸٤	۰/۱	۰/۳
۲	۰/۱	۰/۱۰۸	۲/۰٤	۰/۰٤۷۰٥۹	۰/۰٥۲۹٤۱
۳	۰/۰٤۷۰٥۹	۰/۰۲٥۳۲٤	۱/۰٤۹٦۹۲	۰/۰۲۲۹۳٤	۰/۰۲٤۱۲٥
٤	۰/۰۲۲۹۳٤	۰/۰۰٦۱٦۷	۰/٥۳۱٤۸۱	۰/۰۱۱۳۳۱	۰/۰۱۱٦۰۳
٥	۰/۰۱۱۳۳۱	۰/۰۰۱٥۲۳	۰/۲٦۷۳۲۲	۰/۰۰٥٦۳٤	۰/۰۰٥٦۹۷
٦	۰/۰۰٥٦۳٤	۰/۰۰۰۳۷۹	۰/۱۳٤۰۷۳	۰/۰۰۲۸۰۷	۰/۰۰۲۸۲۷

موفقیت روش نیوتن به نقطه شروع هم بستگی دارد. گاه ممکن است نقطه شروع طوری باشد که در تکرارهای متوالی بهبودی حاصل نشده دچار دوزردگی شویم و مرتب جوابهاتکرار شوند.بعنوان مثال با $\lambda_1=0/6$ نتیجه چنین است.

چند تکرار روش نیوتن با نقطه شروع $\lambda_1=0/6$

k	λ_k	$\theta'(\lambda_k)$	$\theta''(\lambda_k)$	λ_{k+1}	$\lvert\Delta\lambda\rvert$
۱	۰/٦	۱/۷۲۸	۱/٤٤	−۰/٦	۱/۲
۲	−۰/٦	۱/۷۲۸	−۱/٤٤	+۰/٦	۱/۲
۳	۰/٦	۱/۷۲۸	۱/٤٤	−۰/٦	۱/۲
٤	−۰/٦	۱/۰۲۸	−۱/٤٤	۰/٦	۱/۲

پایان مثال ▲

مثال ۲-۲۱ :

مطلوبست انجام ۳ تکرار روش نیوتن برای یافتن نقطه بهینه تابع $7x-\ln x$.

حل

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\theta'(x_k)}{\theta''(x_k)}=x_k-\frac{7-\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_k^2}}$$

$$k=1\quad x_1=1\qquad x_{1+1}=1-\frac{7-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}}=-5$$

$$k=2\qquad x_3=-5-\frac{7-\frac{1}{-5}}{\frac{1}{25}}=-185$$

$$k=3\qquad x_4=-185-\frac{7-\frac{1}{-185}}{\frac{1}{(-185)^2}}=-239945$$

پایان مثال ▲

شایان ذکر است که روش نیوتن در ریشه یابی معادلات هم استفاده می شود.

۲–۷ تقریب توابع با چند جمله‌ای جهت بهینه سازی

در مسائل بهینه سازی یا ریشه یابی گاه کارکردن با تابع مشکل بوده ولی کار با تقریب تابع راحت تر است. در خاتمه این فصل به تقریب توابع با چند جمله‌ای[1] برای بهینه سازی اشاره می شود.

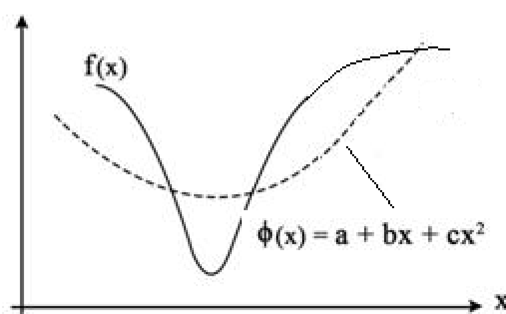
ابتدا فرض کنید می خواهیم مقدار کمینه تابع پیوسته f شبه محدب (سودو کانوکس) اکید را بدست آوریم. برای اینکار می‌توانیم تابع را با چند جمله‌ای درجه دوم(کوادراتیک) تقریب بزنیم.

---

[1] polynomial approximation of functions

در روش تقریب با چند جمله‌ای درجه دوم یا تقریب کوادراتیک، تابعی مثل f که بدنبال بهینه کردن آنیم در صورت امکان بایک تابع درجه دو مثل ϕ تقریب زده می‌شود (اقتباس از مرحوم اصغرپور،۱۳۸۱ص۳۸۹):

$$\Phi(X) = a + bx + cx^{2}$$



شکل۲-۱۹ تقریب کوادراتیک

$\phi(x)$ سه پارامتر دارد برای یافتن این سه پارامتر سه نقطه را مشخص و مقدار تابع اصلی را در آن نقاط با مقدار تابع ϕ در آنها برابر قرار داده ودستگاه را حل می‌کنند تا c,b,a بدست آید. ۳ نقطه $x_1 < x_2 < x_3$ طوری مشخص می شود که $f(x_1) > f(x_2)$ & $f(x_2) < f(x_3)$ تا تضمین کند مینیمم در $[x_1 \quad x_3]$ قرار دارد.

در روش تقریبی "جستجوی خطی با تقریب کوادراتیک[۱]" مرتباً ۳ نقطه تعیین میشود و یک تابع کوادراتیک به تابع پیوسته f برازش می شود. برای جزییات این روش جستجو به مراجعی نظیر بازاراو همکاران (۲۰۰۶) ص ۳۶۱ مراجعه شود.

شایان ذکر است که بطور کلی هر تابع پیوسته با مشتقات پیوسته با سری های کلاسیک مکلورن یا تیلور می تواند به صورت یک چند جمله ای درجه nام تقریب زده شود(برگین،۲۰۱۵قضیه ص ۲۷۳). n بستگی به دقت مورد نیاز دارد تقریب با سری مکلورن، که در واقع بسط تیلور حول مبدا می باشد، چنین است :

[۱] Quadratic-fit line search

$$f(x) \cong \sum_{۰\le i\le n} \frac{(x)^i}{i!} \times \left(\frac{d^{(i)}f(x)}{dx^i}\right)_{x=۰}$$

مثال ۲-۲۲:

مطلوبست بسط مکلورن تابع e^x.

حل

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots.$$

پایان مثال ▲

تمرینات روش نیوتن

مطلوبست رسم تابع های زیر با MATLABو یافتن مینیمم آنها با روش نیوتن

۱-تابع $۰/٦٥ - \frac{۰/۷۵}{(1+x^۲)} - (۰/٦٥x)\mathrm{atan}(\frac{1}{x})$ با نقطه شروع ۰.۱ و شرط توقف $|f'(x^*)| < \varepsilon = ۰.۰۱$.

۲-تابع $\theta(\lambda) = ۲(\lambda - ۲)^۳$ و $\lambda_۱ = ۱$ $\varepsilon = ۰/۲$

۳-تابع $6e^{-2\lambda} + 2\lambda^2$ با $\varepsilon = 0.2$ با $\varepsilon = 0.1$

۴-تابع $(x-3)^4$ و $x_1 = 1$ $\varepsilon = 0.2$

۵-تابع $(\lambda - 2)^2$ با $\varepsilon = ۰/۰۵$ $\lambda_۱ = ۰$ جواب $\lambda^* = \lambda_8 = 1/92$

۶-تابع $x \in [-1 \quad 1]$ $4x^2 + e^x$ $\varepsilon = ۰/۰۵$

۷-تابع $٤(۲\lambda - ٥)^٤$ $\varepsilon = ۰/۲$

۸ - $Min\ f(x) = x^۳ - x^۲ - x + ۱$ با $\varepsilon = ۰/۰۰۱$ نقطه اولیه را از بازه عدم قطعیت نهایی حاصل از روش تقسیم طلایی برگزینید .

۹-در مساله اول، λ اولیه را مقدار دیگری انتخاب کنید وآنرا حل کنید.

۱۰-مطلوبست $Min\ f(x)=3x^3-10x^2-56x+5$ جواب با
$x_0=2 \quad \varepsilon=0.001$

۱۱- (روش نیوتن برای ریشه یابی) نشان دهید برای تابع مشتق پذیر f ریشه f(x)=۰ از رابطه بازگشتی $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ قابل تقریب است.

۱۲- رابطه کارایی یک تولیدی(E) و تعداد کارگر(W) چنین است

$$E=\frac{-W^3}{400}+3W-39.2$$

سعی کنید با یک نرم افزار جواب این مساله برنامه ریزی غیر خطی اعداد صحیح مشخص شود؛ یعنی مشخص شود به ازای چه تعداد کارگر، کارایی ماکزیمم می شود.

هرکس در هر رشته ای هست
کارش را بد انجام دهد
عمل صالح محسوب می شود

آیت اله جوادی.



بهینه سازی مسایل غیر خطی چند متغیره بدون محدودیت



بهینه سازی غیر خطی چند متغیره بدون محدودیت[1]

هدف فصل

در این فصل ضمن ارائه چند تعریف و چند قضیه پیرامون شرایط بهینه بودن نقاط برای توابع چند متغیره، دو الگوریتم جستجو برای بهینه سازی مسایل برنامه ریزی غیر خطی چند متغیره بدون محدودیت تشریح می شود

در مبحث بهینه سازی بدون محدودیت، شرائطی تحت عنوان شرایط لازم مرتبه اول برای بهینه بودن یک نقطه و شرایط دیگری تحت عنوان شرایط لازم مرتبه دوم بهینگی و شرایط کافی مرتبه دوم برای بهینگی ارائه شده است که ذیلاً به برخی از آنها پرداخته می شود.

---

[1] unconstrained multi-varaible nonlinear programming

۳–۱ شرایط بهینگی توابع

ابتدا یادآوری می‌گردد که درتابع درجه ۲یک متغیره f ، ماکزیمم یا مینیمم بودن یک نقطه برای یک تابع با توجه به صفر بودن مشتق اول وعلامت مشتق دوم درآن نقطه مشخص می شود:

$$\begin{cases} f'(\overline{x})=0 \\ f''(\overline{x})<0 \end{cases} \quad \overline{x} \text{ ماکزیمم است}$$

$$\begin{cases} f'(\overline{x})=0 \\ f''(\overline{x})>0 \end{cases} \quad \overline{x} \text{ مینیمم است}$$

که در واقع به ترتیب شرط لازم مرتبه اول و دوم برای بهینه بودن یک نقطه مثل $\overline{x}$ برای یک تابع یک متغیره است.

چند تعریف و چند قضیه پیرامون بهینگی توابع چند متغیره [1]

فرض کنید تابع غیر خطی $f(x_1...x_n)$ را که در آن $(x_1...x_n)=\mathbf{x}\in R^n$ می خواهیم بهینه کنیم و مشتق‌های اول و دوم جزئی f موجود باشد. مشتق جزئی f نسبت به x_i را به شکل $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}$ نشان می دهیم. یک شرط لازم برای اینکه $\overline{\mathbf{x}}=(\overline{x}_1,...\overline{x}_n)$ یک اکسترمم (مینیمم یا ماکزیمم) موضعی برای NLP فوق باشد از قضیه زیر بدست می‌آید.

۳–۱–۱ شرط لازم بهینگی مرتبه اول

قضیه زیر شرط لازم مرتبه اول برای بهینه بودن موضعی و مطلق (کلی) یک نقطه مثل $\overline{\mathbf{x}}$ برای مسایل بهینه سازی چند متغیره بدون محدودیت رابیان می کند

[1] ص٦٧٤ وینستون (١٩٩٤)

قضیه ۳-۱

اگر $\overline{\mathbf{x}}$ یک اکسترمم موضعی باشد برای

$$Min(or\ Max)f(x_1 \dots x_n)$$
$$s.t.(x_1 \dots x_n) \in R^n$$

باشد آنگاه، $\nabla f(\bar{x})=0$ یا $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}=0, i=1,2,\dots,n$

اثبات به صو رت برهان خلف در مراجعی مانند وینستون (۱۹۹۴) ص ۶۵۶ آمده است.

پایان قضیه ■

۳-۱-۱ نقطه ساکنِ تابع نرم: تعریف

اگردر نقطه ای مثل $\overline{\mathbf{x}}$ ار تابع نرم f $\nabla f(\overline{\mathbf{x}})=0$ یا $\begin{cases} \frac{\partial f(\overline{\mathbf{x}})}{\partial x_i}=0 & i=1,2,\dots,n \\ \overline{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n) \end{cases}$

باشد، نقطه $\overline{\mathbf{x}}$ نقطه ساکن تابع نامیده می‌شود. پس نقاط ساکن تابع از صفر قرار دادن گرادیان به دست می آیند.

مثال ۳-۱ (دکتر اصغر پور، ۱۳۸۱ص ۳۹۶)

مطلوبست نقاط ساکن تابع زیر:

$$Z=f(x_1,x_2)=\frac{x_1^3}{3}-x_1^2x_2-x_2^2+6x_2$$

حل

گرادیان تابع را مساوی صفر قرار داده جواب دستگاه را به دست می آوریم.

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^2-2x_1x_2 \\ -x_1^2-2x_2+6 \end{bmatrix}$$

با قرار دادن $\nabla f(\mathbf{x})=0$ یک دستگاه ۲ معادله غیر خطی حاصل می شود که۳ جواب دارد:

$$\begin{cases} 1: \ x_1(x_1-2x_2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \xrightarrow{\text{در معادله ۲}} -0-2x_2+6=0 \rightarrow x_2=3 \\ x_1=2x_2 \xrightarrow{\text{در معادله ۲}} -4x_2^2-2x_2+6=0 \end{cases} \\ 2: \ -x_1^2-2x_2+6=0 \end{cases}$$

$$-4x_2^2-2x_2+6=0 \rightarrow \begin{cases} x_2=-1/5 \rightarrow x_1=-3 \\ x_2=1 \rightarrow x_1=2 \end{cases}$$

پس این تابع ۳ نقطه ساکن دارد : $C\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}-3\\-\frac{3}{2}\end{vmatrix} \qquad A\begin{vmatrix}0\\3\end{vmatrix}$

پایان مثال ▲

۳–۱–۲ تعریف k امین ماینور اصلی

(k^{th} Principal Minor)

k امین مینور (کهاد)اصلی یک ماتریس $n \times n$ عبارتست ازدترمینان هرزیر ماتریس $k \times k$ از این ماتریس که با حذف n-k سطر و n-k ستون همنام بدست می‌آید $k=1,2,3,...,n$. همواره اولین ماینور های اصلی روی قطراصلی قرار دارند.

مثال ۳–۲ مطلوبست مینور های اصلی ماتریس H.

$$H(\mathbf{X})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

حل

k= ۱

اولین مینور اصلی این ماتریس ۳ × ۳ از حذف ۲=۱-۳= $n-k$ سطر و حذف ۲=۱-۳ ستون **همنام یا متنا ظر** آن بدست می آیند یعنی

حذف سطر **اول و دوم** و ستون **اول و دوم** که حاصل آن a_{33}است

یاحذف سطر **اول وسوم** و ستون **اول و سوم** که حاصل a_{22}

یاحذف سطر **دوم وسوم** و ستون **دوم و سوم** که حاصل a_{11}

پس اولین مینور های اصلی عناصر روی قطرند:

ماینورهای اصلی اول$=(a_{11}),(a_{22}),(a_{33})$

دومین مینور های اصلی:

حذف ۱=۲-۳سطر و۱ =۲-۳ ستون متناظر آن

حذف سطر ۳ و ستون۳ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

حذف سطر ۲ و ستون۲ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حذف سطر ۱ و ستون۱:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

سومین مینور های اصلی:

حذف ۰=۳-۳سطر و۰=۳-۳ ستون

ماینوراصلی سوم= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

پایان مثال ▲

مثال ۳-۳ : مطلوبست مینور های اصلی ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ -۱ & -٤ \end{bmatrix}$.

حل

اولین ماینور اصلی (کهاداصلی) با حذف یک (۱=۱-۲) سطر و۱ ستون متناظر بدست می‌آید در اینجا این سطر و ستون حذفی می تواند سطر اول وستون اول باشد یا سطردوم وستون دوم باشد .

با حذف سطر اول وستون اول ۴- می ماند

با حذف سطردوم وستون دوم ۲- می ماند

n-k=۰ بازای k=۲ پس هیچ سطر وستون نباید حذف شود و دومین ماینور اصلی این ماتریس دتر مینان خود ماتریس است یعنی دومین ماینور اصلی برابراست با : $-۲(-۴)-(-۱)(-۱)=۷$. پایان مثال ▲

مثال ۳-۴ : مطلوبست مینور های اصلی ماتریس $B=\begin{pmatrix} ۱ & ۸ & ۲ \\ ۵ & ۹ & ۶ \\ ۶ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$.

اولین ماینور اصلی ماتریس

با حذف ۲=۱-۳ سطر و۲ ستون متناظر بدست می‌آید. این ۲سطر و۲ ستون حذفی می تواند

الف)حذف سطر اول و دوم، ستونهای متناظر (اول و دوم) باشد که ۳+ بدست می‌آید.

ب)حذف سطر اول و سوم و ستونهای متناظر (اول و سوم) که ۹ بدست می‌آید.

ج) حذف سطر دوم و سوم و ستونهای متناظر (دوم و سوم) که ۱ بدست می‌آید.

دومین ماینور اصلی با حذف ۱=۲-۳ سطر و۱ ستون متناظر بدست می‌آید. این ۱سطر و۱ ستون حذفی می تواند

الف)حذف سطر اول و ستون متناظر (ستون اول) باشد که ۳- بدست می‌آید: جواب $\begin{vmatrix} ۹ & ۶ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix}=-۳$ بدست می‌آید.

ب)حذف سطر دوم و ستون متناظر (دوم) باشد و جواب $= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۶ & ۳ \end{vmatrix}$ بدست می‌آید.

ج)حذف سطر سوم و ستون متناظر (سوم) باشد و جواب $= \begin{vmatrix} ۱ & ۸ \\ ۵ & ۹ \end{vmatrix}$ بدست می‌آید.

سوال: منظور از $H_K(\bar{x})$ یا $H_k(x_۱,x_۲,...x_n)$ مربوط به ماتریس nدرn مربع H چیست؟

جواب سوال را در زیر می یابید(از وینستون،۱۹۹۴ ص ۶۵۶).

۳-۱-۳ زیر دترمینان های یک ماتریس:

دترمینان kامین ماتریس اصلی پیشتاز
یا
kامین مینور اصلی پیشتاز(م.ا.پ)(k^{th} Leading Principal Minor)

kامین مینور اصلی پیشتاز(ماپ) مربوط به یک ماتریس $n \times n$ ، دترمینان یک زیر ماتریس $k \times k$ است که با حذف آخرین n-k ستون وسطر آن ماتریس بدست می آید(وینستون،۱۹۹۴ ص ۶۵۶).

درادامه k امین ماپ مربوط به ماتریس هشیان یک تابع n متغیره را که در نقطه $(x_1 \dots x_n)$ محاسبه شده با $H_k(x_1 \dots x_n)$ یا $H_k(\mathbf{x})$ نشان می دهیم.

مثال ۳-۵ :

اگر $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2$ مطلوبست هشیان تابع (H) و $H_1(x_1 x_2)$ و $H_2(x_1 x_2)$.

حل

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_1(x_1 x_2)$ با حذف آخرین ($n-k=2-1=1$)سطروستون (سطر دوم و ستون دوم) به دست می آید که برابر است با $H_1(x_1 x_2)=6x_1$

$H_2(x_1 x_2)$با حذف هیچ سطر و ستون ($n-k=2-2=0$)به دست می آیدکه برابر است با $H_2(x_1 x_2) = \begin{vmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (6x_1)(2) - 2(2) = 12x_1 - 4$.

قضیه زیر چگونگی استفاده از ماتریس هشیان و مفهوم ماینیورهای اصلی در پی بردن به تحدب و تقعر تابع را بیان می کند.

۳ -۲- شرط تحدب تابع براسا س ماینور های اصلی پیشتاز (ماپ ها)

قضیه ۳–۲

فرض کنید تابع $f(x_1,...,x_n):S\to R$ دارای مشتقات نسبی درجه دوم برای هر نقطه در مجموعه[محدب $S\subset R^n$]باشد. آنگاه تابع fروی S محدب است

اگر و فقط اگر ماتریس هشیان آن مثبت نیمه مُعین باشد(ص ۱۱۴ بازارا ودگران،۲۰۰۶) یا به طور معادل

برای هر نقطه xمتعلق بهS، تمام زیردترمینانهای موسوم به ماپ (**ماینور های اصلی پیشتاز**) هشیانِ تابع ، غیر منفی باشد. (قضیه ۳ص ۶۵۷وینستون،۱۹۹۴)

پایان قضیه■

۳–۳شرایط کافی بهینگی مرتبه دوم

۳ قضیه زیر شرایط کافی مرتبه دوم را برای اینکه نقطهای مثل $\bar{X}$برای تابع چند متغیره بدون محدودیت بهینه باشد را بیان می‌کند. شایان ذکر است که این قضایا برای تابعی است که $H_n(\bar{x})\neq ۰$ یعنی دترمینان هشیان آن درنقطه $\bar{X}$ صفر نباشد.

سه قضیه در مود ویژگی هشیان برای اکسترمم بودن یا نبودن یک نقطه ساکن

۳ قضیه زیر، شرایطی را در مورد هشیان تابع f بدست می‌دهدکه تحت آنها نقاط ساکن (stationary) آن می‌تواند یک نقطه مینیمم یا ماکزیمم موضعی باشد یا اصلاً اکسترمم نباشد. یادآوری می‌شود که $\bar{X}$ را نقطه ساکن تابع $f(x)$ گویند اگر $\nabla f(\bar{x})=۰$.

قضیه۳–۳

اگر k امین ماپ هشیان تابع $f(x_۱..x_n),(x_۱..x_n)\in R^n$ در نقطه ساکن $\bar{X}$ مربوط به تابع مثبت باشد، یعنی $H_k(\bar{x})>۰$ برای $k=۱,۲,...,n$ آنگاه $\bar{X}$ یک مینیمم موضعی برای تابع f است. پایان قضیه (قضیه ۷ ص ٦٧٥ وینستون ،١٩٩٤)■[1]

[1] مطالعه قضایای ۲-۱-۴ و۳-۱-۴ ص ۱۶۷و ۱۶۸ بازارا (۲۰۰۶)بی مناسبت نیست.

قضیه ۳-۴

(قضیه ۷' ص ٦٧٥وینستون ،١٩٩٤)

اگر $H_k(\bar{x})$، $k=1,2,\dots,n$ غیرصفر و علامت آنها برای $k=1,2,\dots$ هما نند $(-1)^k$ باشد(یک در میان منفی و مثبت)، نقطه ساکن $\bar{x}$ تابع $f(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in R^n$ ماکزیمم موضعی است. پایان قضیه■

توجه علامت اولین H_k باید منفی ، بعدی مثبت.....

قضیه ۳-۵

(قضیه" **۷ ص ۶۷۵**وینستون ،۱۹۹۴)

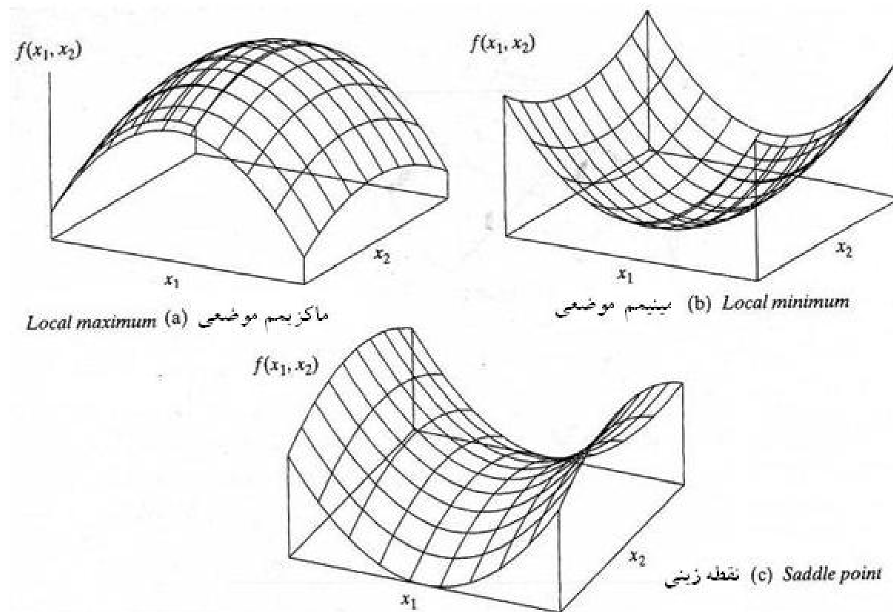
اگر $\bar{x}$ نقطه ساکن تابع $f(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in R^n$ و $H_n(\bar{x})\neq 0$ یعنی دتر مینان هشیان آن در $\bar{x}$ صفر نباشد و شرایط دو قضیه فوق هم برقرار نباشد، $\bar{x}$ برای تابع یک نقطه اکسترمم موضعی نیست. پایان قضیه■

توجه اگر برخی H_Kها صفر گردند، شرایط قضایای فوق برقرار نخواهد بود.

تعریف نقطه زینی

اگریک نقطه ساکن اکسترمم نباشدنقطه زینی نامیده می‌شود (وینستون،۱۹۹۴ص۶۷۵ وبازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص ۱۷۲). توضیح اینکه اگر نقطه ساکن $\bar{x}$ برای تابعی n متغیره در قضیه ۳-۳ و۳-۴ صدق نکند و به ازای آن $H_n(\bar{x})$ مثبت یا منفی باشد(دتر مینان Hبه ازای $\bar{x}$ صفر نباشد)،آنگاه $\bar{x}$ نقطه زینی است. برای بررسی ماکزیمم یا مینیمم یا زینی بودن یک نقطه، محاسبه ماپ‌ها در آن نقطه به ما کمک می‌کند.

اگر نقطه ساکن $\bar{\mathbf{x}}$ در $H_n(\bar{\mathbf{x}})=0$صدق کند ،آنگاه $\bar{\mathbf{x}}$ ممکن است مینیمم موضعی یا ماکزیمم موضعی یا نقطه زینی باشد و قضایای سه گانه فوق قابل نتیجه گیری واستفاده نیستند (وینستون، ۱۹۹۴ ص ۶۷۵).



شکل۳-۱ .فرمهای ۳گانه نقطه ساکن (راردین،۱۹۹۸ ص ۷۴۶)

مثال ۳-٦ [۱]:در تابع $f(x_1,x_2)=x_1x_2^3+x_1^2x_2-x_1x_2$ نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی و نقاط زینی را بیابید.

حل

نقاط ساکن تابع از صفر قرار دادن گرادیان به دست می آیند:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1x_2+x_2^3-x_2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^2+3x_2^2x_1-x_1$$

بنابراین $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$ ایجاب می کند که

$$2x_1x_2+x_2^3-x_2=x_2(2x_1+x_2^2-1)=0 \qquad (I)$$

$$x_1^2+3x_2^2x_1-x_1=x_1(x_1+3x_2^2-1)=0 \qquad (II)$$

---

[۱] مثال ۲۰ ص ٦۷۷-٦۷۹ وینستون ،۱۹۹٤ یا مثال ۲۸ ص ٦٥۹-٦٥۸ وینستون و گلدبدگ ،۲۰۰٤ترجمه توسط خانم مهندس آرزو عظیمی

حل دستگاه ۵ نقطه جواب می دهد:

برای برقراری معادله (I) باید یا (i) $x_2 = 0$ یا (ii) $2x_1 + x_2^2 - 1 = 0$ برقرار باشد.

برای برقراری معادله (II) بایدیا (iii) $x_1 = 0$ یا (iv) $x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0$ ..

بنابراین برای اینکه (x_1,x_2) یک نقطه ساکن باشد بایستی:

(i) و (iii) برقرار باشند؛ که فقط در نقطه (۰و۰) برقرارند.

(i) و (iv) برقرار باشند؛ که فقط در نقطه (۰و۱) برقرارند.

(ii) و (iii) برقرار باشند که فقط در نقطه (۱و۰) و (۱- و۰) درست است.

(ii) و (iv) برقرار باشند، برای این منظور نیاز است که $x_2^2 = 1 - 2x_1$ و

$x_1 + 3(1 - 2x_1) - 1 = 0$ برقرار باشند. ارحل همزمان آنها

$$x_1 = \frac{2}{5} \quad و \quad x_2 = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5} \quad یا \quad x_2 = -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5}.$$

بنابراین نابع $f(x_1,x_2)$ دارای نقاط ساکن زیر است:

$$(0,0) \text{ و } (1,0) ، (0,1) ، (0,-1) ، (\frac{2}{5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5}) ، (\frac{2}{5},-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5}).$$

همچنین با توجه به

$$H(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 3x_2^2 - 1 \\ 2x_1 + 3x_2^2 - 1 & 6x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

الف) بررسی $\bar{x} = (۰۰)$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

به دلیل اینکه $H_1(0,0)=0$، شرایط قضایای ۳-۳ و۳-۴ برقرار نیست. از آنجا که $n = ۲$ و $H_2(0,0) = -1 \neq 0$، با توجه به قضیه ۳-۵، نقطه $(0,0)$ زینی ایست.

ب)بررسی نقطه $\bar{x} = (۰و۱)$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

شرایط قضایای ۳-۳ و ۳-۴ بر قرار نیست زیرا $H_1(1,0)=0, H_2(1,0)=-1$ لذا نقطه(۰و۱)ماکزیمم ویا مینیمم نیست و چون $H_n(\overline{x})\neq 0$ پس برطبق قضیه ۳-۵ نقطه (۰ , ۱)نیز زینی است.

ج)بررسی نقطه (۱و۰) $\overline{x}=$

از آنچا که $H(0,1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ لذا $H_1(0,1)=2>0$ (فرض های قضیه ۳-۴ برقرار نیست) و $H_2(0,1)=-4$ (فرضهای قضیه ۳-۳ برقرار نیست)و $H_{n=2}(0,1)\neq 0$

پس نقطه (۱و۰) طبق قضیه ۳-۵ زینی است.

د) بررسی نقطه $(\frac{2}{5},-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})$ داریم:

$$H(\frac{2}{5},-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5^{\frac{1}{2}}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{12}{5(5)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$H_1(\frac{2}{5},-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})=-\frac{2}{5^{\frac{1}{2}}}<0 \quad \text{و} \quad H_2(\frac{2}{5},-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})=\frac{20}{25}>0$$

پس بر اساس قضیه ۳-۴ نقطه $(\frac{2}{5},-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})$ یک ماکزیمم موضعی است.

ه) سرانجام بررسی نقطه $(\frac{2}{5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})$

$$H(\frac{2}{5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})=\begin{pmatrix} \frac{2}{5^{\frac{1}{2}}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{12}{5(5)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

چون $H_1(\frac{2}{5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})=\frac{20}{25}>0$ و $H_2(\frac{2}{5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})=\frac{20}{25}>0$ پس با توجه به قضیه ۳-۳ نقطه $(\frac{2}{5},\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5})$ مینیمم موضعی است. پایان مثال ▲

۳-۴ شرط اکسترمم بودن یک نقطه برای توابع ۲ متغیره

در مورد تابع دو متغیره قضیه زیر قابل ذکر است که در واقع حالت خاص قضیه۳-۳ می‌باشد[1].

قضیه۳-۶

نقطه (x_0,y_0) مینمم موضعی[اکید]تابع $f(x,y)$ درمجموعه باز U در R^2 از رده (کلاس) C^3 [2] است اگر داشته باشیم.

۱) $\nabla f(x_0,y_0)=0$ ۲) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$

۳) دترمینان هشیان در نقطه x_0,y_0 مثبت باشد، یعنی:

$$|H(x_0,y_0)|=\det\begin{bmatrix}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x_0,y_0}\\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{x_0,y_0} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0,y_0}\end{bmatrix}>0$$

هرگاه در بند ۲ بجای >0 ، <0 باشد و شرط ۳ تغییر نکند آنگاه x_0,y_0 ماکزیمم موضعی [اکید] است. پایان قضیه■

مثال ۳-۷ مثال برای سه قضیه ۳-۴ تا ۳-۶ :

نقاط ماکزیمم ، مینیمم و زینی تابع $Z=f(x_1,x_2)=\frac{x_1^3}{3}-x_1^2x_2-x_2^2+6x_2$ را مشخص کنید

[1] (از اصل کتاب مارسدن و ترومبا،۲۰۰۳ ص۲۱۶ یا ترجمه علم زاده و داودی، ۱۳۷۷ ص ۲۶۶)

[2] منظور ازکلاس C^k این است که مشتقات اول تا kام تابع همگی وجود داشته وپیوسته اند

حل:

در مثال ۳-۱ دیدیم این تابع ۳ نقطه ساکن دارد: $C\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} -۳ \\ \frac{-۳}{۲} \end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix} ۰ \\ ۳ \end{vmatrix}$.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_۱} \\ \frac{\partial f}{\partial x_۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۱^۲ - ۲x_۱x_۲ \\ -x_۱^۲ - ۲x_۲ + ٦ \end{pmatrix}$$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱^۲} & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱ x_۲} \\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۲ \partial x_۱} & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۲^۲} \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} ۲x_۱ - ۲x_۲ & -۲x_۱ \\ -۲x_۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

برای بررسی ماکزیمم و مینیمم بودن و زینی بودن نقاط، ماپ‌ها در آن نقاط را بدست می آوریم و به سراغ قضایای۳-۳،۳-۴ و ۳-۵ می‌رویم

نقطهA:

$$H(A) = \begin{bmatrix} -٦ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} \qquad A\begin{vmatrix} ۰ \\ ۳ \end{vmatrix}$$

به ازای ۱,۲=k:

$H_۱(A)=$ (م ا پ)اولین ماینور اصلی پیشتاز = دترمینان [-۶]=-۶

$H_۲(A)=$ م ا پ دومین $= \det\begin{bmatrix} -٦ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = ۱۲$

اولین دترمینان منفی ودومین مثبت؛ پس طبق قضیه ۳-۴ این نقطه ماکزیمم است.

اگر قضیه ۳-۶ را در مورد A اعمال کنیم همین نتیجه بدست می آید.

نقطهB:

$$H(B) = \begin{bmatrix} -۳ & ٦ \\ ٦ & -۲ \end{bmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} -۳ \\ -۱/۵ \end{vmatrix}$$

اولین م ا پ $= H_۱(B) = -۳$

$$\text{دومین م ا پ} = H_2(B) = \det\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = -30$$

پس نقطه B نه شرط مینیمم بودن در قضیه ۳-۳و نه شرط ماکزیمم بودن در قضیه ۳-۴ را داراست.

نقطهC:

$$H(C) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad C \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array} \right. \text{برای نقطه}$$

$$\text{اولین م ا پ} = H_1(C) = 2$$

$$\text{دومین م ا پ} = H_2(C) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

چون در نقطه C دتر مینان H صفر نبوده وشروط قضایای ۳-۳و۳-۴ برقرار نیست، نقطه C زینی است پایان مثال ▲

۳-۵ روشهای بهینه سازی توابع غیر خطی چند متغیره بدون محدودیت

بهینه سازی توابع چند متغیره بدون محدودیت شامل روشهایی است که یا از مشتق استفاده نمی‌کنند (مثل الگوریتمهای هوک-جیوز و مختصات دوره ای[1])یا از مشتق مرتبه اول استفاده می کنند مثل روشهای بیشترین کاهش(SD)[2]و شبه‌نیوتن[3]و الگوریتم گرادیان مزدوج[4] یا از مشتق مرتبه دوم استفاده می کنند مثل روش نیوتن-رافسون. قبل ورود به موضوع روشهای بهینه سازی توابع چند متغیره به یک معیار برای خاتمه الگوریتم ها توجه کنید:

---

[1] Cyclic Coordinates

[2] Steepest Descent

[3] Quasi-Newton

[4] Conjugate Gradient Algorithm

۳–۵–۱ معیار خاتمه روشهای یا الگوریتمهای بهینه سازی توابع چند متغیره

برای پایان دادن به الگوریتم یا روش معیارهای مختلف می‌تواند بکار گرفته شود از جمله آنها $\|x_{k+1}-x_k\|<\varepsilon$ یعنی طول بردار تفاضل از ε کمتر باشد. چند معیاردیگر در مراجعی مثل بازارا و دیگران (۲۰۰۶) ص ۳۲۳ قابل مطالعه است.

یاد اوری : برای بردار nعنصری $Y=(y_1,y_2,...,y_n)'$ داریم. $\|Y\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}y_j^2}$

۳–۶روشهای جستجوی بدون مشتق برای بهینه سازی توابع غیر خطی چند متغیره بی محدودیت

برای کمینه سازی یک تابع چند متغیره بدون استفاده از مشتق تابع می‌توان مطابق زیر عمل کرد. نشان داده می‌شود که اگر تابع مشتق‌پذیر باشد این روش به نقطه ساکن نزدیک می‌شود.

در جستجوی چندمتغیره بدون محدودیت برای مینیمم کردن تابع f، بدون استفاده از اطلاعات مشتق چنین عمل می‌کنیم، با در اختیار داشتن نقطه اولیه xابتدا یک جهت مناسب مثل d تعیین می‌شود سپس با یکی از تکنیک‌های که قبلا ذکر شده *از نقطه* x درجهت d حرکت صورت می‌گیرد تا نهایتاً f بهینه می‌شود. در این روش خیلی مواقع با این مساله کمینه سازی روبروئیم (بازارا و دیگران ، ۲۰۰۶ ص ۳۶۵):

$$\min f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{d})$$

که در آن λ یا عددی حقیقی است یا عددی غیر منفی یا عددی از فاصله بسته [a b] که می‌خواهیم مقدار بهینه آنرا بدست آوریم:

$$\lambda\in L\begin{cases}L=R & \text{یا}\\ L:\{\lambda\,|\,\lambda\geq 0\} & \text{یا}\\ L:\{a\leq\lambda\leq b\}\end{cases}$$

x یک نقطه شروع و

d جهت انتخاب شده است

برای جستجوی بدون نیاز به مشتق توابع چند متغیره چندین روش وجود دارد؛ که ازآن جمله موارد مندرج در جدول زیر است:

جدول ۳-۱ عناوین چند جستجوی بدون نیاز به مشتق توابع چند متغیره

نام فارسی	کاربرد در	یک مرجع
روش تجربیِ جهات دوار[1]	بهینه سازی بی محدودیت	آوریل(۲۰۰۳) ص۴۰۳
روش تجربی کمینه سازی سیمپلکس نلدر مید[2]	بهینه سازی بی محدودیت	بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص۴۵۶
روش هوک-جیور	بهینه سازی بی محدودیت	بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص۲۴۷ ، آوریل(۲۰۰۳)
الگوریتمهای جهات مزدوج[3]	بهینه سازی بی محدودیت	بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص۴۰۲
الگوریتم مختصات دوره ای[4]	بهینه سازی بی محدودیت	بازاراو همکاران(۲۰۰۶)ص ۳۶۵
پاول [5]روش بدون مشتق	بهینه سازی بی محدودیت	آوریل(۱۹۷۶) ص۲۵۹ آوریل(۲۰۰۳) ص۴۴۳
روش کوازی نیوتن یا روش DFP[6]	بهینه سازی بی محدودیت	بازاراو همکاران(۲۰۰۶)ص۴۰۷ مک کور میک(۱۹۸۳) ص۱۸۸
روش روسن براک[7]	بهینه سازی بی محدودیت	بازاراو همکاران(۲۰۰۶)ص ۳۸۲
روش روسن براک	بهینه سازی با محدودیت	هیمل بلو (۱۹۷۲)

۳-۶-۱ الگوریتم مختصات دوره ای(Cyclic Coordinates)

(بازارا و دیگران ؛۲۰۰۶ ص ۳۶۵)

ازجمله الگوریتم هایی که بدون استفاده از مشتق به جستجوی نقطه بهینه توابع چند متغیره می پردازد الگوریتم موسوم به مختصات دوره‌ای است. در الگوریتم مختصات دوره ای محورهای مختصات به عنوان جهات جستجو برگزیده می‌شوند. بطور مشخص‌تر، جستجوها در جهت محورهای مختصات یعنی $d_1,d_2,...,d_j,...,d_n$(به تعداد

[1] The rotating directions Method
[2] Nelder-Mead Simplex Method با سیمپلکس خطی اشتباه نشود
[3] Congugate direction Methods
[4] Cyclic Coordinates
[5] Powell Method
[6] Quasi –Newton Method Davidson Fletche Powel Method(DFP method)
[7] Rosenbrock Method

متغیرها) صورت می‌گیرد که در آن d_j برداری nعنصری استوهمه عناصر آن صفرند، بجزعنصر jامین که یک است.

$$d_1 = (1,0\,0\,0...)'$$
$$d_2 = (0,1,0,0\,0...)'$$
$$d_3 = (0,0,1,0,0,0,...)'$$
$$d_4 = (0,0,0,1,0,0,0...)'$$

$$d_j = (0,0,...,1,0,0,0)'$$

$$d_n = (0,0,0,...,0,0,0,1)'$$

سعی در تغییر x_j در امتداد d_j است در حالیکه سایر متغیرها ثابت نگه داشته شوند. قابل ذکر است که نوعی روش مختصات دوره ای موسوم به double sweep[1] هم وجود دارد که توسط محققی بنام Aitken ارائه شده است(بازارا و دیگران ۲۰۰۶ ص ۳۶۵)

۳-۶-۱-۱ خلاصه الگوریتم روش مختصات دوره ای

(بازارا و دیگران ؛۲۰۰۶ ص ۳۶۵)

متغیر n دربحث پیش رو نمایانگرتعداد متغیرهای تابع و$d_1,...,d_n$ جهات (محورهای) مختصات می باشند.

مرحله آغازین

-ε مناسب را برگزینید و معیار خاتمه را$\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$قرار دهید.

- با نقطه اولیه x_1 و با قراردادن $y_1=x_1$ ، $k=1,j=1$ به مرحله اصلی بروید.

مرحله اصلی

گام ۱

λ_jرا برابرجواب بهینه مساله $Min\ f(y_j + \lambda d_j)\ s.t.\ \lambda \in R$ قرار دهید.

وقتی λ_j را به دست آوردید y_{j+1} را مساوی $y_j + \lambda_j d_j$ قرار دهید:

---

[1] Aitken double sweep method متد پسگرایی مجدد

$$y_{j+1}=y_j+\lambda_j d_j$$

واگر j<n ، j را با $j+1$ جایگزین کنید و گام ۱ را تکرارکنید در غیراینصورت اگر $j=n$ به گام۲ بروید.

گام۲

با قراردادن $x_{k+1}=y_{n+1}$ اگر $\|x_{k+1}-x_k\|<\varepsilon$ توقف کنید در غیراینصورت

با قراردادن $y_1=x_{k+1}$, $j=1$ ، $k+1$ را جایگزین k کرده و به گام ۱ بروید.

مثال ۳-۸ برای روش مختصات دوره ای

(ص ۳۶۶ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)

مطلوبست حل مساله زیر با $\varepsilon=0/05$.

$$\min f(x)=f(x_1,x_2)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$$

حل

مساله دومتغیره است(n=۲) پس دو جهت داریم که در جهت محورهای مختصات برگزیده می‌شوند: $d_1=(1,0)'$ و $d_2=(0,1)'$.

مرحله آغازین:

نقطه $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ بعنوان نقطه اولیه برگزیده می‌شود.

$$y_1=x_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \qquad k=1 \qquad j=1$$

مرحله اصلی- گام۱

λ_j را جواب کمینه سازی $f(y_1+\lambda d_1)$ قرار می‌دهیم:

$$y_1+\lambda d_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\3\end{pmatrix}$$

$$f(y_1+\lambda d_1)=f(x_1=\lambda,x_2=3)=(\lambda-2)^4+(\lambda-6)^2$$

با مشتق گیری نسبت بهλ :

$$f'=\cdot \Rightarrow \lambda=۳/۱۲۸ \qquad \lambda_۱=\lambda\cong ۳/۱۲۸$$

$$y_۲=y_۱+\lambda_۱ d_۱=\begin{pmatrix}\cdot\\ ۳\end{pmatrix}+۳/۱۲۸\begin{pmatrix}۱\\ \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۳\end{pmatrix}$$

چون $j=۱<n=۲$ است $j=۱$ را به $j+۱=۲$ تبدیل و گام ۱ را تکرار می کنیم.

$$y_۳=y_۲+\lambda d_۲=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۳\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\cdot\\ ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۳+\lambda\end{pmatrix}$$

$$f(y_۲+\lambda d_۲)=(۳/۱۲۸-۲)^٤+(۳/۱۲۸-٦-۲\lambda)^۲$$

با صفر قرار دادن مشتق نسبت بهλ :

$$\frac{df}{d\lambda}=\cdot\Rightarrow\lambda=-۱/٤۳٦ \qquad \lambda_۲=\lambda\cong-۱/٤۳٦$$

چون $j=n$ به گام۲ میرویم.

گام۲

با قراردادن $x_{k+1}=y_{n+1}$ یا

$$x_۲=y_۳=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۳-۱/٤۳٦\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۱/٥٤٦\end{pmatrix}$$

چون $\|x_۲-x_۱\|=\left\|\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۱/٥٦٤\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cdot\\ ۳\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{۳/۱۲۸^۲+۱/٤۳٦^۲}>\varepsilon$ توقف نمی‌کنیم

با قراردادن

$$y_۱=x_۲=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۱/٥٦٤\end{pmatrix}$$

$$j=۱ \qquad k=۱+۱=۲$$

ادامه می‌دهیم .

گام۱

$$y_۱+\lambda d_۱=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸\\ ۱/٥٦٤\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}۱\\ \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳/۱۲۸+\lambda\\ ۱/٥٦٤\end{pmatrix}$$

این نقطه را در تابع f گذاشته ومقدار تابع را بدست آورده و مشتق آنرا نسبت به λ صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{df}{d\lambda} = \cdot \Rightarrow \lambda = -\cdot/\text{۵} \qquad \lambda_{\text{۱}} = \lambda = -\cdot/\text{۵}$$

بقیه نتایج مراحل حل در جدول زیرآمده است

۳-۲خلاصه محاسبات روش مختصات دوره ای(بر اساس جدول ٦-٨ ص ٣٦٧ بازاراو همکاران،٢٠٠٦)

k	x_k	$f(x_k)$	j	d_j	y_j	λ_j	y_{j+1}	$\|x_{k+1} - x_k\|$
١	(٠,٠٠, ٣,٠٠)		١	(١/٠,٠/٠)	(٠,٠٠،٣,٠٠)	٣,١٣	(٣,١٣, ٣ .٠٠)	
		٥٢,٠٠	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٣,١٣, ٠٠)	-١,٤٤	(٣,١٣, ١,٥٦)	
٢	(٣ ١٣, ١ ٥٦|		١	(١/٠,٠/٠)	(٣,١٣, ١ .٥٦)	-٠,٥٠	(٢ .٦٣ , ١,٥٦)	٣.٤٥
		١,٦٣	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٢,٦٣, ١,٥٦)	- ٠,٢٥	(٢,٦٣, ١,٣١)	
٣	(٢,٦٣,١,٣١)		١	(١/٠,٠/٠)	(٢,٦٣. ١,٣١)	-٠,١٩	(٢,٤٤, ١,٣١)	٠,٥٥٩
		٠/١٦	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٢,٤٤ ١,٣١)	-٠,٠٩	(٢,٤٤ , ١,٢٢)	
٤	(٢،٤٤, ١ /٢٢)		١	(١/٠,٠/٠)	(٢,٤٤, ١,٢٢)	-٠,٠٩	(٢,٣٥, ١ . ٢٢)	٠,٢١٠٠
		٠,٠٤	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٢,٣٥. ١ .٢٢)	-٠،٠٥	(٢,٣٥, ١,١ ٦)	
٥	(٢,٣٥, ١,١٧)		١	(١/٠,٠/٠)	(٢,٣٥. ١,١٧)	-٠,٠٦	(٢,٢٩, ١ .١٧)	٠,١٠٣٠
		٠,٠١٥	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٢,٢٩ ١,١٧	-٠،٠٣	(٢,٢٩, ١ .١٤)	
٦	٢,٢٩, ١,١٤)		١	(١/٠,٠/٠)	٢,٢٩, ١,١٤)	-٠,٠٤	(٢,٢٥, ١,١ ٤)	٠,٠٦٧١
		٠/٠٠٧	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٢,٢٥ ١,١٤)	-٠،٠٢	(٢,٢٥, ١,١ ٢)	
٧	(٢,٢٥ ١,١٢)		١	(١/٠,٠/٠)	(٢,٢٥, ١,١٢)	-٠,٠٣	(٢,٢٢ , ١,١ ٢)	٠.٠٤٤٧
		٠,٠٠٤	٢	(٠,٠, ١/٠)	(٢,٢٢،١,١٢)	-٠,٠١	(٢,٢٢, ١,١١)	
	(٢,٢٢ ١,١١)							٠,٠٣١٦

در نتیجه پس از هفت تکرار، نقطه $x^* = \begin{pmatrix} \text{۲/۲۲} \\ \text{۱/۱۱} \end{pmatrix}$ به عنوان مینیمم تابع بدست می آید. برای آشنایی با روش مختصات دوره ای با استفاده از مشتق تابع، مراجعی چون اصغرپور (۱۳۸۱)ص ۴۰۰ قابل مطالعه است. پایان مثال ▲

تمرینات

مطلوبست مینیمم توابع زیر با روش مختصات دوره ای

۱- $5x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+7$ با $\varepsilon=0.01$ ونقطه اولیه (۲ ۱)

جواب (۰/۰۰۰۶۴   ۰/۰۰۰۶۴-)؟

۲- $(2x_1-x_2)^2+(x_2+3)^4$ با $\varepsilon=0.01$ و نقطه اولیه گ'(۲ ۰)

۳- $(x_1-1)^3+(x_2-2x_1)^2$ با $\varepsilon=0.01$ و نقطه اولیه '(۱ ۰)

۴- $2x_1x_2-x_1^2-2x_2^2+2x_2$ $\varepsilon=0.01$ و نقطه اولیه '(۱ ۰)

۵- $(x_1+x_2{}^3)^2+2(x_1-x_2-4)^4$ با $\varepsilon=0.2$, نقطه اولیه '(۱- ۲)

جواب در تکرار دوم $x_۱=۲/۳۸$ $x_۲=-۱/۳۶۷$

۶- $(3-x_1)^2+7(x_2-2x_1{}^2)^2$ با $\varepsilon=0.01$ و نقطه اولیه '(۰ ۰)

۷- $(x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2$ با $\varepsilon=0.01$ و نقطه اولیه '(۲ ۰)

۸- $3x_1^2+x_2^2-12x_1-8x_2$ با نقطه اولیه (۱ ۱) جواب '(۴ ۲)

۹- $3(x_1-x_2)^4+2(x_1-x_2{}^3)^2$ با نقطه اولیه '(۳ ۰)

جواب (۲/۱۷   ۱/۵۵) درتکرار ۷

۱۰- $x_1^4+2x_2^2+3x_3^2$ نقطه اولیه '(۲ ۰ ۱)

۳-۶-۲ روش هوک –جیوز[1] برای تابع چند متغیره بدون محدودیت

ص ۳۶۸ بازارو همکاران (۲۰۰۶)[2]

ازجمله الگوریتم های بسیار دقیق که به جستجوی نقطه بهینه توابع چند متغیره بدون حضور محدودیت می پردازند روش هوک –جیوز است. این روش بدون استفاده از مشتق تابع دو نوع جستجو انجام می‌دهد:

---

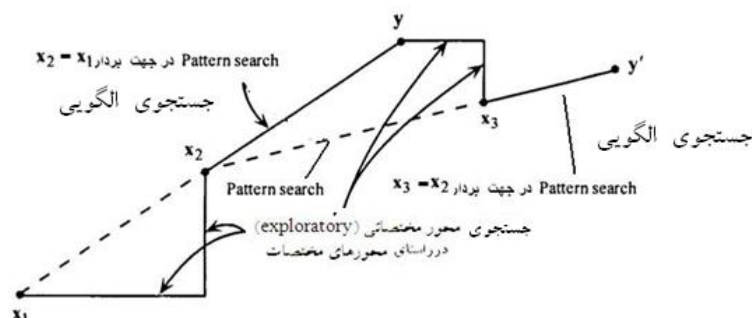
[1] Hooke&Jeeves

[2] در بخش ۲-۹ آوریل(۲۰۰۳)

الف:الگویی و ب: محور مختصاتی

جستجوی محور مختصاتی درراستای یکی از محورهای مختصات حرکت می‌کند.

جستجوی الگویی در یک جهت غیر ازیک محور مختصات خاص حرکت می‌کند.



شکل ۳-۲ نمایش دو نوع جستجو در روش هوک– جیوز (بازارا و همکاران،۲۰۰٦ص ۳٦۹)

به عنوان مثال در شکل ۳-۲ قسمتی از تکرار ها چنین عمل می کند:

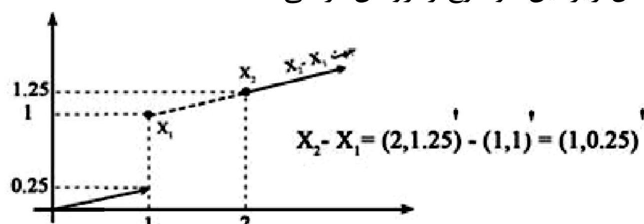
از نقطه x_1 جستجوی محور مختصاتی به سمت x_2

از نقطه x_2 جستجوی الگویی تا y

از نقطه y جستجوی محور مختصاتی تا x_3

از نقطه x_3 جستجوی الگویی به سمت y'

توجه کنید در شکل ۳-۲ وقتی در امتداد پاره خط (x_2,x_3) حرکت می کنیم. در واقع در جهت بردار تفاضل $x_3 - x_2$ حرکت می کنیم. در شکل ۳-۳ وقتی در امتداد پاره خط (x_1,x_2) حرکت می کنیم. در واقع در جهت بردار تفاضل (x_2-x_1) حرکت می کنیم. شکل زیر این موضوع را روشن تر می کند.



حرکت در امتداد X_2-X_1 ≡ حرکت در امتداد نقطه چین X_2-X_1 با موازی بردار (۱،۰.۲۵) است

شکل ۳- ۳ نمایش ترسیمی حرکت در امتداد(x_2-x_1)

روش پیشنهادشده هوک-جیوز، جستجوی خطی انجام نمی داد. اما ذیلاً یک نوع آن که از جستجوی خطی درجهت محور های مختصات (جهات $d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_n$) و جستجوی الگویی استفاده می‌کند توضیح داده می‌شود(بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص ۳۷۰)

۳-۶-۲-۱ خلاصه روش جستجوی خطی-الگویی هوک و جیوز

خلاصه روش هوک-جیوز با استفاده از جستجوی خطی چنین است (بازارا و دیگران ۲۰۰۶ ص ۳۷۰)

مرحله آغازین

یک عدد اسکالر $\varepsilon > 0$ برای پایان دادن به الگوریتم انتخاب کنید نقطه شروع $\mathbf{x}_1$ را برگزینید با قراردادن $j=1,\ k=1, \mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1$ به مرحله اصلی بروید.

مرحله اصلی گام ۱

جواب بهینه برای $\begin{cases} \min f(y_j + \lambda d_j) \\ \lambda \in R \end{cases}$ که تابعی از $\lambda \in R$ می باشد را به دست آورید[1] و λ_j را مساوی آن جواب بگیرید

یادآوری می گردد که منظور از ($d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_n$) جهت محور های محتصات است.

y_{j+1} را چنین قرار دهید: $y_{j+1} = y_j + \lambda_j \times d_j$

اگر $j < n$ بود j را با j+1 جایگزین کنید و گام ۱ را تکرار کنید در غیراینصورت

اگر $j = n$ ، x_{k+1} را چنین قرار دهید $x_{k+1} = y_{n+1}$ [n تعداد متغیر های تابع است]

اگر ε از طول بردار $x_{k+1} - x_k$ بیشتر است یعنی $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ متوقف شوید در غیراینصورت به گام ۲ بروید.

گام۲ جهت d را چنین قرار دهید $d = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ $\acute{\lambda}$ را مقدار بهینه مساله $\min f(x_{k+1} + \lambda d)$ با توجه $\lambda \in R$ قرار دهید. y_1را برابر $y_1 = x_{k+1} + \hat{\lambda} d$ و j را مساوی j=1 قرار دهید.kرا با k+1 جایگزین کرده و به گام ۱ بروید.

---

[1] واضح است که جواب بهینه λ با صفرقرار دادن مشتق ممکن است بدست آید بهینه است.

مثال ۳-۹ بازاراو همکاران(۲۰۰۶) ص۳۷۰

مطلوبست کمینه‌سازی $\min Z = f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$

حل با روش هوک-جیوز

با نقطه اولیه دلخواه (۳، ۰) در ۴ تکرار به نقطه بهینه دست‌یابی پیدا می‌شود در هر تکرار جستجو در طول جهت محور مختصات نقاط y_3, y_2 را می دهد و جستجوی الگویی در جهت $d = x_{k+1} - x_k$ ، نقطه y_1را می دهد.به استثنای تکرار اول که $y_1 = x_1$
مرحله آغازین: $x_1=(0,3)'$ انتخاب می‌شود

$$j = 1 \quad k = 1 \quad \varepsilon = 0/05 \quad y_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

مرحله اصلی گام۱ شماره تکرار: k=1

$$y_1 + \lambda d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda, 3) = (\lambda - 2)^4 + (\lambda - 6)^2$$

$$f' = 0 \Rightarrow 4(\lambda - 2)^3 + 2(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda = 3/128. \qquad \lambda_1 = 3/128$$

چون $j=1<n=2$ پس j را برابر $j=1+1=2$ قرار داده و گام ۱ را تکرار می‌کنیم:

$$y_2 = \begin{pmatrix} 3/128 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(y_2 + \lambda d_2) = ? \quad y_2 + \lambda d_2 = \begin{pmatrix} 3/128 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/128 \\ \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$f(y_2 + \lambda d_2) = f(3/128, \lambda + 3) = (3/128 - 2)^4 + (3/128 - 6 - 2\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$f'(\lambda) = 0 \Rightarrow 2(-2)(3/128 - 6 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1/436$$

$$\lambda_2 = -1/436$$

$$y_{j+1} = y_3 = y_2 + \lambda_2 d_2 = \begin{pmatrix} 3.128 \\ -1.436 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.128 \\ 1.564 \end{pmatrix}$$

چون $j = 2 = n = 2$ باید x_{k+1} را برابر y_{n+1} قرار دهیم.

$$x_2 = y_3 = \begin{pmatrix} 3.128 \\ 1.564 \end{pmatrix}$$

بررسی معیار توقف:

$$x_{٢}-x_{١}=\begin{pmatrix}٣.١٢٨-٠\\ ١.٥٦٤-٣\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٣.١٢٨\\ -١.٤٣٦\end{pmatrix}\qquad \|x_{٢}-x_{١}\|=\sqrt{٣.١٢٨^{٢}+(-١.٤٣٦)^{٢}}>\varepsilon$$

چون معیار توقف ارضاء نشده متوقف نشده و به گام ۲ می رویم.

گام ۲

k=۱

$$d=x_{٢}-x_{١}=\begin{pmatrix}٣.١٢٨\\ ١.٥٦٦\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٠\\ ٣\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٣.١٢٨\\ -١.٤٣٦\end{pmatrix}$$

باید جواب بهینه $\begin{matrix}Mi\ nf(x_{k+1}+\lambda d)\\ s.t.\ \lambda\in R\end{matrix}$ را بدست آوریم. با توجه به اینکه k=۱

$$k=1, x_{k+١}+\lambda d=x_{٢}+\lambda d=\begin{pmatrix}٣.١٢٨\\ ١.٥٦٦\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}٣.١٢٨\\ -١.٤٣٦\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٣.١٢٨+٣.١٢٨\lambda\\ ١.٥٦٦-١.٤٣٦\lambda\end{pmatrix}$$

$$f(x_{٢}+\lambda d)=(٣.١٢٨+٣.١٢٨\lambda-٢)^{٤}+[٣.١٢٨+٣.١٢٨\lambda-٢(١.٥٦٦-١.٤٣٦\lambda)]^{٢}$$

برای یافتن مینیمم تابع اخیر یا از آن مشتق گرفته مساوی صفر قرار می دهیم یا از دستورمتلب fminunc استفاده کنیم:

```
Landa=fminunc(@(landa)  (۳,۱۲۸+۳,۱۲۸*landa-۲)^۴+(۳,۱۲۸+۳,۱۲۸*landa-۲*(۱,۵۶۴-۱,۴۳۶*landa))^۲ , ۰)
```

جواب ۰/۰۹۷۲ – به دست می آید پس $\hat{\lambda}=-0.0972\cong-0.1$.

حال $y_{١}$ را برابر $x_{1+1}+\hat{\lambda}d$ قرار می دهیم:

$$y_{1}=x_{1+1}+\hat{\lambda}d=\begin{pmatrix}3.128\\ 1.564\end{pmatrix}-.1\begin{pmatrix}3.128\\ -1.436\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.83\\ 1.7\end{pmatrix}$$

k=k+۱=۲

جدول زیر نتایج محاسبات روش هوک -جیوز را نشان می‌دهد.. توجه کنید که

$$\|x_{٥}-x_{٤}\|=\|\begin{pmatrix}٢\\ ١\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٢.٠٤\\ ١.٠٢\end{pmatrix}\|=\sqrt{٠.٠٤^{٢}+٠.٠٢^{٢}}=٠.٠٤٤٧<\varepsilon=٠.٠٥$$

و جواب نهایی در پایان تکرار چهارم $x_{١}^{*}=٢$ ، $x_{٢}^{*}=١$ است با $z^{*}=٠$

جدول ۳-۳ نتایج روش هوک-جیوز مثال ۳-۹(ص ۳۷۰ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

k	X_k, $Z = f(x_k)$	j	y_j	d_j	λ_j	y_{j+1}	d	$\hat{\lambda}$	$x_{k+1}+\hat{\lambda}d$
۱	(۰,۰۰،۳,۰۰)	۱	(۰,۰۰،۳,۰۰)	(۱, ۰)	۳,۱۳	(۳,۱۳،۳,۰۰)	–	–	–
	, ۵۲,۰۰	۲	(۳,۱۳،۳,۰۰)	(۰, ۱)	-۱,٤٤	(۳,۱۳،۱,٥٦)	(۳,۱۳,-۱,٤٤)	-۰,۱۰	(۲,۸۲،۱,۷۰)
۲	(۳,۱۳،۱,٥٦)	۱	(۲,۸۲،۱,۷۰)	(۱,۰)	-۰,۱۲	(۲,۷۰،۱,۷۰)	–	–	–
	, ۱,٦۳	۲	(۲,۷۰،۱,۷۰)	(۰. ۱)	-۰,۳٥	(۲,۷۰, ۱,۳٥)	(-۰,٤۳,-۰,۲۱)	۱,٥۰	(۲,۰٦،۱,۰٤)
۳	(۲,۷۰،۱,۳٥)	۱	(۲,۰٦،۱,۰٤)	(۱,۰)	-۰,۰۲	(۲,۰٤،۱,۰٤)	–	–	–
	, ۰,۲٤	۲	(۲,۰٤،۱,۰٤)	(۰, ۱)	-۰,۰۲	(۲,۰٤, .۰۲	(-۰,٦٦,-۰,۳۳)	۰,۰٦	(۲,۰۰،۱,۰۰)
٤	(۲,۰٤،۱,۰۲)	۱	(۲,۰۰،۱,۰۰)	(۱, ۰)	۰,۰۰	(۲,۰۰،۱,۰۰)	–	–	–
	, ۰,۰۰۰۰۰۳	۲	(۲,۰۰،۱,۰۰)	(۰, ۱)	۰,۰۰	(۲,۰۰, ۱,۰۰)			
۵	(۲,۰۰،۱,۰۰) , ۰,۰۰	۱ ۲							

حل :

با دستور fminunc در متلب جواب x_1=۱,۹۹۳۲ x_2= ۰,۹۹۶۶ را می‌دهد:

▲ fminunc(@(x) (x(۱)-۲)^۴+(x(۱)-۲*x(۲))^۲, [۰،۳])

لازم بذکر است که از جمله روش‌های غیر گرادیانی برای حل مسأله‌های غیرخطی بدون محدودیت روشی است به نام سیمپلکس.

تمرینات

مطلوبست مینیمم توابع زیر با روش هوک -جیوز

۱- $Min\ \ 3(x_1-x_2)^4+2(x_1-x_2{}^3)^2$ با نقطه اولیه (۳ ۰) در ۳ تکرار

۲- $Min\ \ 3x_1^2+x_2^2-12x_1-8x_2$ با نقطه اولیه '(۱ ۱)و $\varepsilon=0.001$

جواب $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار

۳- $Min\ \ 3x_1^2+x_2^2-6x_1-8x_2$ با نقطه اولیه '(۳ ۰) و $\varepsilon=0.1$

جواب $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

۴- $Min\ \ (x_1-1)^4+(x_1-x_2)^2$ با نقطه اولیه '(۳ ۰)و $\varepsilon=0.01$

جواب $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار

۵- $Min\ \ (x_1-x_2^3)^2+3(x_1-x_2)^4$ با نقطه اولیه '(۰ ۱)و $\varepsilon=0.001$

جواب $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار

۶- $Min\ \ (2x_1-x_2)^2+(x_2+3)^2$ با نقطه اولیه (۲ ۰)و $\varepsilon=0.1$

۷- $Min\ \ (x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2$ با نقطه اولیه (۲ ۰)و $\varepsilon=0.1$

جواب: $\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}$

۸- (مساله ۲۴-۸ بازارا و دیگران۲۰۰۶ ص۴۴۹)مطلوبست کمینه سازی

$(x_1-x_2^3)^2+3(x_1+x_2)^4$ با روشهای زیر.

الف) متدمختصات دوره ای ب)روش هوک+ژیوز

آیا هر ۲روش به یک نقطه همگرایند؟ در ضمن مطلوبست حل این مساله بدون محدودیت با لینگو یا متلب

۳-۷ روشهای جستجوبرای بهینه سازی غیرخطی n متغیره بی محدودیت با استفاده از مشتق

در این بخش نیز از روشهای جستجو برای بهینه سازی مسایل برنامه ریزی غیرخطی چند متغیره بدون محدودیت صحبت به عمل خواهدآمد. این روشها از گرادیان که شامل مشتقات جزیی است برای بهینه سازی توابع مشتق پذیرچند متغیره استفاده می کنند زیرا در یک نقطه مثل $\bar{x}$جهت گرادیان تابع چند متغیره ($\nabla f(\bar{x})$) مناسب ترین جهت ایجاد افزایش در تابع و $-\nabla f(\bar{x})$مناسب ترین جهت ایجاد کاهش در تابع (درحرکت باندازه مقدار کوچک از آن نقطه)است, ازجمله این روش ها

عبارتند از : روش امتداد های مزدوج[۱]، روش بیشترین افزایش[۲]، روش بیشترین کاهش کوشی[۳]، روش سیمپلکس، روش کاهشی/افزایشی مختصات دوره ای[۴]، روش کوازی نیوتن، روش گاس- نیوتن، روش گرادیان مزدوج[۵]، مند نیوتن تعدیل شده[۶] و مند نیوتن –رافسون

برخی ازآنها ذیلاتوضیح داده می شود ولی قبل از آن به دو مثال برای یادآوری مفاهیم گرادیان و حرکت در جهت گرادیان توجه کنید.

مثال ۳-۱۰

تابع $f(x_1,x_2)=r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$را درنظر بگیرید. گرادیان تابع برابر

$$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\ \dfrac{2x_2}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

---

[۱] Conjugate directions
[۲] Method of steepest ascent
[۳] Caushy Method of Steepest Descent
[۴] Cyclic coordinate Descent/Ascent
[۵] Conjugate gradient
[۶] Modified Newton Method

بوده و چند منحنی همتراز آن در شکل۱-۴ دیده می شود. پایان مثال ▲
ثابت می‌شود که حرکت از یک نقطه واقع روی تابع در جهت گرایان تابع به اندازه یک مقدار کوچک مناسب‌ترین جهت برای ایجاد بیشترین افزایش در تابع و خلاف آن مناسب‌ترین جهت برای ایجاد بیشترین کاهش[1] در تابع است.

مثال۳-۱۱ :

اگر $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ مطلوبست تعیین جهت گرادیان در نقطه $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2 \qquad \nabla f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix} \qquad \nabla f(3,4)=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

$d=\dfrac{\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}}{\sqrt{36+64}}=\begin{pmatrix}0/6\\0/8\end{pmatrix}$ بردار واحد در جهت گرادیان $\nabla f(3,4)$ است.

پس اگراز نقطه '(۳،۴)حرکت کنیم بیشترین مقدار افزایش در مقدار تابع را هنگامی داریم که حرکت در راستای بردار واحدd باشد. پایان مثال ▲

ثابت می‌شود بردار $\dfrac{\nabla f(x_1,...,x_n)}{\|\nabla f(x_1,...,x_n)\|}$ عمود بر منحنی f در نقطه $(x_1,...,x_n)$ است. اگر باندازه فاصله کوچک δ درجهت این بردار از نقطه x حرکت کنیم در مقدار تابع f بیشترین افزایش[2] راخواهیم داشت و اگر درخلاف این جهت یعنی $d=\dfrac{-\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ باندازه فاصله کوچک δ حرکت کنیم بیشترین کاهش(SD)[3] در مقدارتابع خواهیم داشت (وینستون، ۱۹۹۴ ص ۶۸۱).

---

[1] Steepest Descent =maximal decrease

[2] steepest ascent=maximal increase

[3] steepet desecent= maximal decrease

در ضمن گفتنی است که یک شرط پایان دادن روشهای گرادیانی، $\|\nabla f(x_k)\| \le \varepsilon$ می باشدو برخی شرط ها ی دیگر پایان دادن به روشهای الگوریتمی در ص ۳۲۲ بازارا و همکاران (۲۰۰۶) آمده است.

۳-۷-۱ الگوریتم بیشترین کاهش(SD)

روش بیشترین کاهش (SD) برای مینیمم کردن توابع چند متغیره مشتق‌پذیر به کار می‌رود این روش که از مشتق استفاده کرده وبرای مسائل چند متغیره بدون محدودیت قابل استفاده است توسط کوشی[1] در ۱۸۴۷ ارائه شد. **d** جهت این روش در بهینه سازی جهت موسوم به جهت کاهش یا نزول است و همان طور قبلاً در فصل اول تعریف شد جهتی است که به ازای $\lambda \in (0,\delta)$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}+\lambda d)-f(\mathbf{x})}{\lambda} < 0$$

۳-۷-۱-۱ خلاصه الگوریتم بیشترین کاهش(SD)

الگوریتم SD، که گاه الگوریتم کاهش گرادیانی (GD[2]) نیزنامیده می شود، با داشتن نقطه اولیه $x \in R^n$ جستجو ی خطی در جهت خلاف گرادیان($-\nabla f(x)$)انجام می دهد. گامهای این الگوریتم در زیر خلاصه شده است(از ص ۳۸۷ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

مرحله آغازین

عدد اسکالر $\varepsilon > 0$ را انتخاب و یک نقطه شروع مثل $x_1 \in R^n$برگزیده و k را برابریک قرار دهیدو به گام اصلی بروید.

گام اصلی

۱-اگر $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$ متوقف شوید؛ $\mathbf{x}_k$ جواب است.

---

[1] Cauchy

[2] Gradient Descent

در غیراینصورت d_k را برابر $d_k = -\nabla f(x_k)$ قرار داده و λ_k رابرابرجواب بهینه $\lambda \geq ۰$ $\min f(x_k + \lambda d_k)$ قرار دهید.. و $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ را محاسبه و k+۱ را جایگزین k نموده گام اصلی را تکرار کنید.

توجه: جهت گرادیان، جهت بیشترین افزیش است. یک فرق روش بیشترین افزایش و روش بیشترین کاهش در اینست که در روش بیشترین افزایش $d_k = \nabla f(x_k)$ ودر روش بیشترین کاهش(SD): $d_k = -\nabla f(x_k)$.

مثال۳-۱۲

:مطلوبست جواب بهینه مساله زیر به روش بیشترین نزول(S.D)

$$\min Z = f(x_۱, x_۲) = (x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲$$
$$s.t: x_۱, x_۲ \in R^۲$$

حل:

براساس وینستون (۱۹۹۴) ص ۶۸۳

مرحله آغارین

$$k = ۱ \qquad \varepsilon = ۰.۰۱ \qquad \mathbf{x}_۱ = \begin{pmatrix} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۱ \end{pmatrix}$$

گام اصلی

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ۲(x_۱ - ۳) \\ ۲(x_۲ - ۲) \end{bmatrix} \qquad \nabla f(\mathbf{x}_۱) = \begin{bmatrix} ۲(۱-۳) \\ ۲(۱-۲) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -۴ \\ -۲ \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(x_۱)\| = \sqrt{۴^۲ + ۲^۲} > \varepsilon$$

$$d_۱ = -\nabla f(x_۱) = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

$$x_۲ = x_۱ + \lambda d_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ۴ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱+۴\lambda \\ ۱+۲\lambda \end{pmatrix}$$

$$f(x_۱ = ۱+۴\lambda,\quad x_۲ = ۱+۲\lambda) = (۱+۴\lambda-۳)^۲ + (۱+۲\lambda-۲)^۲ = (۴\lambda-۲)^۲ + (۲\lambda-۱)^۲$$

$$f' = ۰ \Rightarrow ۸(۴\lambda-۲) + ۴(۲\lambda-۱) = ۰ \Rightarrow \lambda = ۰/۵$$

$$\lambda_۱ = ۰/۵$$

$$x_{k+۱} = x_۲ = x_۱ + \lambda_۱ d_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۴ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

$$k = ۲$$

گام اصلی

$$\nabla f(x_۲) = \begin{bmatrix} ۲(۳-۳) \\ ۲(۲-۲) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

چون $\|\nabla f(x_۲)\| = ۰ < \varepsilon$ پس متوقف می‌شویم . جواب $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}$. پایان مثال ▲

مثال ۳-۱۳(ص۳۹۰ Sivazlian& Stanfel)برای روش S.D

مطلوبست جواب مساله زیر با روش بیشترین کاهش(S.D)

$$Min\ f(x_۱, x_۲) =$$

$$۲x_۱^۴ - ۴۴x_۱^۳ + ۲۸۲x_۱^۲ - ۴۴۰x_۱ + x_۲^۴ - ۲۸x_۲^۳ + ۲۷۷x_۲^۲ - ۱۱۴۰x_۲ + ۱۹۰۰$$

حل

گرچه تابع تفکیک پذیر است یعنی $f(x_1,x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ و می توان مینیمم f_1 و f_2 را جداگانه بدست آورد و تواماً مینیمم $f(x_1,x_2)$ قرار داد، اما ذیلاً بصورت ۲ متغیره حل می شود.

مرحلهٔ آغازین

نقطهٔ اولیه: $\mathbf{x}_۱ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۸ \end{pmatrix}$ و $k=۱$ $\varepsilon = ۰.۰۱$

k=۱ گام اصلی

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}۸x_۱^۳-۱۳۲x_۱^۲+۵٦٤x_۱-٤٤۰\\ ٤x_۲^۳-۸٤x_۲^۲+۵٤٤x_۲-۱۱٤۰\end{bmatrix} \qquad \nabla f(\mathbf{x}_۱)=\begin{pmatrix}۲۲٤\\ -۳٦\end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(۲,۸)\|=۲۲٦/۹>\varepsilon \qquad f(\mathbf{x}_۱)=۱۹٦$$

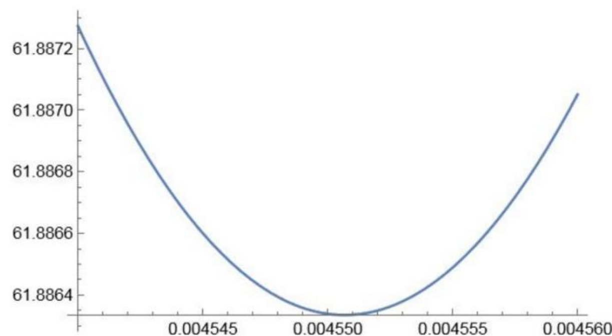
$$d_۱=-\nabla f(\mathbf{x}_۱)=\begin{pmatrix}-۲۲٤\\ ۳٦\end{pmatrix}$$

$$Min \quad f(\mathbf{x}_۱+\lambda d_۱)=?$$

$$\mathbf{x}_۱+\lambda d_۱=\begin{pmatrix}۲\\ ۸\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-۲۲٤\\ ۳٦\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲-۲۲٤\lambda\\ ۸+۳٦\lambda\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}_۱+\lambda d_۱)=۲(۲-۲۲٤\lambda)^٤-\ldots-۱۱٤۰(۸+۳٦\lambda)+۱۹۰۰$$

شکل تابع f مطابق زیر است:



باید آن مقدار λ که تابع فوق را مینیمم می کند بیابیم. مشتق گرفته و صفر قرار می دهیم یا با fminunc جواب آنرا بدست می آوریم: $\lambda_۱=۰.۰۰٤۳$:

[landa,fval]=
fminunc(@(landa) ۲*(۲-۲۲٤*landa)^٤-٤٤*(۲-۲۲٤*landa)^۳+۲۸۲*(۲-۲۲٤*landa)^۲-٤٤۰*(۲-۲۲٤*landa)+(۸+۳٦*landa)^٤-۲۸*(۸+۳٦*landa)^۳+۲۷۷*(۸+۳٦*landa)^۲-۱۱٤۰*(۸+۳٦*landa)+۱۹۰۰,[۱])

landa = ۰,۰۰٤۳ fval = ٦۲,۵۸۱۷

$$x_{k+1}=x_k+\lambda_k d_k \quad x_۲=x_۱+\lambda d_۱=\begin{pmatrix}۲\\۸\end{pmatrix}+۰/۰۰۴۳\begin{pmatrix}-۲۲۴\\۳۶\end{pmatrix}=$$

$$\lambda_۱=۰/۰۰۴۳ \quad x_۲=x_۱+\lambda_۱ d_۱=\begin{pmatrix}۲-۲۲۴\lambda\\۸+۳۶\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲-۲۲۴\times۰/۰۰۴۳\\۸+۳۶\times۰/۰۰۴۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.0463\\8.1533\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_۲)=\begin{pmatrix}8*x(1)^3-132*x(1)^2+564*x(1)-440\\+4*x(2)^3-84*x(2)^2+554*x(2)-1140\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14.7705\\-39.0762\end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(x_۲)\|>\varepsilon$$

چون $\|\nabla f(x_۱)\|>\varepsilon$ باید ادامه داد.

∇f(x) = (۸*x(۱)^۳-۱۳۲*x(۱)^۲+۵٦٤*x(۱)-٤٤۰ , ٤*x(۲)^۳-۸٤*x(۲)^۲+۵۵٤*x(۲)-۱۱٤۰)'

حوال نهایی (٤/۱۸ ۱/۰) بدست می آید

جواب مساله با دستور fminunc) متلب

```
fminunc(@(x) ۲*x(۱)^٤-٤٤*x(۱)^۳+۲۸۲*x(۱)^۲-٤٤۰*x(۱)+x(۲)^٤-۲۸*x(۲)^۳+۲۷۷*x(۲)^۲-۱۱٤۰*x(۲)+۱۹۰۰, [۰,۳])
ans =       ۱,۰۰۰۰    ٤,۱۷۷۱
```
▲

مثال۳-۱۴

(مثال ۲-۶-۸ صفحهٔ ۳۸۷ بازارا و دیگران۲۰۰۶)

مطلوبست جواب بهینه مساله زیر به روش S.D با نقطه شروع '(۰ ۳) و $\varepsilon=۰/۱$.

$$\min Z = f(x_۱,x_۲)=(x_۱-۲)^٤+(x_۱-۲x_۲)^۲$$

حل: ذیلاً ۲ تکرار طبق الگوریتم انجام ونتیجه ۶ تکرار درجدول داده شده است.

$$k=۱ \qquad \nabla f(x_۱,x_۲)=\begin{pmatrix}٤(x_۱-۲)^۳+۲(x_۱-۲x_۲)\\-٤(x_۱-۲x_۲)\end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_۱)=۵۲ \qquad \nabla f(\boldsymbol{x}_۱)=\begin{pmatrix}-۳۲-۱۲\\۲٤\end{pmatrix}$$

$$\left\|\nabla f(\boldsymbol{x}_۱)=\begin{pmatrix}-۳۲-۱۲\\۲٤\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-٤٤)^۲+۲٤^۲}=۵۰/۱۲>\varepsilon \quad \boldsymbol{d}_۱=-\nabla f(\boldsymbol{x}_۱)=\begin{pmatrix}٤٤\\-۲٤\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_۱+\lambda\boldsymbol{d}_۱=\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}٤٤\\-٢٤\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٤٤\lambda\\٣-٢٤\lambda\end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_۱+\lambda\boldsymbol{d}_۱)=f(٤٤\lambda\ ,٣-٢٤\lambda)=(٤٤\lambda-٢)^٤+(٤٤\lambda-٦+٤٨\lambda)^٢=(٤٤\lambda-٢)^٤+(٤\lambda-٦)^٢$$

$$f'(\lambda)=٤\times٤٤(٤٤\lambda-٢)^٣+٢\times٩٢(٩٢\lambda-٦)$$

$$f'(\lambda)=٠\Rightarrow\lambda=\lambda_۱=٠/٠٦١٥\cong٠/.٦٢$$

$$\boldsymbol{x}_{k+۱}=\boldsymbol{x}_k+\lambda_k\boldsymbol{d}_k \qquad \boldsymbol{x}_۲=\boldsymbol{x}_۱+\lambda_۱\boldsymbol{d}_۱=\begin{pmatrix}٤٤\lambda_۱\\٣-٢٤\lambda_۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢/٧٠\\١/٥١\end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_۲)=٠/٣٤٢٥$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_۲)=\begin{pmatrix}٤(٢/٧٠-٢)^٣+٢(٢/٧٠-٢\times١/٥١)\\-٤(٢/٧٠-٢\times١/٥١)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٠/٧٣\\١/٢٨\end{pmatrix} \qquad \|\nabla f(\boldsymbol{x}_۲)\|>\varepsilon$$

$$k=2 \qquad \boldsymbol{x}_۲=\begin{pmatrix}٢/٧٠\\١/٥١\end{pmatrix} \qquad d٢=-\nabla f(\boldsymbol{x}_۲)=-\begin{pmatrix}٠/٧٣\\١/٢٨\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_۲+\lambda\boldsymbol{d}_۲=\begin{pmatrix}٢/٧٠\\١/٥١\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}٠/٧٣\\١/٢٨\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢/٧٠-٠/٧٣\lambda\\١/٥١-١/٢٨\lambda\end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_۲+\lambda\boldsymbol{d}_۲)=(-٢+٢/٧٠-٠/٧٣\lambda)^٤+(٢/٧٠-٠/٧٣\lambda-٣.٠٢+٢.٥٦\lambda)^٢\Rightarrow$$

$$=(٠/٧٠-٠/٧٣\lambda)^٤+(-٠/٣٢+١/٨٣\lambda)^٢=f(\lambda)$$

$$f'(\lambda)=٠\Rightarrow\lambda=٠/٢٣٨٣, x_٣=\begin{pmatrix}٢/٧٠-٠/٧٣\times٠/٢٣٨٣\\١/٥١-١/٢٨\times٠/٢٣٨٣\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢/٥٢٦\\١/٢٠٥\end{pmatrix}, f(x_٣)==٠/٠٩٠١$$

نتایج کامل حل در جدول ۳-۴ آمده است:

جدول ۳-۴ نتایج کامل حل مثال ۳-۱۴ با روش SD (جدول۸-۱۱ص ۳۸۷ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)

k	xk	$f(x_k)$	$\nabla^t f(\boldsymbol{x}_k)$	$\|\nabla f(x_k)\|$	$\boldsymbol{d}_k^t=-\nabla^t f(\boldsymbol{x}_k)$	λ_k	$\boldsymbol{x}_{k+۱}=\boldsymbol{x}_k+\lambda_k\boldsymbol{d}_k$
١	(٠,٠٠, .٠٠)	٥٢,٠٠	(-٤٤,٠, ٢٤,٠٠)	٥٠,١٢	(٤٤ .٠٠, -٢٤,٠٠)	٠,٠٦٢	(٢,٧٠،١,٥١)
٢	(٢,٧٠،١,٥١)	٠,٣٤	(٠,٧٣, ١,٢٨)	١,٤٧	(−٠٧٣.−١,٢٨)	٠،٢٤	(٢,٥٢, ١,٢)
٣	(٢،٥٢, .٢٠)	٠,٠٩	(٠,٨٠, −٠,٤٨)	٠,٩٣	(−٠,٨٠ ,٠،٤٨)	٠.١١	(٢,٤٣ ,١,٢٥)
٤	(٢,٤٣, .٢٥)	٠,٠٤	(٠,١٨ , ٠,٢٨)	٠,٣٣	(−٠،١٨ , −٠,٢٨)	٠.٣١	(٢,٣٧ , ١,١٦)
٥	(٢,٣٧, .١٦)	٠,٠٢	(٠،٣٠, −٠,٢٠)	٠,٣٦	(−٠،٣٠ , ٠,٢٠)	٠.١٢	(٢,٣٣, .١٨)
٦	(٢,٣٣, /١٨)	٠,٠١	(٠,٠٨ , ٠,١٢)	٠,١٤	(−٠,٠٨, −٠,١٢)	٠,٣٦	(٢,٣٠, .١٤)
٧	(٢،٣٠, .١٤)	٠−٠٠٥	(٠,١٥, −٠،٠٨)	٠,١٧	(−٠,١٥, ٠,٠٨)	٠.١٣	(٢,٢٨, .١٥)
٨	(٢,٢٨, .١٥)	٠,٠٠٧	(٠,٠٥, ٠,٠٨)	٠,٠٩			

حل باfminunc در متلب با ۲ نقطه شروع متفاوت:

```
fminunc(@(x)  ( x(١)-٢ )^٤+(x(١)-٢*x(٢))^٢, [٠،٣])
ans =    ١,٩٩٣٢   ٠,٩٩٦٦
fminunc(@(x)  ( x(١)-٢ )^٤+(x(١)-٢*x(٢))^٢, [١،٢])
ans =١,٩٩٢٢   ٠,٩٩٦١
```
▲

تمرینات

۱-مطلوبست مینیمم تابع زیر با روش SD

$(2x_1-1)^4+(x_1-x_2)^2$ با نقطه اولیه '(۰ ۱) و $\varepsilon=0.01$

جواب $\begin{pmatrix}0.464\\0.466\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار

۲-مطلوبست ماکزیمم تابع با روش SD : $2x_1x_2-x_1^2-2x_2^2+2x_2$ با نقطه شروع '(۰ ۱) و $\varepsilon=0.4$

۳- مطلوبست مینیمم تابع زیر با روش SD

$(x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2$ با نقطه اولیه '(۰ ۲) و $\varepsilon=0.2$

جواب $\begin{pmatrix}1.079\\1.129\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار $\varepsilon=0.2$ و $\begin{pmatrix}1.0704\\1.1368\end{pmatrix}$ در ۷ تکرار $\varepsilon=0.025$ و

۴- مطلوبست مینیمم تابع زیر با روش SD

$(x_2-x_1x_2)^3+(x_1-x_2)^2$ با نقطه اولیه '(۰ ۱) و $\varepsilon=0.1$

جواب $\begin{pmatrix}0.5533\\0.6467\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار

۵- مطلوبست مینیمم تابع $(x_2-x_1x_2)^3+(x_1-x_2)^2$ با روش SDبا نقطه اولیه '(۰ ۱) و $\varepsilon=0.1$ جواب $\begin{pmatrix}0.5533\\0.6467\end{pmatrix}$ در ۳ تکرار

۳-۷-۲ روش نیوتن-رافسون برای بهینه سازی توابع چند متغیره بی محدودیت

(بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص۳۹۴)

ازجمله روشهای جستجوئی که از مشتق برای بهینه سازی توابع مشتق پذیرچند متغیره بدون محدودیت استفاده می‌کند روش نیوتن(نیوتن-رافسون) است. قابل ذکراست که این روش در واقع ترکیبی از روش بیشترین کاهش (SD) با آنچه موسوم به مقیاس بندی افاین[۱] می‌باشد(بازارا و همکاران ،۲۰۰۶ ص ۳۹۴) . در ضمن متدی بنام نیوتن تعدیل شده نیز وجود دارد (به مراجعی مثل ۱۱۴ مک کور میک،۱۹۸۳ مراجعه شود).

قبلاً روش نیوتن برای کمینه سازی توابع مشتق پذیریک متغیره بدون محدودیت تشریح شد. حال برای توابع مشتق پذیر چند متغیره تعمیم داده می شود. در این روش که به روش نیوتن-رافسون هم موسوم است یک تابع درجه دوم به تابع چند متغیره موردنظر برازش می شود. بدین منظور با بسط تابع چندمتغیره حول $\mathbf{x}_k$ تقریب زیر را برای تابع f بکار می بریم:

$$f(\mathbf{x}) \cong f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^t (\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)^t H(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) + \ldots$$

که در آن $H(x_k)$ ماتریس هشیان[۲] تابع f در $\mathbf{x}=\mathbf{x}_k$ است.

یاد آوری می شود که بسط تیلور تابع یک متغیره θ حول λ_k چنین بود:

$$\theta(\lambda) = \theta(\lambda_k) + \theta'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k) + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_k)^2\theta''(\lambda_k) + \ldots \Rightarrow$$

$$\theta(\lambda) \cong \theta(\lambda_k) + \frac{1}{1!}\theta'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k) + \frac{1}{2!}(\lambda-\lambda_k)^2\theta''(\lambda_k) = q(\lambda)$$

اگر λ_{k+1} مشتق $q(\lambda)$ را صفر کند قبلاً دیدیم که باشرط اگر$(\vartheta''(\lambda_k) \neq 0)$ ، آنگاه:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - [\theta''(\lambda_k)]^{-1}\theta'(\lambda_k)$$

---

[۱] steepest descent with affine scaling

[۲] یادآوری محاسبه گرادیان با متلب-مثال: دستورات زیر

```
syms x  y;f=۲*x^٤-٤٤*x^٣+٢٨٢*x^٢-٤٤٠*x+y^٤-٢٨*y^٣+٢٧٧*y^٢-
١١٤٠*y+١٩٠٠; G=gradient(f)
```

گرادیان تابع $f(x_1,x_2) = 2x_1^4 - 44x_1^3 + 282x_1^2 - 440x_1 + x_2^4 - 28x_2^3 + 277x_2^2 - 1140x_2 + 1900$ را می‌دهد

به طور مشابه برای روش نیوتن-رافسون جهت بهینه سازی تابع چندمتغیره f اگر هشیان تابع معکوس داشته باشد می توان رابطهٔ بازگشتی زیر را نوشت:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [H(\mathbf{x}_k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

بطور مکرر $\mathbf{x}_{k+1}$ را محاسبه و هنگامی که $\|\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})\| < \varepsilon$ متوقف می شویم. واضح است که امکان استفاده از روش نیوتن-رافسون وقتی فراهم است که هشیان تابع f(x) معکوس داشته باشد.

یادآوری: بردار $d = -[H(\mathbf{x}_k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$ جهت نیوتنی در نقطه x_k نام دارد.

قضیه ۳-۶

در روش نیوتن $\frac{1}{2} \nabla f^t(\mathbf{x}_k) \underbrace{\left[\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)\right]^{-1}}_{H^{-1}(\mathbf{x}_k)} \nabla f(\mathbf{x}_k)$ برابرمقدار کاهش تابع در مرحلهٔ kام است. . پایان قضیه ■

قابل ذکر است که روش نیوتن در یک مورد بسیار ساده و در یک تکرار جواب را می‌دهد این حالت برای تابع از درجه دوم زیرمی‌باشد(آخر ص ۲۸۹ آوریل،۱۹۷۶)

$$f(\mathbf{x}) = a + b^t \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t H(\mathbf{x})$$

که در اینجا $H(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x})$ یک ماتریس با مقادیر ثابت است.

مثال ۳-۱۵ مطلوبست اکستریمم تابع زیر با روش نیوتن-رافسون $\varepsilon = 0.01$:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (-x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2$$

حل: ابتدا بررسی می شود ایا تابع f مینیمم دارد یا ماکزیمم؟

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2 + x_3) - 2(-x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1 + x_2 - x_3) \\ 2(x_1 - x_2 + x_3) + 2(-x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1 + x_2 - x_3) \\ 2(x_1 - x_2 + x_3) + 2(-x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1 + x_2 - x_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}$$

اگر هشیان را بدست آوریم چنین می شود:

$$H(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} ٦ & -٢ & -٢ \\ -٢ & ٦ & -٢ \\ -٢ & -٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

چون در اینجا هشیان ثابت و به متغیر بستگی ندارد. براحتی امکان بررسی قضایای مربوط به مینیمم وماکزیمم داشتن تابع بدون در دست داشتن نقطه ساکن را داریم.
قضیه ۳-۳ در اینجا صدق می‌کند پس تابع مینیمم دارد زیرا H_k ها مثبت اند:

$H_۱$ با حذف ۲=۱-۳ سطر و ۲ ستون (از آخر)بدست می آید

$H_۱(x)=۶>۰$

$H_۲$با حذف ۱=۲-۳ سطر و ۱ ستون(از آخر) بدست می آید :

$$H_۲(\mathbf{x})=\begin{vmatrix} ٦ & -٢ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix}=٤٠>٠$$

$H_۳$ با حذف ۰=۳-۳ سطر و هیچ ستون بدست می آید :

$$H_۳(\mathbf{x})=\det\begin{bmatrix} ٦ & -٢ & -٢ \\ -٢ & ٦ & -٢ \\ -٢ & -٢ & ٦ \end{bmatrix}=١٢٨>٠$$

H_Kها مثبت اند پس تابع مینیمم دارد.

اعمال روش نیوتن برای یافتن مینیمم بانقطه شروع $\mathbf{x}_١=\left(\frac{١}{٢} \quad ١ \quad \frac{١}{٢}\right)'$

$k=١$

$$\mathbf{x}_٢=\mathbf{x}_١-\left[H(\mathbf{x}_١)\right]^{-١}\nabla f(\mathbf{x}_١)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_١)=\nabla f\left(\frac{١}{٢},١,\frac{١}{٢}\right)=\begin{bmatrix} ٢\left(\frac{١}{٢}-١+\frac{١}{٢}\right)-٢\left(-\frac{١}{٢}+١+\frac{١}{٢}\right)+٢\left(\frac{١}{٢}+١-\frac{١}{٢}\right) \\ -٢\left(\frac{١}{٢}-١-\frac{١}{٢}\right)-٢\left(-\frac{١}{٢}+١+\frac{١}{٢}\right)+٢\left(\frac{١}{٢}+١-\frac{١}{٢}\right) \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

یافتن معکوس هشیان با روش جاروب کردن(یا گاس جردون)

$$H^{-1}(\mathbf{x}_1):\left[\begin{array}{ccc|ccc} ٦ & -٢ & -٢ & ١ & \cdot & \cdot \\ -٢ & ٦ & -٢ & \cdot & ١ & \cdot \\ -٢ & -٢ & ٦ & \cdot & \cdot & ١ \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} ١ & \cdot & \cdot & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨} \\ \cdot & ١ & \cdot & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} \\ \cdot & \cdot & ١ & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} \end{array}\right]$$

یا بانرم افزاری مثل متلب:

```
>> H=[...
۶ -۲ -۲
-۲ ۶ -۲
-۲ -۲ ۶];
>> inv(H)        ans =
    ۰,۲۵   ۰,۱۲۵   ۰,۱۲۵
    ۰,۱۲۵   ۰,۲۵   ۰,۱۲۵
    ۰,۱۲۵   ۰,۱۲۵   ۰,۲۵
```

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1-H^{-1}(\mathbf{x}_1)\nabla f(\mathbf{x}_1) \qquad \mathbf{x}_٢=\begin{pmatrix}\frac{١}{٢}\\ \cdot \\ \frac{١}{٢}\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨}\\ \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨}\\ \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdot \\ ٤ \\ \cdot\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot \\ -١ \\ \cdot\end{pmatrix}$$

چون $\nabla f(\mathbf{x}_٢)=\begin{bmatrix}\cdot+٢-\cdot \\ \cdot-٦-\cdot \\ \cdot+٢+\cdot\end{bmatrix}$ و $\|\nabla f(\mathbf{x}_٢)\|=\sqrt{٤+٣٦+\cdot٤}>\varepsilon=\cdot.\cdot١$ لذا متوقف نباید شد. پایان مثال ▲

مثال ۳-۱۶

برای روش چند متغیره نیوتن-رافسون ازص ۳۹۶ بازاراو همکاران(۲۰۰۶)

با $\varepsilon=\cdot/\cdot۵$ و $x_١=(\cdot,٣)^t$ مطلوبست $\min(x_١-٢)^٤+(x_١-٢x_٢)^٢$

حل

رابطه روش نیوتن-رافسون :

$$\mathbf{x}_{k+١}=\mathbf{x}_k-H^{-١}(\mathbf{x}_k)\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

k=۱

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - H^{-1}(\mathbf{x}_1)\nabla f(\mathbf{x}_1) \qquad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4(x_1-2)^3 + 2(1)(x_1 - 2x_2) \\ 2(-2)(x_1 - 2x_2) \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 12(x_1-2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_1) = \nabla f(x_1 = 0,\ x_2 = 3) = \begin{pmatrix} 4(-2)^3 + 2(0-6) \\ -4(0-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$H(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 12(0-2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},\ \det\left(H^{-1}(x_1)\right) = 384,$$

$$H^{-1}(x_1) = \frac{1}{384}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/0208 & 0/0104 \\ 0/0104 & 0/1302 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1}(\mathbf{x}_1)\nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0/0208 & 0/0104 \\ 0/0104 & 0/1302 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -44 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0/67 \\ 2/67 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - H^{-1}(\mathbf{x}_1)\nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0/67 \\ 2/67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/67 \\ 0/33 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} 4(0/67-2)^3 + 2(1)(0/67 - 2\times 0/33) \\ 2(-2)(0/67 - 2\times 0/33) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -9/39 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

چون $\|\nabla f(\mathbf{x}_2)\| = \sqrt{9/39^2 + 0/04^2} > \varepsilon = 0/05$ ادامه می‌دهیم.

$$k = 2\ \ \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 - \left[H(\mathbf{x}_2)\right]^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_2)$$

جدول ۳-۵ نتایج محاسبات را نشان می‌دهد. بعداز شش تکرار نقطه $\mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} 1/83 \\ 0/91 \end{pmatrix}$ حاصل می‌شود با

$$\nabla f(x_7) = \sqrt{0.0003^2 + 0.04^2} = 0.04.$$

جدول ۳-۵ نتایج محاسبات مثال ۳- ۱۶ با روش نیوتن-رافسون
(جدول۱۲-۸ ص ۳۹۶ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

تکرار (k)	$(x_k)^t$	$f(x_k)$	$\nabla f(x_k)$	$H(x_k)$	$H^{-1}(x_k)$	$-H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$	
۱	(۰,۰۰, ۳)	۵۲,۰۰	$(-٤٤,٠, ٢٤,٠)^t$	$\begin{bmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{384}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 50 \end{bmatrix}$	(۰,٦۷, -۲,٦۷)	۵۰,۱۱۹
۲	(۰,٦۷, ۰,۳۳)	۳,۱۳	$(-٩,٣٩, -٠,٠٤)^t$	$\begin{bmatrix} 23.23 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{169.84}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 23.23 \end{bmatrix}$	(۰,٤٤, ۰,۲۳)	۹,۳۹
۳	(۱,۱۱،۰,۵٦)	۰,٦۳	$(-٢,٨٤, -٠,٠٤)^t$	$\begin{bmatrix} 11.5 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{76}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 11.5 \end{bmatrix}$	(۰,۳۰،۰,۱٤)	۲,۸٤
٤	(۱,٤۱،۰,۷۰)	۰,۱۲	$(-٠,٨٠, -٠,٠٤)^t$	$\begin{bmatrix} 6.18 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{33.44}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6.18 \end{bmatrix}$	(۰،۲۰،۰,۱۰)	.۸
۵	(۱,٦۱،۰,۸۰)	۰,۰۲	$(-٠,٢٢, -٠,٠٤)^t$	$\begin{bmatrix} 3.83 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{14.64}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3.83 \end{bmatrix}$	(۰,۱۳،۰,۰۷)	.۲۲۳٦
٦	(۱,۷٤،۰,۸۷)	۰,۰۰۵	$(-٠,٠٧, ٠,٠٠)^t$	$\begin{bmatrix} 2.81 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6.48}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2.81 \end{bmatrix}$	(۰،۰۹, ۰,۰٤)	.۰۷
۷	(۱,۸۳،۰,۹۱)	۰,۰۰۰۹	(۰,۰۰۰۳, -۰,۰٤)				.۰٤

پایان مثال ▲

روش نیوتن از سرعت همگرایی بالایی برخوردار است.در کتاب راردین(۱۹۹۸) حل مساله ای با روش نیوتن و با جستجوی گرادیانی مقایسه شده است. اولی طی ۳ حرکت و دومی طی ۲۷ حرکت به یک جواب نزدیک به هم رسیده اند (راردین،۱۹۹۸ص ۷۶۵). گفتنی است که شاید عیب عمده این روش این باشد که ممکن است اصلاً همگرایی نیابد. تنها اگر از نزدیک نقطه بهبنه موضعی شروع کند همگرایی آن قابل تضمین است (راردین ۱۹۹۸ ص ۷۶۶).

درخاتمه این بخش شایان ذکر است که الگوریتم تحت عنوان BFGS[1] یک خانواده از جستجو های خطی شبه نیوتنی با مشتق مرتبه دوم برای حل مسایل بهینه سازی غیر خطی بدون محدودیت است. BFGS تقریبی از روش نیوتون بوده وبه محاسبه دقیق هشیان نیاز ندارد ودر ضمن برای مسایل با تعداد متغیر بسیار زیاد مناسب نیست.

۳-۷-۳ روشهای گرادیان مزدوج[2]

اساس روش های گرادیان مزدوج برای حداقل کردن توابع چند متغیره مشتق پذیر $f : R^n \to R$ بدون محدودیت شامل تولید یک دنباله از تکرار y_j براساس $y_{j+1} = y_j + \lambda_j d_j$ می باشد به طوزی که $d_1, d_2, ..., d_j, .., .d_n$ (n= تعداد متغیرها) برای $j=1$ از رابطه $d_1 = -\nabla f(y_1)$ و برای $j > 1$ با شرط $\nabla f(y_{j+1}) \neq 0$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$d_{j+1} = -\nabla f(y_{j+1}) + \alpha_j d_j$$

این روش ها مختلفند. ذیلاً روش گرادیان مزدوج فلچر و ریوز توضیح داده می شود

۳-۷-۳-۱ خلاصه الگوریتم گرادیان مزدوج فلچر–ریوز[3]

مرحله آغازین:

یک عدد اسکالر $\varepsilon >$۰ برای خاتمه الگوریتم انتخاب ونقطه شروع x_1 را برگزینید با قرار دادن $y_1 = x_1$ ، $k=1$ ، $j=1$ و $d_1 = -\nabla f(y_j)$ به مرحله اصلی بروید.

مرحله اصلی:

گام ۱

اگر $\|\nabla f(y_j)\| < \varepsilon$ متوقف شوید در غیر اینصورت جواب $\min f(y_j + \lambda d_j)$ با شرط $\lambda \geq$ ۰ را در حالت بهینه به دست آورده و λ_j را مساوی آن قرار داده y_{j+1} را چنین قرار دهید: $y_{j+1} = y_j + \lambda_j d_j$

---

[1] در ۱۹۷۰ توسط Broyden, Fletcher, Goldfarb ,Shanno مستقلاً طرح گردید.

[2] Condugate Gradient Algorithm(از مهندس بهاره فرحبخش۲: آبان ۹۵مرجع بازارا و همکاران، ۲۰۰۶، ص۴۲۲)

[3] Conjugate Gradient method of Fletcher & Reeves

اگر n کمتر از تعداد متغیرها بود ($j<n$) به گام ۲ در غیر اینصورت به گام ۳ بروید.

گام ۲

$$d_{j+1} = -\nabla f(y_{j+1}) + \alpha_j d_j$$

که در آن $\alpha_j = \frac{\| \nabla f(y_{j+1}) \|^2}{\| \nabla f(y_j) \|^2}$ می باشد.

$j+1$ را جایگزین j کنید و به گام ۱ بروید.

گام ۳

$d_1 = -\nabla f(y_1)$ ، $y_1 = x_{k+1} = y_{n+1}$ و $j=1$ و $k+1$ را به جای k قرار دهید و به گام ۱ بروید.

مثال ۳-۱۷ :

مطلوب است کمینه سازی $min\ Z = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$ با نقطه اولیه $(۰،۳)'$ و $\varepsilon = ۰,۰۲$

حل

مرحله آغازین:

$$k = 1, j = 1 \qquad y_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad d_1 = \nabla f(y_1)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(y_1) = \begin{pmatrix} -44 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 44 \\ -24 \end{pmatrix}$$

مرحله اصلی:

گام ۱

$$\| \nabla f(y_1) \| = \sqrt{(-44)^2 + (24)^2} = 50.12 > \varepsilon$$

$$y_1 + \lambda d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 44 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\lambda \\ 3 - 24\lambda \end{pmatrix}$$

$$f(y_1 + \lambda d_1) = (44\lambda - 2)^4 + (92\lambda - 6)^2$$

$$f'\left(y_1 + \lambda d_1\right) = 176\left(44\lambda - 2\right)^3 + 184\left(92\lambda - 6\right) = 0$$

$\lambda = ۰.۰۶۲ \Rightarrow \lambda_۱ = ۰.۰۶۲.$

$$y_2 = y_1 + \lambda_1 d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (0.062)\begin{pmatrix} 44 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 1.51 \end{pmatrix}$$

چون j=۱<n=۲ است به گام ۲ میرویم

گام ۲

$$d_2 = -\nabla f\left(y_2\right) + \alpha_1 d_1$$

$$\nabla f\left(y_2\right) = \begin{pmatrix} 0.732 \\ 1.28 \end{pmatrix} \qquad \left\|\nabla f\left(y_2\right)\right\| = \sqrt{0.732^2 + 1.28^2} = 1.47$$

$$\alpha_1 = \frac{\left\|\nabla f\left(y_2\right)\right\|^2}{\left\|\nabla f\left(y_1\right)\right\|^2} = \frac{1.47^2}{50.12^2} = 0.0009$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} -0.732 \\ -1.28 \end{pmatrix} + (0.009)\begin{pmatrix} 44 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -1.30 \end{pmatrix}$$

j+۱ را جایگزین j کرده و به گام ۱ میرویم. پس.j=۲

گام ۱

$$y_2 + \lambda d_2 = \begin{pmatrix} 2.70 \\ 1.51 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -0.69 \\ -1.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.70 - 0.69\lambda \\ 1.51 - 1.30\lambda \end{pmatrix}$$

$$f\left(y_2 + \lambda d_2\right) = \left(0.7 - 0.69\lambda\right)^4 + \left(1.91\lambda - 0.32\right)^2$$

$$f'\left(y_2 + \lambda d_2\right) = (-2.76)\left(0.7 - 0.69\lambda\right)^3 + 3.82\left(1.91\lambda - 0.32\right) = 0$$

از حل معادله بالا: $\lambda = ۰.۲۳$ پس $\lambda_۲=۰.۲۳$.

$$y_3 = y_2 + \lambda_2 d_2 = \begin{pmatrix} 2.70 \\ 1.51 \end{pmatrix} + (0.23)\begin{pmatrix} -0.69 \\ -1.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.54 \\ 1.21 \end{pmatrix}$$

چون j=n است به گام ۳ میرویم.

$$y_1 = x_2 = y_3 \;\; d_1 = -\nabla f\left(y_1\right)$$

$$\nabla f\left(y_1\right) = \begin{pmatrix} 0.87 \\ -0.48 \end{pmatrix} \qquad d_1 = \begin{pmatrix} -0.87 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

$j = ۱$ و به جای k، $k+۱$ را قرار داده و به گام ۱ میرویم.

نتایج بقیه حل طبق محاسبات روش گرادیان مزدوج در جدول زیر آمده است

توجه: جواب در تکرارچهارم $x_۲ = ۱.۰۹۴$ و $x_۱ = ۲.۱۸۵$, $Z^* = ۰/۰۰۱۲$ است▲ در

جدول ۳-۶ نتایج حل مثال ۳-۱۷ طبق محاسبات روش گرادیان مزدوج
(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص۴۲۴)

k	x_k , $f(x_k)$	j	y_j, $f(y_j)$	Δf	$\|\nabla f\|$	α_{j-1}	d_j	λ_j
۱	(۰, ۳), ۵۲	۱	(۰, ۳) ۵۲	(-۴۴،۲۴)	۵۰,۱۲		(۴۴,-۲۴)	۰,۰۶۲
		۲	(۲,۷۰،۱,۵۱) ۰,۳۴۲	(۰,۷۳،۱,۲۸)	۱,۴۷	۰,۰۰۰۹	(-۰,۶۹,-۱,۳۰)	۰,۲۳
۲	(۲,۵۴،۱,۲۱), ۰,۱	۱	(۲,۵۴،۱,۲۱) ۰,۱	(۰,۸۷,-۰,۴۸)	۰,۹۹		(-۰,۸۷،۰,۴۸)	۰,۱۱
		۲	(۲,۴۴،۱,۲۶) ۰,۰۴۴	(۰,۱۸،۰,۳۲)	۰,۳۷	۰,۱۴	(-۰,۳۰,-۰,۲۵)	۰,۶۳
۳	(۲,۲۵،۱,۱۰), ۰,۰۰۸	۱	(۲,۲۵،۱,۱۰) ۰,۰۰۶۴	(۰,۱۶,-۰,۲۰)	۰,۳۲		(-۰,۱۶،۰,۲۰)	۰,۱
		۲	(۲,۲۳،۱,۱۲) ۰,۰۰۲۹	(۰,۰۳،۰,۰۴)	۰,۰۵	۰,۰۴	(- ۰,۰۳۶،۰,۰۳۲)	۱,۰۲
۴	(۲,۱۹،۱,۰۹), ۰,۰۰۱۷	۱	(۲,۱۹،۱,۰۹) ۰,۰۰۱۷	(۰,۰۵,-۰,۰۴)	۰,۰۶		(-۰,۰۵،۰,۰۴)	۰,۱۱
		۲	(۲,۱۸۵،۱,۰۹۴) ۰,۰۰۱۲	(۰,۰۰۲،۰,۰۱)	۰,۰۱			

برای مقایسه درپایان این بخش نتیجه حل مساله $\min(x_۱ - ۲)^۴ + (x_۱ - ۲x_۲)^۲$ با چندین روش در جدول زیر آورده می شود:

جدول ۳-۷ نتیجه حل مساله $\min(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$ با چند الگوریتم

نام الگوریتم	ارائه دهنده در کلاس: مهندس	نقطه شروع	جواب	مقدار تابع	تعداد تکرار
بیشترین کاهش (SD)		(۱, ۱)	(۲,۲۸, ۱,۱۵)	۰,۰۰۷	۸
SD		(۰, ۳)	(۲,٦٦, ۱,۳٤)	۰,۱۹۰۱	
هوک -جیوز		(۰, ۳)	(۲, ۱)	۰	۵
مختصات دوره ای		(۰, ۳)	(۲,۲۲, ۱,۱۱)	۰,۰۰۲۳٤۲	٦
نیوتن -رافسون		(۰, ۳)	(۱,۸۳, ۰,۹۱)	۰,۰۰۰۹	٦
متلب		(۱, ۲)	(۱,۹۹۲۲, ۰,۹۹٦۱)	۳۷× ۱۰^{-۱۰}	
متلب		(۰, ۳)	(۱,۹۹۳٦, ۰,۹۹٦٦)	۲۱× ۱۰^{-۱۰}	
گرادیان مزدوج	بهاره فرحبخش	(۰, ۳)	(۲,۱۸۵, ۱,۰۹)	۰,۰۰۱٤	٤
DFP	معصومه آقایی	(۰, ۳)	(۲,۱۱۵, ۱,۰۵۸)	۰,۰۰۰۲۲	٤
Rosenbrock بازاراو همکاران (۲۰۰۶)ص۳۸۲	مریم خایف میترا مزینانی	(۰, ۳)	(۲,۲٤, ۱,۱۳)	۰,۰۰٤	٤
Rosenbrock		(۰, ۳)	(۲,۲, ۱,۱۲)	۰,۰۰۳	٤
Powellآوریل(۲۰۰۳) ص ۴۴۳	فائقه رنجبری	(۰, ۳)	(۲,۸۳, ۱,٤۱۵)	۰,٤۷٤٦	۳
جستجوی ناحیه اعتماد Trust region	امین یوسفی	(۰, ۳)	(۱,۹۸٦ , ۱,۰۰٤)	۰,۰۰۱٦	۳
Nedler-Mead Symplex	شیما روستا	(۰, ۰)	(۱.۸٤۲۵, ۰,۹٦۲۵)	۰,۰۰۷٤	۱۳
BFGS	هانیه نجارزاده		(۲.۰۹, ۱.۰٤)	۰.۰۰۰۱٦٦	٤

تمرینات

مطلوبست حل توابع زیر با روش نیوتن –رافسون

۱- $\text{Min } Z=(x_1-x_2)^2+(x_1+2x_2)^2$

$\varepsilon=0.05$ و نقطه اولیه $(1 \quad 0/5)'$

۲- $\text{Min } Z=3(x_1)^4+(x_2)^4+12x_1+8x_2$

$\varepsilon=0.01$ و نقطه اولیه $(-1 \quad -1)'$ با $\|\nabla f(\mathbf{x}_1)\|=0.001<\varepsilon$

جواب $(-1/26 \quad -1)'$

۳- $Min \;\; f(x)=5x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+7$ با $\varepsilon=0.01$ ونقطه اولیه $(2 \quad 1)$

جواب: $(0 \quad 0)$ در یک تکرار

۴- $Min \;\; f(x)=-x_1-2x_3-x_3x_2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$

جواب: $(1/334 \quad 0/666 \quad 0/5)'$ با نقطه شروع مبدا و $\varepsilon=0.05$

قرآن کتاب تعلیم و شرح اسمای الهی است.

آیت اله جوادی ۹۵/۸/۱۱

٤

بهینه سازی غیرخطی

با محدودیت،

شرایط KKT و FJ

۴

بهینه سازی غیرخطی با محدودیت[۱]، شرایط کاروش کان تاکر و فریتز جان

هدف فصل

این فصل به مدلهای بهینه سازی(برنامه‌ریزی) غیرخطی شامل یک تابع هدف و چند محدودیت می پردازد وشرایط بهینگی کاروش کان تاکر و فریتز جان را تشریح و۲ الگوریتم موسوم به حرکت درجهت امتداد موجه برای حل مسائلNLP با محدودیت را توضیح می دهد.

۴–۱ مقدمه

فصل حاضر به حل مدلهای مشتمل بر توابع پیوسته نرم چند متغیره (درهدف و محدودیت ها) اختصاص داده شده است. الگوریتم های توانمند حل مسایل این چنینی مبتنی بر یافتن نقطه‌ای است که تعدادی شرط را ارضاء نماید(نِم‌هازر[۲]و همکاران، ۱۹۸۹ فصل ۳). دراینجا می‌خواهیم پیرامون شرطهای لازم و کافی برای بهینه بودن بودن یک نقطه در مسایل غیرخطی محدودیت دار ازنوع

---

[۱] ازجمله مراجع کتاب اصغر پور(۱۳۸۱) ص ۴۱۰ ،راردین(۱۹۹۹)ص۷۸۷ وبازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص۱۶۵

[۲] Nemhauser

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = f(\mathbf{x}) = f(x_1 \dots x_n) \\ s.t \quad & g_i(\mathbf{x}) \le 0 \quad i = 1,\dots,m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1,\dots,p \\ & \mathbf{x} \in R^n \end{aligned}$$

بحث کنیم. لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶) اولین کارها را در زمینه شرایط لازم برای جواب یک مساله برنامه ریزی خیر خطی با محدودیت‌های تساوی ارائه داد و کاروش در ۱۹۳۹ و۲محقق دیگربنام کان و تاکر در ۱۹۵۱ شرایط لاگرانژ را توسعه دادند. راه تشخیص بهینه بودن یک نقطه در NLP استفاده از شرطهای لازم موسوم به شروط کاروش کان تاکر[1] یا استفاده از شرطهای لازم موسوم به شرطهای فریتز جان است. شروط کاروش کان تاکرتوسعه کار لاگرانژ برای شرایط لازم یک مساله NLP با محدودیت‌های تساوی است. توصیه می شود خوانندگان قبل از مطالعه این شرایط، تعریف استقلال خطی بردارها را در فصل ۱ مرور تمایند.

۴-۲شرطهای کاروش کان تاکر (KKT) و ضرایب لاگرانژ

ذیلاً به شرط های موسوم به شرط های کاروش کان تاکر(KKT) که در تعیین بهینگی جواب مسائل غیرخطی کاربرد دارد پرداخته می شود. این شرط ها گاه لازمند و گاه کافی و در آنها یا از گرادیان استفاده شده و یا از هشیان :

شرطهای KKT
- ۱ – شرطهای لازم
  - مرتبه اول
  - مرتبه دوم
- ۲ – شرطهای کافی
  - شرط روی تابع
  - مرتبه اول
  - مرتبه دوم

قابل توجه است که

-شرط مرتبه اول از گرادیان و شرط مرتبه دوم از هشیان استفاده می‌کند.

---

[1] Karrush Kahn Tucker=KKT

- ملاحظه خواهید نمود که تفاوت عمده شروط لازم مرتبه دوم و شروط کافی مرتبه دوم در مثبت نیمه معین و مثبت معین بودن هشیان تابع است.

- به آن نقاط شدنی که در شروط [مرتبه اول]کاروش-کان–تاکر صدق کند نقاط KKT می گویند.

در ادامه،، کار لاگرانژ و کاروش کان تاکر در حالات زیرتوضیح داده می شود:

الف) شرطهای لازم برای بهینگیِ یک نقطه در مسائل NLP با محدودیت تساوی،

ب) شرطهای لازم بهینگی نقطه در مسائل غیرخطی با محدودیت از نوع نامساوی،

ج) شرطهای لازم بهینگی برای مسائل NLP با محدودیت نامساوی وxjهای نامنفی،

د) شرطهای لازم KKT در مسائل NLP با محدودیت نامساوی و تساوی.

۴-۲-۱ شرطهای لازم مر تبه اول(ودوم) برای بهینه بودنِ یک نقطه در NLP با محدودیت‌های تساوی

مساله زیر را در نظر بگیرید(ص ۲۷۷بستر کاس،۱۹۹۹ ص ۱۹۰ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

$$s.t \quad h_i(\boldsymbol{x}) = ۰ \qquad i = ۱,\dots,m$$

که درآن توابع $f: R^n \to R \quad , \quad h_i: R^n \to R \quad i = ۱,\dots,m$ به طور پیوسته مشتق‌پذیرند(ص ۲۷۷بستر کاس،۱۹۹۹). قضیه زیر شرطهای لازم مرتبه اول ودوم برای اینکه یک نقطه بتواند نقطه مینیمم موضعی برای این مساله باشد را بیان می‌کند.

قضیه ۴-۱ (قضیه ضرائب لاگرانژبرای مسایل با محدودیت تساوی):

شرط های لازم مر تبه اول و دوم مینیمم موضعی

(ص ۲۷۸بستر کاس،۱۹۹۹)

شرط لازم مر تبه اول

فرض کنید x^* یک مینیمم موضعی تابع n متغیره f مشروط بر $h_i(x)=۰,\ i=۱,\dots,m$ باشد

Min f

s.t.

$h_i(x)=۰,\ i = ۱, \dots, m$

و $\nabla h_1(x^*),...,\nabla h_m(x^*)$ بطور خطی مستقل باشند در اینصورت اعداد اسکالر $\lambda^* = \lambda_1^*...\lambda_m^*$ موسوم به ضرائب لاگرانژ وجود دارد به طوری که

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = 0$$

توجه کنید

این رابطه شامل n معادله است. وبا توجه به اینکه x^* شدنی هم باید باشد جمعاً در شرط لازم m+n معادله با m+n مجهول داریم.

شرط لازم مر تبه دوم

به علاوه اگر f و h_i دوبار مشتق پذیر باشند حاصل ضرب داده شده در زیر هیچگاه منفی نخواهد بود:

$$y^t \left(H_f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* H_{h_i}(\mathbf{x}^*) \right) y \geq 0 \qquad \forall y \in V(\mathbf{x}^*)$$

که در آن

y یک بردار n عنصری و

مجموعه V یک فضای برداری است وچنین تعریف می شود:

$$V(\mathbf{x}^*) = \{ y \,|\, \nabla h_i(\mathbf{x}^*)^t y = 0 \;\; i = 1,...,m \}$$

ومنظور از H ماتریس هشیان است. پایان قضیه■.

گاه در کتابها به جای y از $\Delta x = x - x^*$ استفاده می شود و لذا

$$V(x^*) = \{ \Delta x \;|\; \nabla h_i(x^*)^t \Delta x = 0, \; i = 1,...,m \}.$$

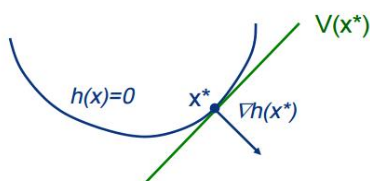
V زیرمجموعه شامل تغییرات شدنی مرتبه اول[1] یا فضای مماس برh در نقطه x^*[2] نامیده می شود[1]. نمونه ای از V در شکل ۴-۱ نمایش داده شده است

---

[1] subspace of first order feasible variations

این مجموعه که در بسیاری از ادبیات بهینه سازی به آن اشاره شده برای مسایل با محدودیت غیر تساوی هم تعریف می شود: رجوع شود به ص ۶۰ تزرابسون(۲۰۱۸)

[2] tangent space of h at x ∗



شکل٤-۱ نمایش ۲ بعدی مماس بر h در نقطه x^*

توجه کنید

- وجه نامگذاری V به زیرمجموعه شامل تغییرات شدنی مرتبه اول می‌تواند این باشد که اگر مقدار متغیرx از x^* به اندازه $\Delta\,\mathrm{x}$ تغییر کند و $\mathrm{x} = \mathrm{x}^* + \Delta\,\mathrm{x}$ بخواهد شدنی باقی بماند یعنی در $h_i(\mathrm{x}) = ۰$ صدق کند با در نظرگرفتن بسط تیلور $h_i(\mathrm{x})$ حول x^* تا مرتبه اول یعنی

$$h_i(\mathrm{x}) = h_i(\mathrm{x}\,*) + \nabla h_i(\mathrm{x}^*)^t(x - \mathrm{x}^*) + \cdots$$

چونx^* نیز شدنی بودیعنی $h_i(\,\mathrm{x}^*) = ۰$ پس $\nabla h_i(\mathrm{x}^*)^t(\Delta\,\mathrm{x}) = ۰$.

- شرط صدق این قضیه، استقلال خطی $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ هاست و متذکر می شود که در این مساله این شرط همان منظم (regular) بودن x^* است.

- شدنی بودنx^*به طور ضمنی در قضیه مستور است. به عبارت دیگر

$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{l=۱}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = ۰$ به همراه شدنی بودن x^*، ازشروط لازم برای بهینگی x^* است

- در اینجا یعنی برای مسایل دارای محدودیت تساوی، ضرائب لاگرانژ مثبت، منفی یا صفرمی توانند باشند.

یک کاربرد شرط لازم مرتبه دوم اینست که نقاطی راکه از حل معادلات مرتبه اول بدست آمده است می تواند غربال کند.

- قضیه ۴-۱ برای جالتی است که $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ ها مستقل خطی باشتد. اگر استقلال خطی نداشته باشتد نمی توان نتیجه گرفت که x^* یک مینیمم موضعی نیست.

مثال۴-۱ برای تعیین مجموعه V:

[1] http://ratml.org/misc/opt.pdf ص ۱۵ Multivariate Calculus and Optimiz. Relational AI Inc July ۳۰, ۲۰۱۹

اگر نقطه $A=(1,1,1)'$ یک نقطه مینیمم موضعی برای مساله زیر باشد

$$\text{Min } f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}{2}$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

مجموعه V را در شرط لازم مر تبه دوم مطابق تعریف بدست آورید

حل

نقطه A مینیمم موضعی است پس در شرط لازم مرتبه دوم هم باید صدق کندوچون یک محدودیت داریم($m=1$)، باید برای A داشته باشیم:

$$(\Delta x)^t \left(H_f(A) + \lambda_1^* H_h(A) \right) y \geq 0 \qquad \forall y \in V(A)$$

$$V(A) = \{y \mid \nabla h(A)^t y = 0\}$$

y یک بردار است با نعداد عناصرمساوی متغیر های مساله:

$$\mathbf{y} = (y_1 \ \ y_2 \ \ y_3)'$$

محاسبه گرادیان تابع محدودیت:

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H_h(x) = 0 \qquad \nabla h(A) = (1 \ \ 1 \ \ 1)'$$

$$V(A) = \left\{\mathbf{y} \,\middle|\, (1 \ \ 1 \ \ 1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \equiv \{\mathbf{y} \mid (y_1 + y_2 + y_3) = 0\}$$

یعنی مجموعه V مربوط به نقطه A، برداری است که حاصل جمع عناصرش صفر باشد.

پایان مثال ▲

۴-۲-۱-۱ دو تعبیر و برداشت از شرط مرتبه اول $\nabla f(\mathbf{x}^*)+\sum_{l=1}^{m}\lambda_i^*\nabla h_i(\mathbf{x}^*)=0$

(برت سکاس ،۱۹۹۹ ص ۲۷۹):

۱-تعبیر هندسی،

رابطه $\nabla f(\mathbf{x}^*)+\sum_{l=1}^{m}\lambda_i^*\nabla h_i(\mathbf{x}^*)=0$ میر ساند اگر x^* یک مینیمم موضعی مساله

$$\min\ f(x)$$
$$s.t\quad h_i(x)=0\qquad i=1,\dots,m$$

باشد، بردارگرادیان تابع هدف در x^* وبردارهای گرادیان توابع محدودیت های تساوی در x^* مستقل خطی نیستند به عبارت دیگر گرادیان تابع هدف بازای x^* متعلق به زیر فضای بردارهای گرادیان توابع محدودیت ها می باشد.

۲- شباهت $\nabla f(x^*)^t\Delta x=0$ ($\Delta x=x-\mathbf{x}^*$) مربوط به مسائل بهینه سازی دارای محدودیت تسادی با $\nabla f(\mathbf{x}^*)=0$ در بهینه سازی بی محدودیت

می دانیم که اگر حاصل‌ضرب بردارهای غیر صفر $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ صفرباشد ($\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{b}}=0$) آندو برهم عمودند. حال فرض کنید x^* مینیمم موضعی مساله فوق باشد، در ادامه این مبحث بخشی از ص۲۷۷ برتسکاس(۱۹۹۹)آورده می شود

بردار گرادیان تابع در نقطه مینیمم موضعی $\mathbf{x}^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)$، $\nabla f(x^*)$، عمود است بر زیرمجموعه شامل تغییرات شدنی مرتبه اول یعنی

$$V(x^*)=\{\Delta x\ \mid \nabla h_i(x^*)^t\Delta x=0,\ i=1,\dots,m\}.$$

در این مساله زیرمجموعه $V(x^*)$ شامل آن تغییرات (یعنی Δx)از جواب شدنی x^* است که برای آن، بردار حاصل یعنی $x=x^*+\Delta x$ در محدودیت هایmگانه $h_i(x)=0$ تا "[تقریب] مر تبه اول صدق می‌کند"

در ضمن چون در نقطه مینیمم موضعیx^*، شرط لازم مرتبه اول در تکنیک لاگرانژ یعنی $\nabla f(\mathbf{x}^*)+\sum_{l=1}^{m}\lambda_i^*\nabla h_i(\mathbf{x}^*)=0$ باید برقرارباشد؛ و با ضرب Δx در طرفین داریم:

$$\nabla f(x^*)^T\Delta x+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla h_i(x^*)^T\Delta x=0$$

لذا با توجه به تساوی $\nabla h_i (x^*)^t \Delta x=0$ در مجموعه$V(x^*)$ ، نتیجه می شود که در نقطه مینیمم موضعی x^*، حاصلضرب $\nabla f(\mathbf{x}^*)^t \Delta x$ برای تمام تغییرات $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ متعلق به $V(x^*)$ صفر است:

$$\nabla f(x^*)\Delta x = ۰, \quad \forall\ \Delta x \in V(x^*).$$

پس $\nabla f(x^*)$ و $V(x^*)$ برهم عمودند.

$\nabla f(\mathbf{x}^*)^t \Delta x = 0$ در بهینه سازی با محدودیت شبیه صفر بودن گرادیان یعنی $\nabla f(\mathbf{x}^*)=0$ در بهینه سازی بدون محدودیت است(برتسکاس،۱۹۹۹ ص۲۷۷-۲۷۸)[۱]

مثال ۴-۲ آیا نقطه $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} -۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$ می تواند نقطه بهینه مساله زیر باشد؟

$$\begin{aligned} &Min \quad x_۱ + x_۲ \\ &s.t \quad x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۲ \end{aligned}$$

حل

$(-۱)^۲ + (-۱)^۲ = ۲$ پس نقطه $\begin{pmatrix} -۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$ شدنی است . حال ببینیم ضریب لاگرانژ وجود دارد یا خیر.

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda \nabla h_۱(\mathbf{x}^*) = ۰$$

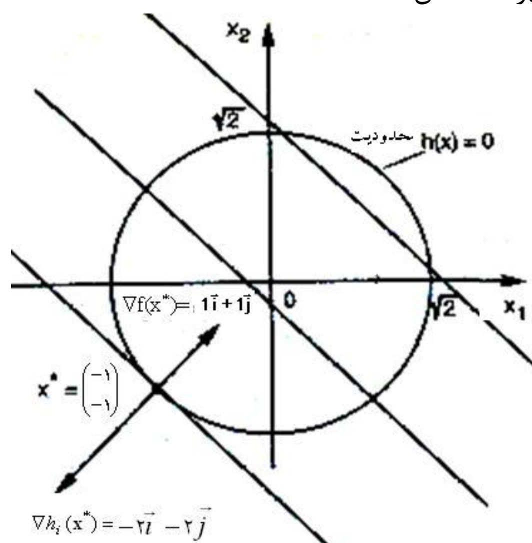
$$\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ۲x_۱ \\ ۲x_۲ \end{pmatrix} \overset{x^*=(-۱\ \ -۱)}{=} ۰ \Rightarrow \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -۲ \\ -۲ \end{pmatrix} = ۰ \Rightarrow \lambda = \frac{۱}{۲}$$

نقطه شدنی است و ضریب لاگرانژ وجود دارد پس نقطه می تواند بهینه باشد .

شکل زیر شرط لازمِ $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{l=۱}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = ۰$ ا برای مینیمم موضعی بودن نقطه $(-۱\ \ -۱)'$ را برای این مساله به تصویر کشانده است. گرادیان تابع هدف در این نقطه $\nabla f(x^*) = (۱\ \ ۱)'$ یعنی بردار $۱\vec{i} + ۱\vec{j}$ است که عمود بر منحنی تابع هدف در آن نقطه است. از طرفی $\nabla h(\mathbf{x}^*) = (-۲\ \ -۲)'$ گرادیان تابع محدودیت در آن نقطه

۱

است یعنی بردار $-۲\vec{i}-۲\vec{j}$ که جهتش درست بر خلاف جهت $\nabla f\,(x^{*})$ بوده و داریم $\nabla f\,(\mathbf{x}^{*})+۰.۵\nabla h_i\,(\mathbf{x}^{*})=۰$ لذا ضریب لاگرانژ $\lambda^{*}=۰.۵$ می باشد (اقتباس ازشکل ص ۲۷۸ برت سکاس،۱۹۹۹)



پایان مثال ▲

-در حقیقت شرایط قضیه ۴-۱، شروط لازم بهینه بودن جواب را برای مساله فوق می دهد ولی تحت شرایطی کافی هم می باشد. مثلاً اگر همگی توابع مشتق پذیر و تابع f محدب و h_i ها خطی باشند، آن وقت جواب حاصله از دستگاه حاوی شرایط لازم و محدودیت‌ها، جواب بهینه مساله فوق است (اقتباس از وینستون، ۱۹۹۴ ص ۶۸۵) .

مثال ۴- ۳

آیا نقطه $x'=\begin{pmatrix} ۰ \\ \sqrt{۲} \end{pmatrix}$ و $\bar{x}=\begin{pmatrix} -۲ \\ -۳ \end{pmatrix}$می توانند نقطه بهینه مدل زیرباشد؟

$$Min \quad x_۱+x_۲$$
$$s.t \quad x_۱^۲+x_۲^۲=۲$$

حل

در مورد $x' = \begin{pmatrix} ۰ \\ \sqrt{۲} \end{pmatrix}$ خیر زیرا گرچه نقطه شدنی است اما مقداری برای λ از دستگاه $\nabla f(\mathbf{x}') + \lambda \nabla h_۱(\mathbf{x}')$ به دست نمی آید. در مورد $\bar{x} = (-۲ \quad -۳)'$ نقطه شدنی نیست.

پایان مثال ▲

شایان ذکر است یک نقطه ممکن است مینیمم موضعی باشد اما ضرائب لاگرانژ برای ان وجود نداشته باشد. یعنی ممکن است برای یک مینیمم موضعی که نقطه ای غیر منظم(منفرد)[۱] باشد ضرائب لاگرانژ وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر ممکن است که نقطه غیر منظم باشد و مینیمم موضعی هم باشد اما نتوان برای آن ضرایب لاگرانژ یافت. یادآور می شود همانطور که در فصل اول آمده است در یک مساله غیر خطی با محدودیت از نوع تساوی($h_i(x) = ۰$) اگر در نقطه شدنی $\bar{\mathrm{X}}$ کلیه $\nabla h_i(\bar{\mathrm{X}})$ ها مستقل خطی باشند، نقطه $\bar{\mathrm{X}}$ منظم(غیرمنفرد [۲]) نامیده می‌شود.

مثال ۴-۴ (برتسکاس،۱۹۹۰ص ۲۸۰)

در مساله

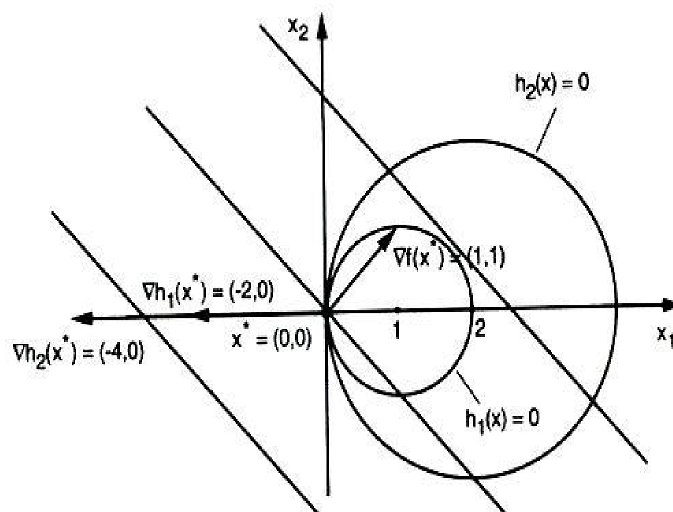
$$Min\ f(x) = x_۱ + x_۲$$
$$s.t.$$
$$h_۱(x) = (x_۱ - ۱)^۲ + x_۲^۲ - ۱ = ۰$$
$$h_۲(x) = (x_۱ - ۲)^۲ + x_۲^۲ - ۴ = ۰$$

همانطور که شکل زیر نشان می دهد جواب $x_۲^* = ۰$ ، $x_۱^* = ۰$ است اما $\nabla h_۱(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۰ \end{pmatrix}, \nabla h_۲(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} -۴ \\ ۰ \end{pmatrix}, \nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و هیچ ضریب لاگرانژی نمی‌توان یافت که دررابطه $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_۱ \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \lambda_۲ \nabla h_۲(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \lambda_۱ \begin{pmatrix} -۲ \\ ۰ \end{pmatrix} + \lambda_۲ \begin{pmatrix} -۴ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۰$ صدق‌کند. زیرا ∇h_i ها وابسته خطی اند(بنا به آنچه درتعریف استقلال بردارها درفصل ۱ آمده

---

[۱] nonregular

[۲] regular



است). $\nabla h_1(\mathbf{x}^*)=(-2\ \ 0)', \nabla h_2(\mathbf{x}^*)=(-4\ \ 0)'$ وابسته‌اند چون دترمینان ماتریس $\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ صفر است. درشکل هم دیده می شود برایند $\lambda_1\nabla h_i(\mathbf{x}^*)+\lambda_2\nabla h_2(\mathbf{x}^*)$ و $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ دقیقاً درخلاف جهت هم نیستند به عبارت دیگر $x_2^*=0$ ، $x_1^*=0$ نقطه‌ای منظم نیست. در ضمن می توان گفت که (برت سکاس، ۱۹۹۹، ص ۲۸۰):

مشکل اینست که در این مساله ۲ متغیره ، که نقطه مینیمم آن نقطه ای منظم نیست، زیرمجموعه شامل تغییرات شدنی مرتبه اول یعنی

$$V(\mathbf{x}^*)=\{\Delta \boldsymbol{x} \mid \nabla h_1(\mathbf{x}^*)^t\Delta\boldsymbol{x}=0, \nabla h_2(\mathbf{x}^*)^t\Delta\boldsymbol{x}=0\}$$

با توجه به محاسبات ذیل ، مجموعه $\{\Delta\boldsymbol{x}\mid \Delta x_1=0, \Delta x_2\in R\}$ است :

$$\nabla h_1(\mathbf{x}^*)^t\Delta\boldsymbol{x}=0 \quad \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1 & \Delta x_2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}2\Delta x_1=0\\ 0\times\Delta x_2=0 \quad \Delta x_2\ \text{هرعدد}\end{cases}$$

$$\nabla h_2(\mathbf{x}^*)^t\Delta\boldsymbol{x}=0 \quad \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1 & \Delta x_2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}2\Delta x_1=0\\ 0\times\Delta x_2=0\Rightarrow\Delta x_2\in R\end{cases}$$

این زیرمجموعه نسبت به مجموعه تغییرات شدنی حقیقی[1] در اینجا یعنی $\{\Delta x \mid h(x^*+\Delta x)=0$ یا $\Delta x=0\}$ ابعاد بزرگتری دارد.

[1] true set of feasible variation

بهینه بودن $\mathbf{x}^*$ با اجزای $x_2^* = 0$, $x_1^* = 0$ می رساند که $\nabla f(x^*) = (1 \quad 1)'$ برمجموعه حقیقی تغییرات شدنی عمود است. اما برای اینکه ضریب لاگرانژ وجود داشته باشدباید $\nabla f(\mathbf{x}^*).V(\mathbf{x}^*) = 0$ یعنی $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ بر زیرمجموعه تغییرات شدنی مرتبه اول عمود باشد؛ که در اینجا اینطور نیست. اگر ∇h_i ها استقلال خطی می داشتند زیرمجموعه حقیقی و زیرمجموعه مرتبه اول یکسان می‌بودند واین اشکال رح نمی‌داد. (برت سکاس، ۱۹۹۹ ص ۲۸۱). پایان مثال ▲

اگردر این مثال، ∇h_iها استقلال خطی می‌داشتند، ابعاد مجموعه تغییرات شدنی حقیقی و زیرمجموعه شامل تغییرات شدنی مرتبه اول یکسان می‌بود و این مشکل بوجود نمی آمد. پس

اگر ∇h_i ها وابسته خطی باشند مساله ممکن است مینیمم داشته باشد و ضرایب لاگرانژ وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر اگر $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ وابسته خطی باشند، $\mathbf{x}^*$ ممکن است مینیمم موضعی باشد ولی ضرایب لاگرانژ برای آن نتوان یافت.

۴-۲-۱-۲ تعریف تابع لاگرانژ(لاگرانژین)

شرایط لازم توضیح داده شده در قضیه ۴-۱ برحسب تابعی بنام تابع لاگرانژ که با L ($L: R^{n+m} \to R$) نشان داده می شود قابل بیان است که در ان m تعداد محدودیت ها وn تعداد متغیر ها ی مسا له است.

تابع لاگرانژ(لاگرانژین)مساله زیر

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t \quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, h_i(\boldsymbol{x})$$

حال اگر $\mathbf{x}^*$ یک نقطه مینیمم موضعی و منظم (regular) باشد،

و $\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ را با $\nabla_X L$ و $\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix}$ با $\nabla_\lambda L$ و $\left(H_f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* H_{h_i}(\mathbf{x}^*)\right)$

رابا $\nabla_{xx}L(x^*,\lambda^*)$ یا $H_L(x^*,\lambda^*)$ نشان دهیم

شروط لازم مر تبه اول بهینگی در قضیه ۴-۱ همراه با $\mathbf{h}(x^*)=0$ (منظور از $\mathbf{h}$ همه h_i هاست) بصورت فشرده این چنین نیز نوشته می‌شود. یعنی اگر یک نقطه مثل x^* بخواهد مینیمم موضعی باشد باید در روابط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \nabla_X L(x^*,\lambda^*)=0 \\ \mathbf{h}(x^*)=0 \end{cases}$$

پس .شرط $\nabla f(\mathbf{x}^*)+\sum_{l=1}^{m}\lambda_i^*\nabla h_i(\mathbf{x}^*)=0$ معادل $\nabla_X L(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=0$ است وبرای یافتن نقطه ای که شرط لازم مرتبه اول بهینگی را برای مساله داشته باشد می‌توان $\nabla_X L$ را صفر قرار داده پس از نوشتن شرط شدنی بودن دستگاه معادلات مربوطه را حل کرد. بعنون مثال برای تعیین نقاطی که در شرط بهینگی مرتبه اول مدل زیر صدق می کنند

$Min\ 2x_1^2 + x_2 - x_3$

s.t.

$x_1 + x_2 - 5 = 0$

$2x_3 - x_1^2 + 2x_1 = 0$

تابع لاگرانژین یعنی $L = f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 2(x)$ را نوشته از آن نسبت به x گرادیان گرفته مساوی صفر قرار داده و دستگاه شامل $\nabla_X L=0$ ودو محدودیت را حل می‌کنیم.

و **شرط لازم مرتبه دوم بهینگی** در قضیه ۴-۱ چنین قابل نوشته شدن است:

$$y^t H_L(x^*,\lambda^*)y \geq 0 \quad \forall y \in V(x^*)=\{y \,|\nabla h_i(\mathbf{x}^*)^t y = 0 \;\; i=1,\dots,m\}$$

که در آن $H_L(x^*,\lambda^*)$ هشیان لاگرانژین به ازای x^*,λ^* است.

توجه کنید $\nabla_X L = 0$ و عبارات زیر یکسانند :

$$\nabla_{\mathbf{X}} L = 0 \quad or \quad \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2...., n$$

or

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_j} + ... = 0 \quad j = 1, 2...., n$$

or

$$\nabla f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i = 0 \quad or \quad \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + ... + \lambda_m \nabla h_m = 0$$

یا

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ .... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_1} \\ .... \\ \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0 \quad or \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_1} \\ .... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0$$

یا

$$\nabla f + \left(\nabla h_1 .... \nabla h_m . \right) \quad (\lambda_1 ... \lambda_m)^t = 0$$

مثال ۴-۵(برت سکاس، ۱۹۹۹، ص ۲۸۸)

الف)

برای مساله زیر نقطه ای را بدست آورید که شرط لازم بهینگی نقطه را داشته باشد

$$\min f(\mathbf{x}) = \frac{۱}{۲}(x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲)$$
$$s.t. \; x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳$$

حل

$$L = \frac{۱}{۲}(x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲) + \lambda_۱(x_۱ + x_۲ + x_۳ - ۳)$$

نقطه را با $x^* = (x_1^* ... x_n^*)^t$ و ضریب لاگرانژ مربوطه به محدودیت را با λ_1^* نشان می‌دهیم. این نقطه باید در $\nabla_X L(x,\lambda)=0$ صدق و **شدنی نیز** باشد. در این مساله، که فقط محدودیت تساوی دارد، شدنی بودن یعنی صدق در محدودیت تساوی.

$$\nabla_x L = \left(\frac{1}{2}(2x_1) + \lambda_1 \quad \frac{1}{2}(2x_2) + \lambda_1 \quad \frac{1}{2}(2x_3) + \lambda_1 \right)'$$

شرط لازم مرتبه اول و محدودیت ها چنین اند

$$\begin{cases} \nabla_X L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* + \lambda_1^* = 0 \\ x_2^* + \lambda_1^* = 0 \\ x_3^* + \lambda_1^* = 0 \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^* = -1, \quad A = \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_2^* = 1 \\ x_3^* = 1 \end{cases}$$

ازاین سری معادلات تنهایک نقطه مینیمم بدست آمدوبرای آن ضریب لاگرانژوجود دارد. پس این نقطه شدنی A می‌تواند بهینه باشد.

ب)آیا نقطه A در بخش دوم قضیه۴-۱ هم صدق می کند؟

باید برای A داشته باشیم:

$$(\Delta x)^t \left(H_f(A) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* H_{h_i}(A) \right) \Delta x \geq 0 \qquad \forall \Delta x \in V(A)$$

$$V(A) = \{\Delta x \,|\, \nabla h_i(A)^t \Delta x = 0 \;\; i = 1,...,m\}$$

یا چون $m=1$

$$(\Delta \mathbf{x})^t \left(H(A) + \lambda_1^* H_{h_1}(A) \right) \Delta \mathbf{x} \geq 0 \qquad \forall \Delta \mathbf{x} \in V(A)$$

$$V(A) = \{\Delta \mathbf{x} \,|\, \nabla h_1(A)^t \Delta \mathbf{x} = 0 \}$$

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

محاسبه گرادیان و هشیان

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\end{pmatrix}\Rightarrow \nabla f(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\nabla h_1(x)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad H_{h_1}(x)=0$$

$$H_f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$V(A)=\left\{\Delta \boldsymbol{x}\,\middle|\,(1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{pmatrix}=0\right\}\Rightarrow V(A)=\{\Delta \boldsymbol{x}\,|(\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3)=0\}$$

$$\Delta x^t\left(H_f(A)+\lambda\, H_{h_i}(A)\right)\Delta x=$$

$$(\Delta x_1\quad \Delta x_2\quad \Delta x_3)\left(I+0\right)\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{pmatrix}=(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+(\Delta x_3)^2$$

چون این عبارت همواره غیر منفی است پس بازای تمام $\forall \Delta x\in V(A)$ نیز غیر منفی است لذا شرط لازم مرتبه دوم هم برای $A=(1\;\;1\;\;1)'$ ارضاء می شود. ازاینرو نقطه A شرط لازم بهینگی مرتبه اول و دوم را دارد. پایان مثال ▲

۴-۲-۲ شرطهای لازم مرتبه اول کاروش کان تاکر (KKT) برای بهینگی جواب در مسائل غیرخطی با محدودیت های از نوع نامساوی[1]

ذیلاً قضیه ای در مورد شرطهای لازم مرتبه اول کاروش کان تاکر برای بهینگی جواب در مسائل غیرخطی با محدودیت های از نوع نامساوی ذکر می‌گردد. برای استفاده از قضیه زیر متذکر می شود که محدودیت های مساله، همگی باید از نوع کوچکتر یا مساوی($\leq$)باشند. اگر محدودیتها از نوع دیگری باشند باید قبلاً آنها را به این فرم در آورد ولو اینکه طرف راست منفی گردد.

قضیه۴-۲ شرایط KKT

بازاراو همکاران(۲۰۰۶) ص۱۹۰، وینستون (۱۹۹۴) ص۶۹۲

فرض کنید Xیک مجموعه غیرتهی در R^n و $g_i : R^n \to R \quad , f : R^n \to R$ برای $i = 1,...,m$ باشد.مساله P را مطابق زیردر نظر بگیرید.

P مساله

$$\min f(\mathbf{x}) = f(x_1 ... x_n)$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \qquad i = 1,...,m$$
$$\mathbf{x} \in X$$

x_j نامقید

$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ را یک جواب شدنی مساله کمینه سازی فوق و $I = \{i : g_i(\bar{x}) = b_i\},$ بگیرید. فرض کنید که g_i,f ها برای $i \in I$ در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ مشتق پذیرو g_i ها برای $i \notin I$ در نقطه $\bar{x}$ پیوسته ، به علاوه $\nabla g_i(\bar{x})$ها برای $i \in I$ بطور خطی مستقل باشند.

حال اگر $\bar{\mathbf{x}}$ جواب مساله P باشد آنگاه اعداد اسکالر u_i برای $i \in I$ چنان وجود دارد که:

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$
$$u_i \geq 0 \quad i \in I$$

[1] بازاراو همکاران()۲۰۰۶ ص ۱۹۰، وینستون(۱۹۹۴)ص ۶۹۱؛ مک کورمیک(۱۹۸۳) ص ۲۱۴.

علاوه بر فرض‌های بالا اگر در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ ، g_i ها برای $i \notin I$ [نتیجتاً همه g_i ها] مشتق پذیر باشند شرایط فوق را چنین می‌توان نوشت

$$KKT-I)\quad \nabla f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m}u_i\nabla g_i(\bar{x})=0$$

$$KKT-II)\quad u_i[b_i-g_i(\bar{x})]=0\qquad i=1,\dots,m$$

$$KKT-III)\quad u_i\geq 0\qquad i=1,\dots,m$$

$KKT-IV)$ صدق $\bar{x}$ در محدودیتها

پایان قضیه■

علاقه مندان به تعبیر هندسی شرایط KKT می توانند منابعی نظیر اصغر پور(۱۳۸۱) ص۴۱۰ و وینستون (۱۹۹۴) ص ۶۹۵ را ببینند؛ به طور اجمال در مساله کمینه سازی می توان گفت که شرط اول بدین معنی است که با توجه به اینکه طبق شرط KKT-I $\nabla f(\bar{\mathrm{x}})=-\sum_{i=1}^{m}u_i\nabla g_i(\bar{\mathrm{x}})$ بردارگرادیان تابعf در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$، یعنی بردار $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$، و برآیند بردارهای $u_1\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}),u_2\nabla g_2(\bar{\mathbf{x}})$و... باید در خلاف جهت هم باشند.

توجه کنید که

-بجای داخل کروشه در روابط نوع II می‌توان متغیر کمبود[1] محدودیت iام را ($g_i(\bar{\mathbf{x}})+S_i=b_i$)گذاشت: آنگاه $u_iS_i=0$.

-اگر مساله بیشینه سازی باشد، علامت قبل از $\sum$ در رابطه KKT-I منفی خواهد شد.

--به جای $u_i[b_i-g_i(\bar{\mathrm{x}})]=0$ می توان نوشت که:

اگر $u_i=0$ آنگاه $b_i-g_i(\bar{\mathrm{x}})\geq 0$ و اگر $u_i>0$ انگاه $b_i-g_i(\bar{\mathrm{x}})=0$.

در ضمن u_i ها را می‌توان قیمت سایه مربوط به محدودیت iام در نظر گرفت (وینستون ،۱۹۹۴ص ۶۹۲). اگر طرف راست i امین محدودیت در مساله داده شده در

---

[1] slack

قضیه از b_i به $b_i+\Delta$ (مقدار کوچک Δ) ا فزایش پیدا کند تابع هدف کمینه سازی در حالت بهینه باندازه $u_i^* \times \Delta$ کاهش می‌یابد.

اگر $\mathbf{x}$ درحالت بهینه بازای یک j از $\bar{x}_j$ به $\bar{x}_j+\delta$ تغییر کند (مقدار کوچک δ)؛ و بقیه x_j ها تغییر نکند، تابع هدف باندازه $\left(u_i\left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right)_{x=\bar{x}}\right)\times\delta$ تغییر می‌یابد.

اثبات:

چون بسط تیلور مرتبه اول تابع چند متغیره ، مقدار i امین محدودیت, $g_i(x)$ حول $\bar{\mathbf{x}}:\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_j,\ldots,\bar{x}_n$ چنین است

$$g_i(x)=g_i(\bar{\mathbf{x}})+(x-\bar{\mathbf{x}})\nabla g_i(x)|_{X=\bar{X}}=$$

$$=g_i(\bar{\mathbf{x}})+(x_1-\bar{x}_1,\ldots,x_j-\bar{x}_j,\ldots,x_n-\bar{x}_n)\left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\ \ldots\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\ldots\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right)^t_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$$

در نقطه $\mathbf{x}':(x_1=\bar{x}_1,\ldots,x_j=\bar{x}_j+\delta,\ldots,x_n=\bar{x}_n)$ چنین می شود:

$$g_i(\mathrm{x}')=g_i(\bar{\mathbf{x}})+(\bar{x}_1-\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_j+\delta-\bar{x}_j,\ldots,\bar{x}_n-\bar{x}_n)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\\ \\ \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\\ \\ \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}\quad\Rightarrow$$

$$g_i(\mathrm{x}')=g_i(\bar{\mathbf{x}})+(0,\ldots,\delta,\ldots,0)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\\ \\ \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\\ \\ \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}\quad\Rightarrow$$

$$g_i(\mathbf{x})\cong g_i(\bar{\mathbf{x}})+\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}|_{x=\bar{\mathbf{x}}}\,\delta\le b_i \qquad g_i(\bar{\mathbf{x}})\le b_i-\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}|_{x=\bar{\mathbf{x}}}\,\delta$$

لذا اگرعنصر j ام نقطه بهینه به اندازه δ افزایش یابد (افزایش $\overline{x}_j$ به اندازه δ)
RHS محدودیت i ام را به اندازه $\Delta_i = -\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}|_{x=\overline{\mathbf{x}}}\ \delta$ تغییر داده و تابع هدف را
به اندازه $u_i \times \Delta_i = u_i[-\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}|_{x=\overline{\mathbf{x}}}\ \delta]$ تغییر می یابد. پایان اثبات ■

-تغییر در RHS تمام محدودیت‌ها، تابع هدف را تقریباً به میزان زیرتغییر می‌دهد:

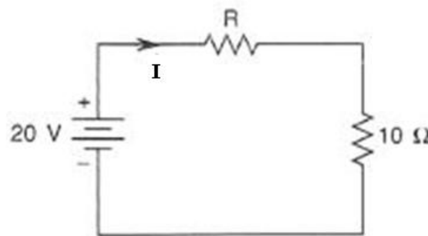
$$s = \sum_{i=1}^{m} u_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{m} u_i [-\delta \frac{\partial g_i(\overline{\mathbf{x}})}{\partial x_j}] = -\delta \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i(\overline{\mathbf{x}})}{\partial x_j}.$$

وقتی عنصر j ام نقطه بهینه به اندازه δ افزایش یابداگر s منفی باشد تابع هدف کمتر می شود واگر s مثبت باشد تابع هدف بیشتر می شود.

-یک نکته قبل توجه دیگر اینکه $b_i - g_i(\overline{\mathbf{x}})$ و u_i همزمان نمی توانند مثبت باشند چون: $u_i[b_i - g_i(\overline{\mathbf{x}})] = 0$ پس اگر $u_i > 0$ باید $g_i(\overline{\mathbf{x}}) = b_i$ که اصطلاحاً می گویند محدودیت درنقطه $\overline{\mathbf{x}}$ تساوی آور (بایندینگ) باشد؛در ضمن اگر $u_i = 0$ باید $g_i(\overline{\mathbf{x}}) \le b_i$

مثال۴-۶

درمدار زیرمی‌خواهیم R را طوری تعیین کنیم که توان جذب شده توسط آن



یعنی $P = RI^۲$ بیشینه گردد. از تغییرات مجموع مقاومت سیستم بر اثر تغییرات دما صرفنظر کنید. شرطهای KKT را نوشته و مشخص کنید کدام گزینه زیر صحیح است.

$$\begin{cases} a) \quad u > ۰ \quad R - ۲۰ \\ b) \quad u = ۰ \quad R = ۲۰ \\ c) \quad u = ۰ \quad R = ۱۰ \\ d) \quad u > ۰ \quad R = ۱۰ \end{cases}$$

حل

توان(P) جذب شده توسط مقاومت $P = RI^{۲}$ **است**

$$V = (R + ۱۰)I \longrightarrow I = \frac{۲۰}{R + ۱۰}, P = RI^{۲} = R(\frac{۲۰}{R + ۱۰})^{۲}$$

مدل مساله چنین می شود:

$$\text{Max} - \frac{۴۰۰R}{(R+۱۰)^{۲}}$$
$$\text{s.t} \quad R \geq ۰$$

شزطهای KKT برای مساله کمینه سازی با محدودیت ازنوع $\leq$ چنین است:

$$\nabla f(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=۱}^{m} u_i \nabla g_i(\overline{\mathbf{x}}) = ۰$$

$$u_i (g_i - b_i) = ۰$$

$$u_i \geq ۰$$

محـــــــــدویتها

مدل را مطابق زیر می نویسیم

$$\text{Minf}(R) = -\frac{۴۰۰R}{(R+۱۰)^{۲}}$$
$$\text{s.t}$$
$$g: -R \leq ۰$$

$$\nabla g = -۱ \quad \nabla f = \frac{-۴۰۰(۱۰ + R)^{۲} + ۲(۱۰ + R)(۴۰۰R)}{(۱۰ + R)^{۴}}$$

شرطهای KKT (شامل محدودیت):

$$\begin{cases} \frac{-۴۰۰(۱۰ + R)^{۲} + ۲(۱۰ + R)(۴۰۰R)}{(۱۰ + R)^{۴}} - u = ۰ \quad (\boldsymbol{I}) \\ u(R) = ۰ \quad (\boldsymbol{II}) \\ R \geq ۰ \\ u \geq ۰ \end{cases}$$

برای یافتن جواب KKT :

چون $R \times u = ۰$ لااقل یکی از ایندو باید صفر باشد یک حالت ممکنه: $R > ۰, u = ۰$

با صفر قرار دادن u در رابطه اول، با توجه به اینکه مخرج صفر نیست صورت باید صفر باشد:

$-۴۰۰(۱۰+R)^{۲}+۲(۱۰+R)(۴۰۰R)=۰ \Rightarrow$
$۴۰۰(۱۰+R)-۲(۴۰۰R)=۰ \Rightarrow R=۱۰$

چون $R=۱۰$ در محدودیت صدق می‌کند پس $u=۰$, $R=۱۰$ یعنی گزینه C جواب قابل قبول است.

در نظر گرفتن حالات دیگر u , R لازم نیست چون جواب گرفته ایم.

توجه اگر در محیط متلب از دستور solve استفاده کنیم:

```
solve(' -۴۰۰*(۱۰+R)^۲+۲*(R+۱۰)*(۴۰۰*R) = ۰')
```

۲ جواب ۱۰ و ۱۰- را می‌دهد که واضح است ۱۰+ قبول می گردد

پایان مثال ▲

استنتاج[۱] ۴-۲-۱ برای کافی بودن شرطهای KKT

(اقتباس ازهلیه و لیبر من،۱۹۶۸،ص ۵۷۶)

فرض کنید که در مساله NLPزیر

$$Min / Max f(\mathrm{x}) \quad \mathrm{x}=x_1,...,x_n$$
$$s.t. \; g_i(\mathrm{x}) \le 0, i=1,...,m$$

تابع هدف در کمینه سازی محدب (مقعر دربیشینه‌سازی) و g_iها محدب بوده و شرایط منظم بودن (Regularity)را داشته باشند. آنگاه نقطه $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$ بهینه خواهد بود اگر و فقط اگر در شرایط KKT مندرج در قضیه ۴-۲ صدق کند.

پایان استنتاج ■

در این صورت است که شرط لازم به کافی تبدیل می شود. منظور از شرا یط منظم بودن دراینجا استقلال خطی $\nabla g_i(x^*)$ هاست.

توجه کنید که در نوشتن شروط KKT برای مساله بیشینه سازی یکی از ۲کار زیر را انجام دهید

الف) در $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{i=۱}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})=۰$ علامت قبل از$\sum$منفی نوشته شود و یا اینکه

---

[۱] Corollary

ب) $\overline{u_i} \leq ۰$ منظور شود و علامت قبل از Σ مثبت باقی بماند .

مثال ۴-۷ برای حالتی که تابع یک متغیره و متغیر شرط غیرمنفی بودن را ندارد مطلوبست نقاط KKT مساله یک متغیره غیرخطی زیر:

$$\min f(x) \qquad \text{غیرخطی}$$

$$s.t \quad a \leq x \leq b \quad or \quad \begin{cases} -x \leq -a & u_۱ \\ x \leq b & u_۲ \end{cases}$$

(محدودیت — ضریب)

حل

طبق شرایط KKT اگر $\overline{x}$ بخواهد نقطه بهینه مساله باشد باید اعداد اسکالر $u_۱$, $u_۲$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند

$$\nabla f(\bar{x}) + u_۱ \nabla g_۱(\bar{x}) + u_۲ \nabla g_۲(\bar{x}) = ۰$$

$$u_i [b_i - g_i(\bar{x})] = ۰ \qquad i = ۱,۲$$

$$u_i \geq ۰ \qquad i = ۱,۲$$

محدودیتها

از این دستگاه باید $\overline{x}$ و ضرایب لاگرانژ را بدست آورد.
برای سهولت محدودیت را فعلاً منظور نمی کنیم پس

$$\begin{cases} f'(\overline{x}) + u_۱(-۱) + u_۲ = ۰ & (۱) \\ u_۱(-a + \overline{x}) = ۰ & (۲) \\ u_۲(b - \overline{x}) = ۰ & (۳) \\ u_۱ \geq ۰ & (٤) \\ u_۲ \geq ۰ & (٥) \end{cases}$$

گفته شد به جای $u_i[b_i - g_i(\overline{x})] = ۰$ می توان نوشت که:

اگر $u_i = ۰$ آنگاه $b_i - g_i(\overline{x}) \geq ۰$ و اگر $u_i > ۰$ انگاه $b_i - g_i(\overline{x}) = ۰$.

براین اساس برای حل دستگاه فوق در مورد ضرائب لاگرانژ $u_۱$, $u_۲$ چند حالت در نظر می گیریم

حالت $I) u_۱ = u_۲ = ۰ \quad \to \qquad (۱) \Rightarrow f'(\bar{x}) = ۰ \Rightarrow \bar{x} = ?$

تابع f مشخص نیست لذا $\bar{x}$ مشخص نیست که ببینیم شدنی است و در تمام معادلات دستگاه صدق می کند یاخیر.

حالت $II) u_۱ = ۰, u_۲ > ۰ \to \quad (۳) \Rightarrow b - \bar{x} = ۰ \quad \bar{x} = b$,

$\bar{x} = b$ که شدنی است در صورتی نقطه KKT می باشد که در تمام معادلات دستگاه صدق کند و ضرایب لاگرانژ غیر منفی باشد برای محاسبه ضرایب

$(۱) \Rightarrow u_۲ = -f'(b) \quad or \ f'(b) < ۰$

تابع مشخص نیست . نمی توان ادامه داد.

حالت $III) u_۱ > ۰, u_۲ = ۰ \to \quad (۲) \Rightarrow a - \bar{x} = ۰ \quad \bar{x} = a$,

در صورتی نقطه KKT برابر مقدار شدنی a می باشد که در تمام معادلات دستگاه صدق کند و ضرایب لاگرانژ غیر منفی باشد برای محاسبه ضرایب

$(۱) \Rightarrow f'(a) - u_۱ = ۰ \Rightarrow u_۱ = f'(a)$، یـــا $f'(a) > ۰$

تابع مشخص نیست . و لذا اطمینان از برقراری شرایط نداریم.

حالت $IV) u_۱ > ۰, u_۲ > ۰ \to \quad (۲) \Rightarrow \bar{x} = a \quad , \ (۳) \Rightarrow \bar{x} = b$

چون $a \neq b$ ، این امکان پذیر نیست که همزمان $\bar{x}$ برابر a و b باشد لذا حالت IV نمی تواند رخ دهد .

نتیجه: پس برای مسأله یک متغیره فوق نقطه KKT

اگر $f'(a) > 0$ جواب $\bar{x} = a$ است

اگر $f'(b) < 0$ جواب $\bar{x} = b$ است

در غیراین ۲ صورت جواب $\bar{x}$ از $f'(x) = 0$ بدست می‌آید.

به شرط انکه $\bar{x}$ شدنی هم باشد($\bar{x}$ هر حالت در محدودیت هم صدق کند).

پایان مثال ▲

مثال ۴-۸

الف) مطلوبست یافتن نقاط KKT برای مساله زیر

$$\min f(x) = x^{۲} + ۱$$

$$s.t \quad a \le x \le b \qquad \equiv \begin{cases} g_{۱} : -x + a \le ۰ \\ g_{۲} : x - b \le ۰ \end{cases}$$

در ۳ حالت داده شده در زیر

A) a, bمثبت B) a, bمنفی C) aمنفی b مثبت..

ضریب لاگرانژ هر حالت محاسبه گردد

$$\min f(x) = x^{۲} + ۱$$

$$s.t \quad a \le x \le b \qquad \equiv \begin{cases} g_{۱} : -x + a \le ۰ \\ g_{۲} : x - b \le ۰ \end{cases}$$

ب) مطلوبست نقاط KKT مدل زیر:

$$\min f(x) = x^{۲} + ۱$$

$$s.t$$

$$-۶ \le x \le -۳$$

حل الف: شرط های KKT بشرح زیر است:

$$\nabla f(\bar{x}) + u_{۱}\nabla g_{۱}(\bar{x}) + u_{۲}\nabla g_{۲}(\bar{x}) = ۰$$

$$u_i[b_i - g_i(\bar{x})] = ۰ \qquad i = ۱,۲$$

$$u_i \ge ۰ \qquad i = ۱,۲$$

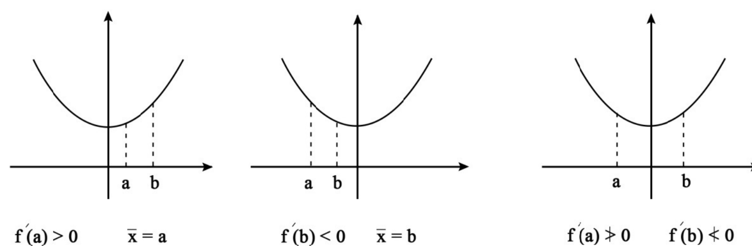
محـــــــــدویتها

$$f(\text{x}) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \begin{cases} 2\bar{\text{x}} + u_{۱}(-۱) + u_{۲} = ۰ & (۱) \\ u_{۱}(-a + \bar{\text{x}}) = ۰ & (۲) \\ u_{۲}(b - \bar{\text{x}}) = ۰ & (۳) \\ u_{۱} \ge ۰ & (٤) \\ u_{۲} \ge ۰ & (٥) \\ -\bar{\text{x}} \le -a & (٦) \\ \bar{\text{x}} \le \text{b} & (٧) \end{cases}$$

با توجه به نتیجه مثال قبل، $\bar{x}$در هر یک از حالات سه گانه، چنین است و در شکل زیر هم نشان داده شده است.

$$\text{A} \quad \bar{x} = a \qquad \text{B} \quad \bar{x} = b \qquad \text{C} \; f'(x) = 0 \Rightarrow 2\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

این نقاط شدنی است (درروابط ۶ و ۷ صدق می‌کند).



$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$

در ادامه نامساوی های ۶و۷ در نظر گرفته نمی شود.

محاسبه ضریب لاگرانژ: برای هر حالت جهت u_2 , u_1 مقادیر غیرمنفی بدست می‌آیدپس نقاط شراط KKT را دارند.

برای حالتA که $\bar{x} = a$:

$$\begin{cases} 2a - u_1 + u_2 = 0 \\ u_1(-a+a) = 0 \\ u_2(b-a) = 0 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2a \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

برای حالتB : $\bar{x} = b$

$$\begin{cases} 2b - u_1 + u_2 = 0 \\ u_1(-a+b) = 0 \\ u_2(b-b) = 0 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -2b \end{cases}$$

برای حالتC:

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ Eq.\,2 \Rightarrow u_1(-a) = 0 \\ Eq.\,3 \Rightarrow u_2(b) = 0 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

حل ب

این قسمت منطبق برحالت B است پس جواب۳-= $\bar{x}$ می باشد. پایان مثال ▲

مثال زیراعمال شروط KKT را برای یک مساله LP که جواب بیکرا ن دارد به تصویر کشانده است

مثال ۴-۹ برای حالت بیشینه سازی (Sivazlian&Stanfel,۱۹۷۵ page ۹۷)

مطلوبست نقاط KKT مسله زیر

$Max\ Z = \frac{x}{۳} + y$

s.t.

$g_۱: x - y \leq ۰$

$g_۲: -x - y \leq -۳$

$g_۳: -x \leq ۰$

$g_۴: -y \leq ۰$

شروط KKT:

$$I)\ \nabla f(x) + \sum_{i=۱}^{۴} u_i \nabla g_i(x) = ۰ \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} \\ ۱ \end{pmatrix} + u_۱ \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} + u_۲ \begin{pmatrix} -۱ \\ -۱ \end{pmatrix} + u_۳ \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + u_۴ \begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \end{pmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\frac{۱}{۳}) + u_۱ - u_۲ - u_۳ = ۰ \\ ۱ - u_۱ - u_۲ - u_۴ = ۰ \end{cases}$$

$II)$

$u_i [b_i - g_i(\mathrm{x})] = ۰ \qquad i = ۱,..,۴ \Rightarrow$

$u_۱(x - y) = ۰$

$u_۲(-x - y + ۳) = ۰$

$-u_۳ x = ۰$

$-u_۴ y = ۰$

III)محدودیت ها:

$x - y \leq ۰$

$-x - y \leq -۳$

$-x \leq ۰$

$-y \leq ۰$

قبلاً گفتیم که یک را ه نوشتن شروط KKTمساله بیشینه سازی اینست که علامت قبل از $\sum$ (در $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=۱}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = ۰$) مثبت باقی بماند و $\bar{u}_i \leq ۰$ پس به موارد فوق محدودیت های $i = ۱,...,۴ \quad u_i \leq ۰$ هم اضافه می شود. برای حل مساله برای مقادیر مجموعه ضرایب $u_i \;\; i = ۱,۲,۳,۴$ چندین حالت می توان تصور نمود. چون هر کدام از u_i ها یا صفر است یا منفی پس $۲^۴ = ۱۶$ حالت متصور است. یکی از این حالات که در آن همگی u_i ها منفی باشند($u_i < ۰ \quad i = ۱,۲,۳,۴$) را در نظر می گیریم.با توجه به این فرض در دستگاه فوق الزاماً

چهار رابطه
$$\begin{cases} u_1(x-y)=0 \\ u_2(-x-y+3)=0 \\ -u_3x=0 \\ -u_4y=0 \end{cases}$$
به
$$\begin{cases} x-y=0 \\ -x-y+3=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$
تبدیل شده و بقیه تغییری نمی کنند؛پس:

$$\bar{u}_i<0 \qquad i=1,\dots,4):$$

$$\begin{cases} (1/3)+u_1-u_2-u_3=0 \\ 1-u_1-u_2-u_4=0 \\ (x-y)=0 \\ (-x-y+3)=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ x-y\le 0 \\ -x-y\le 0 \\ -x\le 0 \\ -y\le 0 \end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد. می ماند ۱۵ مورد دیگر.

مورد $u_1=u_3=0, u_2<0, u_4<0$ را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}-u_2=0\Rightarrow u_2=\frac{1}{3} \\ 1-u_2-u_4=0 \\ -x-y+3=0 \\ y=0 \\ x-y\le 0 \\ -x-y\le -3 \\ -x\le 0 \\ -y\le 0 \end{cases}$$

این دستگاه نیزجواب قابل قبول ندارد زیرا برای u_2 مقدار مثبت بدست آمده که خلاف فرض است.

برای ۱۴ مورد دیگر هم جوابی حاصل نمی شود. خواننده خوبست به طور هندسی تحقیق کند که تابع هدف به طور نامحدود می تواند افزایش یابد و در عین حال محدودیت ها ارضاء شده باقی بماند پایان مثال ▲

۴-۲-۲-۲ توضیح مخفف هایPF،DF،CS–اجزای شروط KKT

مخفف های PF،DF،CS در واقع اجزای شروط کاروش کان تاکرمی باشند که ذیلاً از بازارا و دیگران(۲۰۰۶) ص ۱۹۱یاد آوری می گردد.

توضیح PF[1](شدنی بودن مساله اولیه)

شرط اینکه $\overline{x}$ جواب شدنی برای مساله P

P مساله

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) = f(x_1 \dots x_n) \\ &\quad g_i(\mathbf{x}) \le b_i \qquad i = 1, \dots, m \\ &\quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

باشد شرایط PF (شدنی بودن مساله اولیه) خوانده می‌شود.

توضیح DF[2](شدنی بودن دوآل)

شرط $u_i \ge 0 \;\; i = 1, 2, \dots, m \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\overline{\mathbf{x}}) + \nabla f(\overline{\mathbf{x}}) = 0$ شرط DF (شدنی بودن دوآل) خوانده می‌شود.

توضیح CS[3](کمک مکمل)

شرط $i = 1, \dots, m \;\; u_i[b_i - g_i(\overline{x})]$ شرط CS (کمک مکمل) خوانده می‌شود.

سه شرط PF،DF وCS باهم شروطKKT را تشکیل می‌دهند. توجه کنید که اگر $\nabla g_i(\overline{\mathbf{x}})$ها به ازای $i \in I = \{i : g_i(\overline{x}) = b_i\}$ بطور خطی مستقل باشند، آنگاه با CS و DF

---

[1] Primal Feasibility

[2] Dual Feasibiliy

[3] Complementary Slackness

به طور منحصربفرد ضرائب لاگرانژ برای نقطه $\overline{x}$ تعیین می‌شود که برای مساله با فرم فوق باید غیرمنفی باشند. شایان ذکر است اگر محدودیت ها به صورت $g_i(x) \leq ۰$ نوشته شوند شرایط KKT را به فرم برداری هم می‌توان نوشت:

$$\nabla f(\overline{\mathbf{x}}) + \nabla g(\overline{\mathbf{x}})^t U = ۰$$

$$U^t g(\overline{\mathbf{x}}) = ۰$$

$$U \geq ۰$$

در اینجا

$\nabla g_i(\overline{\mathbf{x}})^t$ یک ماتریس $m \times n$ و ترانهاده گرادیان g_i ها درنقطه $\overline{\mathbf{x}}$ است.

U یک بردار m عنصری است که نشانگر ضرائب لاگرانژ است.

مثال ۴-۱۰ (اقتباس از ص ۶۹۸ وینستون، ۱۹۹۴)

مطلوبست حل مساله زیر:

$$\min f(\mathbf{x}) = x_۱(x_۱ - ۳۰) + x_۲(۲x_۲ - ۵۰) + ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳$$

$$s.t.$$

$$x_۱ + x_۲ \leq x_۳ \quad \text{یا} \quad g_۱(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱ + x_۲ - x_۳ \leq ۰$$

$$x_۳ \leq ۱۷/۲۵ \quad \text{یا} \quad g_۲ = x_۳ - ۱۷/۲۵ \leq ۰$$

حل

ابتدا با Lingo

```
model:
min=x۱*(x۱-۳۰)+x۲*(۲*x۲-۵۰)+۳*x۱+۵*x۲+۱۰*x۳;
x۱+x۲<=x۳;
x۳<=۱۷,۲۵;
@ free( x۱);
@ free( x۲);
end
sub  x۳    ۱۷,۲۵
```

توجه کنید ;x۳<=۱۷,۲۵ و sub x۳ ۱۷,۲۵ یک مطلب را می رسانند.

```
Optimal solution found at step:        ۴
```

Objective value: -۲۲۵,۳۷۵۰

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	۸,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
X۲	۸,۷۵۰۰۰۰	۰,۸۵۷۸۵۲۰E-۰۶
X۳	۱۷,۲۵۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

راه دوم با استفاده از شرایط KKT :

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + u_1 \nabla g_1(\bar{x}) + u_2 \nabla g_2(\bar{x}) = 0 \\ u_1[(b_1 - g_1(\bar{x})] = 0 \\ \\ u_2[(b_2 - g_2(\bar{x})] = 0 \\ u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \end{cases}$$

شرایط KKT برای این مساله:

$$\begin{cases} \overset{\nabla f}{\begin{pmatrix} 2x_1 - 30 + 3 \\ 4x_2 - 50 + 5 \\ 10 \end{pmatrix}} + u_1 \overset{\nabla g1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} + u_2 \overset{\nabla g2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0 \\ u_1(-x_1 - x_2 + x_3) = 0 \\ u_2(17/25 - x_3) = 0 \\ u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 30 + 3 + u_1 = 0 & (1) \\ 4x_2 - 50 + 5 + u_1 = 0 & (2) \\ 10 - u_1 + u_2 = 0 & (3) \\ u_1(-x_1 - x_2 + x_3) = 0 & (4) \\ u_2(17/25 - x_3) = 0 & (5) \\ u_1 \geq 0 & (6) \\ u_2 \geq 0 & (7) \end{cases}$$

اگراز $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m=2} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0 \qquad j = 1,2,3$ برای نوشتن رابطه اول استفاده می‌کردیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_۱} + \sum_{i=۱}^{۲} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_۱}(x) = ۲x_۱ - ۳۰ + ۳ + u_۱(۱) + u_۲(۰) = ۰ & (۱) \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_۲} + \sum_{i=۱}^{۲} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_۲}(x) = ٤x_۲ - ٥۰ + ٥ + u_۱ + u_۲(۰) = ۰ & (۲) \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_۳} + \sum_{i=۱}^{۲} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_۳}(x) = ۱۰ - u_۱ + u_۲ = ۰ & (۳) \\ u_۱(۰ - x_۱ - x_۲ + x_۳) = ۰ & (٤) \\ u_۲(۱۷/۲٥ - x_۳) = ۰ & (٥) \\ u_۱ \geq ۰ \qquad u_۲ \geq ۰ & (٦),(۷) \end{cases}$$

البته اگر از تابع لاگرانژین هم یعنی از

$$L = f(\mathbf{x}) + u_۱ g_۱(\mathbf{x}) + u_۲ g_۲(\mathbf{x}) \rightarrow$$
$$L = x_۱(x_۱ - ۳۰) + x_۲(۲x_۲ - ٥۰) + ۳x_۱ + ٥x_۲ +$$
$$+ ۱۰x_۳ + u_۱(x_۱ + x_۲ - x_۳) + u_۲(x_۳ - ۱۷.۲٥)$$

نسبت به $\mathbf{x} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ گرادیان بگیریم و صفرقرار دهیم:$\nabla_X L = ۰$ باز روابط (۱)، (۲) و(۳) حاصل می شود. زیرا :

$$\nabla_X L = \nabla_X f(x) + u_۱ \nabla_X g_۱ + u_۲ \nabla_X g_۲$$

$$\nabla_X L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_۱} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_۲} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_۱} + u_۱ \dfrac{\partial g_۱}{\partial x_۱} + u_۲ \dfrac{\partial g_۲}{\partial x_۱} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_۲} + u_۱ \dfrac{\partial g_۱}{\partial x_۲} + u_۲ \dfrac{\partial g_۲}{\partial x_۲} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_۳} + u_۱ \dfrac{\partial g_۱}{\partial x_۳} + u_۲ \dfrac{\partial g_۲}{\partial x_۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x_۱ - ۳۰ + ۳ + u_۱ \\ ٤x۲ - ٥۰ + ٥ + u_۱ \\ ۱۰ - u_۱ + u_۲ \end{pmatrix} = ۰$$

در کوشش برای حل دستگاه غیر خطی۷ رابطه‌ای فوق و یافتن x_jها , u_j ها می‌توان ۴ حالت زیررا برای $u_۱, u_۲$ تمیز داده تا ببینیم چه نتیجه حاصل می شود:

I) $u_۱=۰ \quad u_۲=۰ \quad (۳)\Rightarrow ۱۰-۰+۰=0$ امکان پذیر نیست

II) $u_۱=۰ \quad u_۲>۰ \quad (۳)\Rightarrow ۱۰-۰+u_۲=۰\Rightarrow u_۲=-۱۰$ *unacceptable*

III) $u_۱>۰ \quad u_۲=۰$

$$(۳)\Rightarrow ۱۰-u_۱=۰\Rightarrow \qquad u_۱=۱۰$$
$$(۱)\Rightarrow x_۱=۸/۵$$
$$(۲)\Rightarrow x_۲=۸/۷۵$$
$$(٤)\Rightarrow ۱۰(-۸/۵-۸/۷۵+x_۳)=۰\Rightarrow x_۳=۱۷/۲۵$$

جواب $\bar{x}=(۸/۵,\ ۸/۷۵,\ ۱۷/۲۵)$ **است با ضرایب لاگرانژ** $\bar{u}=(u_۱,u_۲)=(۱۰,۰)$؛
جواب در محدودیت ها صدق می‌کند (شدنی است) پس شرایط KKT را ارضاء می‌کند.
مقدار تابع هدف در $\bar{x}$ برابر۲۲۵/۳۷۵ می باشد..

در حالت $IV)\ u_۱>۰ \quad u_۲>۰$ ببینیم به چه نتیجه می رسیم

IV) $u_1>0 \quad u_2>0$

$$u_1>0,\ u_2>0 \quad \begin{cases} 2x_1+u_1-27=0 & (1)\\ 4x_2+u_1-45=0 & (2)\\ -u_1+u_2+10=0 & (3)\\ -x_1-x_2+x_3=0 & (4)\\ 17.25-x_3=0 & (5)\end{cases}$$

۵ معادله پنج مجهول ⇐

$$x_1=8.5 \qquad x_2=8.75 \qquad x_3=17.25$$
$$4(8.75)+u_1-45=0 \Rightarrow \quad u_1=10 \quad u_2=0$$

پایان مثال ▲

مثال ۴-۱۱-(اقتباس از مک کورمیک،۱۹۸۳ ص ۲۱۷)

آیا $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_۱,\bar{x}_۲)=(۱,۱)$ یک جواب بهینه برای

$$\text{Min } f(x_۱,x_۲)=(x_۱-۲)^۲+(x_۲-۱)^۲$$
s.t.
$$g_۱(x_۱,x_۲)=x_۱^۲-x_۲\le ۰$$
$$g_۲(x_۱,x_۲)=x_۱+x_۲\le ۲$$

می تواند باشد یا خیر؟

حل:

نقطه شدنی است؟ بله چون درمحدودیت ها صدق می‌کند، شدنی است.

هر دو نامساوی در نقطه (۱و۱) بصورت تساوی ارضاء می‌شوند پس I={۱،۲}

$$\nabla f(\bar{x})+\sum_{i\in I}u_i\nabla g_i(\bar{x})=0$$

$$\nabla f=\begin{pmatrix}2x_1-4\\2x_2-2\end{pmatrix}\quad \nabla f(\bar{x})=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\quad \nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}2x_1\\-1\end{pmatrix}\quad \nabla g_1(\bar{x})=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ ,\ \nabla g_2(\bar{x})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\begin{cases}-2+2u_1+u_2=0\\-u_1+u_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=\frac{2}{3}\\u_2=\frac{2}{3}\end{cases}$$

چون برای ضریب های لاگرانژ مقادیرغیر منفی بدست آمد پس نقطه $\bar{x}=(1\,1)'$ در شرط های فوق که شرط های لازم بهینگی اند صدق می کند ویک جواب بهینه برای تابع f با توجه به محدودیت ها می تواند باشد.پایان مثال ▲

مثال ۴-۱۲(اقتباس ازهلیه و لیبرمن،۱۹۶۸،ص ۵۷۶)

مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}&Min\ f=-8x_1-10x_2+2x_1^2+x_2^4\\&\text{s.t.}\\&g: 2e^{x_1}+x_1x_2+x_2^2\le 10\\&x_1\ge 0\quad ,\quad x_2\ge 0\end{aligned}$$

برای نوشتن شروط KKT نیاز به گرادیان دو تابع داریم:

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}-8+4x_1\\-10+4x_2^3\end{pmatrix}\qquad H_f(x)=\begin{pmatrix}4&0\\0&12x_2^2\end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x)=\begin{pmatrix}2e^{x_1}+x_2\\x_1+2x_2\end{pmatrix}\qquad H_g(x)=\begin{pmatrix}2e^{x_1}&1\\1&2\end{pmatrix}$$

شروطKKT : برای مساله کمینه سازی چنین است:

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{i\in I}u_i\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$$

$$u_i[g_i(\bar{x})]=0\qquad i=1,\dots,m$$

$$u_i\ge 0\qquad i=1,\dots,m$$

$$g_i\le 0$$

فعلا $x_j \geq ۰$ را در نظر نمی گیریم. مساله یک محدودیت پیدا می کند. و لذا:

$$\begin{pmatrix} -۸ + ٤x_۱ \\ -۱۰ + ٤x_۲^۳ \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} ۲e^{x_۱} + x_۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ \end{pmatrix} = ۰$$

$$u(۲e^{x_۱} + x_۱x_۲ + x_۲^۲ - ۱۰)=۰$$

$$u \geq ۰$$

$$۲e^{x_۱} + x_۱x_۲ + x_۲^۲ \leq ۱۰$$

برای حل دستگاه ۲ حالت جداگانه را برحسب u بررسی می کنیم:

حالت ۱: $u = ۰$

$$u = ۰ \begin{cases} -۸ + ٤x_۱ = ۰ \\ -۱۰ + ٤x_۲^۳ = 0 \\ ۲e^{x_۱} + x_۱x_۲ + x_۲^۲ \leq ۱۰ \end{cases}$$

دستگاه جواب ندارد زیرا گرچه از معادله اول $x_۱ = ۲$ واز از معادله دوم $x_۲ = ۱.۲۵$ بدست می آید اما در رابطه سوم صدق نمی کند.

حالت ۲: $u > ۰$

$$u > ۰ \quad \begin{cases} -۸ + ٤x_۱ + u(۲e^{x_۱} + x_۲) = ۰ \\ -۱۰ + ٤x_۲^۳ + u(x_۱ + ۲x_۲) = ۰ \\ ۲e^{x_۱} + x_۱x_۲ + x_۲^۲ \leq ۱۰ \\ u > ۰ \end{cases}$$

اما این دستگاه ۳ معادله ۳ مجهولی غیرخطی براحتی حل نمی شود.

لذا از شرایط مرتبه اول کاروش کان تاکر همواره راحت نیست نقاطی را که احتمال دارد بهینه باشند بدست آورد؛ اما بالعکس آن یعنی اگر بهینگی یک نقطه را بخواهیم بررسی کنیم راحت است(اقتباس از هلیه و لیبر من، ۱۹۶۸ص ۵۷۸)

جواب مساله فوق با نرم افزار لینگو

$$x_۱^* = ۱.۲۱۹۷۹ \quad x_۲^* = ۱.۲۸۷۱۹۸ \quad f^* = ۱۶.۹۹$$

آیا این جواب شرایط KKT را ارضاء می کند؟

ابتدا ببینیم آیا $x_۱^* = ۱.۲۱۹۷۹ \quad x_۲^* = ۱.۲۸۷۱۹۸$ شدنی می باشد یعنی در $۲e^{x_۱} + x_۱x_۲ + x_۲^۲ \leq ۱۰$ و $x_۲ \geq ۰ \quad , \quad x_۱ \geq ۰$ صدق می کند؟

g=۲*exp(x۱)+x۱*x۲+x۲^۲=۹,۹۹۹۹≤ ۱۰

$$x_۱ = ۱.۲۱۹۷۹ \geq ۰ \quad , \quad x_۲ = ۱.۲۸۷۱۹ \geq ۰$$

پس شدنی می باشد.

برای یافتن ضریب لاگرانژ u با قرار دادن $x_2^* = ۱.۲۸۷۱۹۸$ $x_1^* = ۱.۲۱۹۷۹$ معادله دوم نتیجه می دهد$u = ۰.۳۸۷۲$.که مقداری غیرمنفی و لذا قابل قبول است معادله اول هم پس از قرار دادن مقادیر$x_2^* = ۱.۲۸۷۱۹$ $x_1^* = ۱.۲۱۹۷۹$ همین نتیجه را می دهد$u = ۰.۳۸۷۲$. پس شرایط KKT ارضاء شده است.

توجه: $x_2^* = ۱.۲۸۷۱۹$ $x_1^* = ۱.۲۱۹۷۹$ یک مینیمم مطلق است زیراشرایط قضیه ۴-۴ که بعداًذکرخواهد شد، برقرار است پس یعنی چون برای ضریب لاگرانژ مقدار غیر منفی بدست آمد که در $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ صدق می کند ودر زیر نشان داده شده که تابع هدف و نابع محدودیت این مساله کمینه سازی محدب اند، لذا شرایط قضیه ۴-۴ که بعد از این خواهد آمد حکمفرماست پس x_2^* x_1^* مینیمم مطلق است برای مساله.

اثبات تحدب تابع هدف وتابع محدودیت مثال ۴-۱۲

همانطور که قبلاً در فصل ۱ (بخش ۱-۹-۲)در مبحث بررسی تحدب توابع دو متغیره دیدید تابع۲ متغیره $f(x_1, x_2)$ که پیوسته و مشتقات درجه دوم داشته باشد **محدب** است اگر و فقط اگر بازای تمام مقادیر ممکنِ ۲ متغیر، دترمینان هشیان آن منفی نباشد: $(\det H(x) \geq 0)$و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \geq 0$.هم چنین تابع**۲** متغیره **محدب اکید** خواهد بود اگر $\det H_f(x) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$باشد،. در این مثال تابع هدف(f) محدب است زیرا

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱۲x_2^2 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x) = 48x_2^2 \geq 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 > 0$$

و$H_g(x) = \begin{pmatrix} ۲e^{x_1} & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$: g محدب اکید است زیرا

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} = 2e^{x_1} > 0 \quad \& \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} \times \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 4e^{x_1} - 1 > 0 \quad \forall x_1 \geq 0$$

ازاینرو نقطه $x_2^* = ۱.۲۸۷۱۹$ $x_1^* = ۱.۲۱۹۷۹$ که در شروطKKT صدق می‌کند طبق قضیه ۴-۴ که بعدا می‌آید برای این مساله حتماً بهینه مطلق است. پایان مثال ▲

شرطهای لازم مرتبه اول KKT در سایر حالات

اگر متغیرهای مساله قید نامنفی داشته باشند و یا محدودیت ها هم به صورت تساوی و هم نامساوی باشد شرط های KKT چه می شود؟ در ادامه به این سوال پرداخته شده است.

۴-۲-۳شرطهای لازم بهینگی مرتبه اول KKT برای مسائل NLP با محدودیت نامساوی و x_jهای نا منفی

$$\min Z = f(x_1,\dots x_n)$$
$$s.t \quad g_i(x) \le b_i \qquad i = 1,\dots,m$$
$$-x_j \le 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

در مساله کمینه سازی فوق اگر $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1..\bar{x}_n)$ یک نقطه بهینه باشد باید در محدودیت‌ها صدق کند وضرائب $\bar{u}_i\,,\, i = 1,\dots,m$ $\bar{\lambda}_j\,, i = 1,\dots,n$ وجود داشته باشند که درشرط های زیر صدق کنند(مرجع:ص ۵۷۶ هلیه و لیبر من۱۹۶۸، ص ۶۹۴ وینستون۱۹۹۴):

$$1)\left\{ \Delta f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m} u_i \Delta g_i(\bar{x})-\lambda=0 \longrightarrow \Delta f(\bar{x})+u_1\Delta g_1(\bar{x})+\dots+u_m \Delta g_m(\bar{x})-\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \dots \\ \lambda_n\end{pmatrix}=0 \right.$$

$$2)\bar{u}_i\left[b_i - g_i(\bar{x})\right]=0 \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$3)\lambda_j \bar{x}_j = 0$$

یـــا

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]\bar{x}_j = 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

یـــا

$$[\Delta f(\bar{x})+u_1\Delta g_1(\bar{x})+\dots+u_m\Delta g_m(\bar{x})](\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)=0$$

$$4)\begin{cases}\bar{u}_i \ge 0 & l = 1,\dots,m\\ \bar{\lambda}_i \ge 0 & j = 1,\dots,n\end{cases}$$

۵)قیـــــدها

توجه کنید که

-در رابطه۳ $\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]$ و λ_j معادلند

ـ برای بررسی شرایط فوق محدودیت های مسئله از نوع $\leq$باشند .

- به جای $[b_i - g_i(\bar{x})]$ می‌توان متغیرهای کمبود محدودیت iام را گذاشت.

-به جای $\bar{u}_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0$ می توان نوشت:

-اگر $\bar{u}_i = 0$ انگاه $b_i - g_i(\bar{x}) \geq 0$ و اگر $\bar{u}_i > 0$ انگاه $b_i - g_i(\bar{x}) = 0$.

-با نوشتن شرط اول به صورت $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$، شرط $\bar{\lambda}_j \geq 0$ را می توان حذف نمود.

۴-۲-۴شرطهای لازم KKT در مسائل NLP با محدودیت نامساوی و تساوی

ذیلاً یک قضیه در مورد شرطهای لازم کاروش- کان تاکر برای یک مساله غیر خطی محدودیت دار با محدودیت های اعم از نامساوی و تساوی ذکر می گردد(بازارا و دیگران ،۲۰۰۶ص ۲۰۵، مک کور میک،۱۹۸۳ص۲۱۵):

قضیه ۴-۳

فرض کنیدX یک مجموعه غیرتهی در R^n و $f: R^n \to R$, $g_i: R^n \to R$ برای $i=1,...,m$ و $i=1,...,p$ $h_i: R^n \to R$ باشد.مساله زیر(P) را در نظر بگیرید.

$$P \text{ مساله}$$

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \Omega \subseteq R^n}{\text{minimize}} f(\mathbf{x}) = \\ &s.t. \\ &\quad g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \quad i = 1,\dots,m \\ &\quad h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad\quad j = 1,\dots,p \\ &\mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$را یک جواب شدنی مساله و $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$ بگیرید. فرض کنید که برای g_i,f در نقطه $i \in I$ $\bar{\mathbf{x}}$ مشتق پذیرند و g_i ها $i \notin I$در نقطه $\bar{x}$ پیوسته‌اند. به علاوه فرض کنید $\nabla g_i(\bar{x})$ برای $i \in I$ و $\nabla h_j(\bar{x})$ $j = 1,2,...,p$ بطور خطی مستقل‌اند(یک چنین $\bar{x}$ را گاه منظم یا regular نامند). حال اگر $\bar{\mathbf{x}}$ جواب موضعی

برای مسالهPباشد آنگاه اعداد اسکالر منحصر به فرد $i \in I$ u_i و $\lambda_j ,\ j = 1,2,...p$چنان وجود دارد که رابطه زیر برقرار است:

$$\nabla f\ (\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i (\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \nabla h_j (\bar{x}) = 0.$$
$$u_i \geq 0 \quad i \in I$$

علاوه بر فرض‌های بالا اگر در نقطه $\bar{x}$، g_iها برای $i \notin I$ مشتق پذیر باشند شرایط فوق برای این مساله (موسوم به شرطهای کاروش- کان تاکرKKT)را چنین می‌توان نوشت

$$\nabla f\ (\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i (\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j (\bar{x}) = 0,$$
$$u_i [b_i - g_i (\bar{x})] = 0 \qquad i = 1,...,m$$
$$u_i \geq 0 \qquad i = 1,...,m$$

پایان قضیه■

توجه کنید که

-شرطی روی ضرایب لاگرانژ مربوط به محدودیت های تساوی وجود ندارد.

- اولین شرط روی $\bar{x}$ شدنی بودن آنست یعنی در محدودیت ها باید صدق کند.

-شرایط KKT فوق برای یک مساله NLP در حالتی است که x_jها قید غیر منفی بودن ندارند. تعبیر هندسی شرایط KKT را در مراجعی مانند ص۱۹۲ بازارا(۲۰۰۶) می توان مطالعه کرد.

- صورت دیگر نوشتن $\nabla f\ (\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i (\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j (\bar{x}) = 0$ چنین است(از برت سکاس،۱۹۹۹ ص۳۱۰):

$$\nabla_X L(\bar{x}, u, \lambda) = 0$$

که در آن L تابع لاگرانژین مساله است:

$$L = f\ (\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i (\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j (\mathbf{x}).$$

–مجدداً یاد آور می شود هر نقطه مثل $\bar{x}$ بطوریکه شروط مرتبه اول KKT را ارضاء نمایدازجمله برای آن ضرائب لاگرانژوجود داشته باشد نقطهKKT خوانده می‌شود. در ضمن اگر شرط منظم بودن(regularity)درنقطه $\bar{x}$برقرارنباشد نمی‌توان ازاین قضیه استفاده کرد.

سوال: یک نقطه در شرایط KKT یک مساله صدق می کند آیا این نقطه بهینه مطلق می تواند باشد؟ جواب در قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۴–۴ شرط کلی بودن نقطه مینیمم

(کان تاکر،۱۹۵۱ به نقل ازمک‌کورمیک،۱۹۸۳ص۲۱۶)

فرض کنید توابع f, g_i, h_i در مجموعه $\mathbf{x} \in \Omega \subset R^n$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشند[۱]. Ω یک مجموعه باز محدب و f روی Ω محدب، $g_i, i = ۱,\dots,m$ها روی Ω **مقعر** و h_j ها توابع خطی در Ω باشند اگر در مساله زیر(مک کورمیک،۱۹۸۳ ص۲۰۷)

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \Omega \subseteq R^n}{Min} f(\mathbf{x}) = f(x_۱ \dots x_n) \\ &s.t. \\ &\qquad g_i(\mathbf{x}) \geq ۰ \qquad i = ۱,\dots,m \\ &\qquad h_j(\mathbf{x}) = ۰ \qquad j = ۱,\dots,p \end{aligned}$$

که در آن Ωیک مجموعه باز شامل ناحیه شدنی است؛

$\bar{x}$ یک نقطه شدنی باشد (یعنی در محدودیت ها صدق کند)و

ضرایب $j = ۱,۲,..,p$ λ_j و $\bar{u}_i \geq ۰ \quad i \in I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = ۰, i = ۱,۲,..,m\}$

وجود داشته باشد که $\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=۱}^{p} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) = ۰$ را ارضاء کند، آنگاه نقطه $\bar{x}$ نقطه مینیمم مطلق(کلی) است. پایان قضیه■

---

[۱] Contiuously diffrentiable

توجه کنید که به خاطر علامت نامساوی در $g_i(\mathbf{x})\geq 0$ شرط روی g_i مقعر بودن است ودر رابطه، قبل از $\sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})$ منفی داریم؛ والا اگر $g_i(\mathbf{x})\leq 0$ ، g_i باید محدب می بود[1] ودر رابطه، به جای علامت منفی قبل از $\sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})$ مثبت باید گذاشته می شد.

قضیه ۴-۴-۱[2]

اگر در مساله کمینه (یا بیشینه)سازی زیر تابع f محدب(یا مقعر) و $\underset{i=1}{\overset{m}{g_i(x)}}$ محدب باشند.

$$\begin{aligned} &\min/\max f(x) \\ &s.t \\ &g_i(x)\leq b_i \qquad i=1,2,\dots,m \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

آنگاه شرائط لازم KKTکافی هم خواهند بود.

پایان قضیه■

در برنامه ریزی خطی شروط لازم KKT شروط کافی هم می باشند زیرا توابع شرایط قضیه ۴-۴-۱ را دارند.

مثال۴-۱۳ برای حالتی که در نقطه بهینه شرطهای KKT برقرار نمی باشد.

الف(اقتباس از وینستون ،۱۹۹۴،ص۶۹۹).

به طور ترسیمی بررسی کنید آیا نقطه '(۱,۰) می‌تواند نقطه بهینه برای

---

[1] الگوریتم های حل مسایل نا محدب محدودیت دار در ص ٤٣٧-٤٣٣ (١٩٦٣) Hadley and Within مورد بحث قرار گرفته است(ترساین،١٩٩٤ ص٣٠٩)

[2] (مبتنی برقضیه ۱۱ و '۱۱وینستون،۱۹۹۴ ص ۶۹۵)

$$\min\ Z = f(x) = -x_1$$

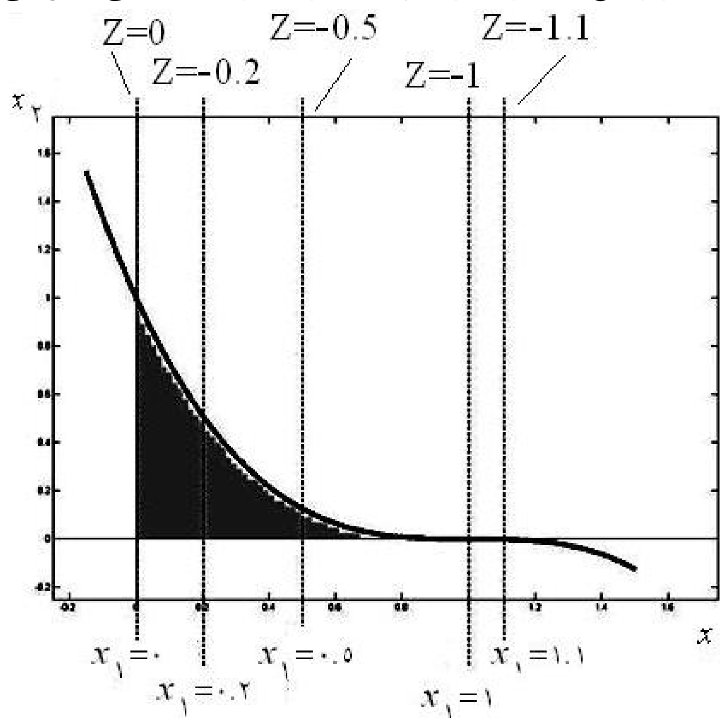
$$\begin{cases} s.t. \\ -(1-x_1)^3 + x_2 \leq 0 \\ \qquad -x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

باشد ؟

ب) اگر جواب مثبت است، آیا شرایط KKT برای آن صدق می کند؟

حل

الف) شکل زیر تابع هدف را به ازای چند مقدار Z در ناحیه شدنی نشان می دهد.



همانطور که شکل فوق نشان می دهد با شروع از z=۰ و کاهش آن تا z= -۱ تابع هدف با ناحیه شدنی در نقطه $\begin{pmatrix} x_1=1 \\ x_2=0 \end{pmatrix}$ تماس دارد واگر z کمتر شود از ناحیه شدنی خارج می شود، پس کمترین مقدارتابع هدف برابر z= -۱ و $\begin{pmatrix} x_1=1 \\ x_2=0 \end{pmatrix}$ بهینه است.

ب) نقطه $\begin{pmatrix} x_1 = ۱ \\ x_2 = ۰ \end{pmatrix}$ شرط شدنی بودن را دارد. ببینیم آیا ضرایب لاگرانژ وجود دارد؟

شرایط KKT را آنطور می نویسیم که در مساله قیود نامنفی را جدای از محدودیت ها در نظر می‌گیرد:

شرایط KKT بر اساس بند ۴-۲-۳:

$$1)\Delta f(\bar{x})+u_1\Delta g_1(\bar{x})-\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}=۰$$

$$۲)\bar{u}_i\left[b_i-g_i(\bar{x})\right]=۰ \qquad i=۱$$

$$۳)\lambda_j\,\bar{x}_j=۰ \qquad j=۱,۲$$

$$٤)\begin{cases}\bar{u}_i\geq ۰ & l=۱\\ \bar{\lambda}_i\geq ۰ & j=۱,۲\end{cases}$$

۵) قیدها

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-۱\\ ۰\end{pmatrix} \qquad \nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}۳(۱-x_1)^۲\\ ۱\end{pmatrix} \qquad \bar{x}=\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\nabla f(\bar{x})=\begin{pmatrix}-۱\\ ۰\end{pmatrix} \qquad \nabla g_1(\bar{x})=\begin{pmatrix}۰\\ ۱\end{pmatrix}$$

با جایگذاری داریم:

$$\begin{cases}۱)\ \begin{pmatrix}-۱\\ ۰\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}۰\\ ۱\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=۰\\ ۲)\ \bar{u}[-(۱-x_1)^۳+x_2]=0\\ ۳)\ \lambda_1(1)=0 \quad , \quad \lambda_2(0)=0\\ ٤)\begin{cases}\bar{u}\geq ۰\\ \bar{\lambda}_i\geq ۰ & j=۱,۲\end{cases}\\ ۵)\ -(۱-x_1)^۳+x_2\leq ۰\end{cases}$$

برقراری رابطه (۱) امکان پذیر نحواهد بود. لذا این دستگاه جواب نداشته وبرای این نقطه ضرایب لاگرانژ بدست نمی آید و شرایط KKT برقرار نیست.

قابل ذکر است که اگر شرط های KKT را مطابق زیر بنویسیم که قیود نامنفی را یک محدودیت به حساب می آورد باز ضریب لاگرانژی وجود نخواهد داشت:

$$\begin{cases}\nabla f(\bar{x})+u_1\nabla g_1(\bar{x})+u_2\nabla g_2(\bar{x})+u_3\nabla g_3(\bar{x})=0\\ u_i g_i(\bar{x})=0\\ u_i\geq 0 \quad i=1,2,3\end{cases}$$

$$\begin{cases}g_1=-(1-x_1)^3+x_2\leq 0\\ g_2=-x_2\leq 0\\ g_3=-x_1\leq 0\end{cases}$$

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\quad \nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}3(1-x_1)^2\\1\end{pmatrix}\quad \nabla g_2(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\quad \nabla g_3(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \nabla f(\bar{x})=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\quad \nabla g_1(\bar{x})=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad \nabla g_2(\bar{x})=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\quad \nabla g_3(\bar{x})=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\bar{x})+u_1\nabla g_1(\bar{x})+u_2\nabla g_2(\bar{x})+u_3\nabla g_3(\bar{x})=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+u_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow u_3=-1$$

چون u_3 منفی بدست آمد پس شرایط KKT صدق نمی کند.

تحقیق کنید که آیا شرط استقلال $\nabla g_i(\bar{x})\ i\in I$ مندرج در قضیه اخیر بازای $\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ برقرار است یا خیر.

حل

$\begin{pmatrix}x_1=1\\x_2=0\end{pmatrix}$ در محدودیت ۱و۲ به صورت تساوی صدق می کتد پس $I=\{1,2\}$

ضرایب لاگرانژ وجود نداردزیرا $\nabla g_i(x)$ در نقطه $\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ به ازای $i\in I=\{1\ ,\ 2\}$ مستقل خطی نیستند یعنی $\nabla g_2(\bar{x})=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ و $\nabla g_1(\bar{x})=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ همخطند. زیرا به ازای هر $c_1=c_2$ ـ $c_1\nabla g_1(\bar{x})+c_2\nabla g_2(\bar{x})=0$ یا چون

ماتریس متشکل از ۲ بردار $\nabla g_۱(\bar{x}),\nabla g_۲(\bar{x})$ یعنی $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$ماتریسی مربع با دتر مینان صفر است پس $\nabla g_۱(\bar{x}),\nabla g_۲(\bar{x})$ها همخط اند و نمی توان شروط KKT را نوشت. لذا گرچه $\bar{x} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ جواب بهینه مساله است اما شرایط استفاده ازقضیه مربوط به شروط لازم نقاط KKT (قضیه ۴-۳) برقرار نیست.

پس اگر شرایط کاروش–کان- تاکر منجر به جواب نشود تمی‌توان نتیجه گرفت که مساله جواب ندارد؛ ممکن است جواب دا شته باشد.

مثال ۴-۱۴ کاربردی از کنترل موجودی (ص ۲۸۸ ترساین,۱۹۹۴)

اگر حداکثر فضای در اختیار از یک انبار $m^۳$ ۲۰۰۰ باشد؛ با استفاده از اطلاعات جدول زیر مطلوبست محاسبه میزان بهینه سفارش در هر بار برای ۵ کالای داده شده. هزینه نگهداری هر واحد پولی کالا در انبار سالانه I=۰/۲۰ واحد پولی می باشد.

(j) شماره کالا	D_j نیاز سال	P_j (قیمت)	f_j فضای لازم برای یک واحد (به متر مکعب)	Coj هزینه هر بار سفارش
۱	٦۰۰	۳	۱	۱۰
۲	۹۰۰	۱۰	۱/۵	۱۰
۳	۲٤۰۰	۵	۰/۵	۱۰
۴	۱۲۰۰۰	۵	۲	۱۰
۵	۱۸۰۰۰	۱	۱	۱۰

حل: مدل مساله چنین است:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=۱}^{۵}\left(\frac{Co_j D_j}{Q_j} + \frac{IP_j Q_j}{۲}\right)$$

s.t.

$$g: \sum f_j Q_j \le ۲۰۰۰$$

$$Q_j \ge ۰$$

ابتدا اگر با صرف نظر از محدودیت به طریق معمول Q_{jw} ها را طبق $Q_{jw}=\sqrt{\frac{۲Co_jD_j}{IP_j}}$ بدست آورده و در محدودیت $\sum f_jQ_j \leq ۲۰۰۰$ قرار دهیم صدق نمی‌کنند.

حل با روش لاگرانژ:

ضریب را با u نشان داده وداریم:

$$L = \sum_{j=۱}^{۵}\left(\frac{Co_jD_j}{Q_j}+\frac{IP_jQ_j}{۲}\right)+u\left(\sum_{j=۱}^{۵} f_jQ_j-۲۰۰۰\right)$$

جهت یافتن جواب با تکنیک ضرایب لاگرانژ، از تابع فوق نسبت به $Q_۱$، ... و $Q_۵$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم. شروط KKT چنین می شود:

$$\begin{cases} \nabla_Q L=۰ \quad \nabla_Q Z+u\nabla_Q g=۰ \;\rightarrow \begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial Q_۱}\\ \cdots\\ \frac{\partial Z}{\partial Q_۵}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial Q_۱}\\ \cdots\\ \frac{\partial g}{\partial Q_۵}\end{pmatrix}=۰, & \text{شرط اول} \\ \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{Co_۱D_۱}{-Q_۱^۲}+\frac{IP_۱}{۲}\\ \cdots\\ \frac{Co_۵D_۵}{-Q_۵^۲}+\frac{IP_۵}{۲}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}f_۱\\ \cdots\\ f_۵\end{pmatrix}=۰ & \text{یا} \\ u\left(۲۰۰۰-\sum f_jQ_j\right)=۰ & \text{شرط دوم} \\ u\geq ۰ & \text{شرط سوم}\end{cases}$$

حل ۵ معادله اول چنین نتیجه می دهد.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_j}=۰\rightarrow \quad Q_j=\sqrt{\frac{۲Co_jD_j}{IP_j+۲uf_j}} \;, Q_۱=\sqrt{\frac{۲(۱۰)(۶۰۰)}{(۰.۲*۳)+۲u*۱}},\cdots,Q_۵=\sqrt{\frac{۲(۱۰)(۱۸۰۰۰)}{(۰.۲*۱)+۲u*۱}}$$

چون $u(۲۰۰۰-\sum f_jQ_j)=۰$ پس با توجه به اینکه $u\geq ۰$،سه حالت ممکن است:

یا "$u=۰$ و $(۲۰۰۰-\sum f_jQ_j)$غیر صفر "

یا "$u>۰$ و $\sum f_jQ_j-۲۰۰۰=۰$"

یا هر دو صفرند .

حالت اول وسوم منتفی است زیرا اگرu صفرباشد $Q_j=\sqrt{\frac{۲Co_jD_j}{IP_j+۲uf_j}}$ ها به Q_{jw} تبدیل می شوند که شدنی نیستند پس الزاماً $u>۰$ و $\sum f_jQ_j-۲۰۰۰=۰$.

دستورات MATLAB برای محاسبه مجهول u :

استفاده از دستور fzero با نقطه شروع ۰/۱ برای یافتن جواب $\sum f_j Q_j - ۲۰۰۰ = ۰$:

```
>> fzero(@(u) ۲۰۰۰-(۱*sqrt (۲*۱۰*۶۰۰)/(.۲*۳+۲*u*۱) + ۱,۵*sqrt(۲*۱۰*۹۰۰)/(.۲*۱۰+۲*u*۱,۵)+ ۰,۵*sqrt(۲*۱۰*۲۴۰۰)/(.۲*۵+۲*u*۰,۵) +۲*sqrt(۲*۱۰*۱۲۰۰۰)/(.۲*۵+۲*u*۲) +۱*sqrt(۲*۱۰*۱۸۰۰۰)/(.۲*۱+۲*u*۱)),۰,۱)
```

معادله $\sum f_j Q_j - ۲۰۰۰$ را حل وجواب u=۰,۱۶۷۴ می دهد و Q_jها از

$$Q_j = \sqrt{\frac{۲Co_jD_j}{IP_j + ۲uf_j}}$$

تقریباً به ترتیب برابر۱۸۷،۱۱۵۲،۲۹۳،۵۳،۱۱۷خواهند شدکه در محدودیت هم صدق می‌کنند و غیر منفی هم می باشند ($Q_j \geq ۰$). پایان مثال ▲

سوال آیا شرایط لازم KKT می‌تواند کافی هم باشد. جواب در زیرداده شده است.

شرایط کافی KKT

در بحث پیش رو شرطهای کافی KKT برای مسایل دارای محدودیت از نوع نامساوی و نیز از نوع همزمان نامساوی و تساوی ذکر می‌گردد.

۴-۲-۵ شرایط کافی KKT برای حالتی که محدودیتها از نوع نامساوی اند

قضیه۴-۵

فرض کنیدتوابع $f : R^n \to R$, $g_i{}_{i=۱}^{m} = R^n \to R$ و X یک مجموعه غیرتهی در R^n باشد و مسالهP را به فرم زیر

مسالهP

$$\min f(\mathbf{x}) = f(x_۱,\dots,x_n)$$

$$\begin{cases} s.t. \\ g_i(\mathbf{x}) \le b_i \qquad i=۱,\dots,m \\ x \in X \end{cases}$$

که درآن X یک مجموعه باز غیر تهی در R^n است.

داده شده باشد اگر $\bar{x}$ یک جواب KKT باشد و $I=\{i \mid g_i(\bar{x})=0\}$، مجموعه S را ناحیه شدنی کاهش یافته‌ای[1] برای مساله P بگیرید که محدودیتهای با ویژگی $g_i(\bar{x})\neq 0$ را شامل نمی شود.

الف) اگر یک ε–همسایگی به شعاع ε در فضای n بعدی حول نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ مثل $N_\varepsilon(\bar{x})$ وجود داشته باشد $(\varepsilon>0)$ آن چنانکه f یک تابع محدب گونه (سودوکنوکس) روی $N_\varepsilon(\bar{x})\cap S$ و $g_i, i\in I$ مشتق پذیر در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ بوده و شبه محدب(کوازیکنوکس) روی $N_\varepsilon(\bar{x})\bigcap S=\{\mathbf{x}\in X : g_i(\mathbf{x})=0 \;\; i\in I\}$ آنگاه نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ یک مینیمم موضعی برای مساله P می‌باشد.

ب) اگر f تابعی محدب گونه(سودوکنوکس) در نقطه $\bar{x}$ و اگر g_i ها برای $i\in I$ مشتق پذیر و شبه محدب(کوازی کنوکس)در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ باشند، نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ **جواب بهین کلی**[2] برای مساله P است.

درحالت خاص اگربرقراری این فرض محدود به همسایگی $N_\varepsilon(\bar{x})$ برای برخی $\varepsilon>0$ باشد نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ یک مینیمم موضعی برای مساله P خواهدبود. پایان قضیه■

یاد اوری: قضیه ۴-۴-۱ که در واقع برگرفته از قضیه فوق است بیان می کرد که اگر در مساله کمینه (بیشینه)سازی، تابع هدف محدب(مقعر)و توابع محدودیتها محدب باشند ، آنگاه شرائط لازم KKT کافی هم خواهند بود.

پس اگر درمساله کمینه سازی، تابع هدف ونیز g_i ها در $g_i(x)\le b$ توابع محدب بوده و شرط منظم بودن را ارضاء کنند آنگاه نقطه $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ حاصل از شروط KKT برای مساله، جواب بهینه است. به بیان دیگر در مساله کمینه سازی minf(x) با محدودیت های $g_i(\mathbf{x})\le b_i$ (بدون وجود محدودیت تساوی)، اگر f محدب و $g_i(\mathbf{x})$ها نیز محدب باشند هر نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ که شرایط لازم بودن KKT جهت بهینگی را دارا باشد بهینه خواهد بود.

توجه :

---

[1] relaxed feasible region

[2] optimal global

-می‌توان نشان داد محدب بودن $g_i(\mathbf{x})(\leq b_i)$ها باعث محدب بودن ناحیه شدنی می‌گردد(وینستون ،۱۹۹۴ص ۶۹۵).

-اگر مساله بیشینه سازی باشد $f(\mathbf{x})$ باید مقعرو($g_i \leq b_i$)ها باید محدب باشند تا $\bar{X}$ جواب حاصل از شرایط KKT،جواب بهینه برای مساله باشد(وینستون ،۱۹۹۴ص ۶۹۵.

-همانطور که قبلاً دیدید شرطهای لازم KKT در حالت وجود قیود غیرمنفی $x_j \geq 0$ وعدم وجود آن کمی با هم فرق دارند. البته می‌توان در صورتی که متغیرهای غیرمنفی داشته باشیم با آنها نظیر یک محدودیت معمولی عمل کرد. واضح است برای این حالت هم می‌توان ابتدا جواب KKT حاصل از شرایطی که متغیرهای آزاد دارد را بدست آورد و اگر جواب، منفی نبود بپذیریم.

۴-۲-۶ شرایط کافی KKT برای حالتی که محدودیت ها تساوی هم دارند

قضیه۴-۶

(ص ۲۰۷ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)

توابع $f: R^n \to R$, $g_{i=1}^{m} = R^n \to R$, $h_{j=1}^{m} = R^n \to R$ وX یک مجموعه غیرتهی در R^n را در نظر بگیرید. مساله P را به فرم زیر

مساله P

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t$$
$$g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, ..., m$$
$$h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i = 1, 2, ..., l$$
$$\mathbf{x} \in X .$$

مدنظر قرار دهید. $\bar{X}$ یک جواب شدنی و $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$، و فرض کنید در این نقطه شرطهای KKT برقرار باشد؛ یعنی مقادیر اسکالر $\bar{v}_j$ ، $j = 1, ..., \ell$ ومقادیر اسکالر $\bar{u}_i \geq 0 \quad i \in I$ وجود دارد به طوری که

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\ell} \bar{v}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

حال مجموعه های J و K را به صورت $K = \{j: \bar{v}_j < ۰\}$,$J = \{j: \bar{v}_j > ۰\}$ تعریف به علاوه فرض می‌کنیم که تابع f در نقطه $\bar{x}$ سودوکانوکس و g_i در نقطه $\bar{x}$ برای $i \in I$ کوازی کانوکس و h_j در نقطه $\bar{x}$ برای $i \in J$ کوازی کانوکس و h_j در نقطه $\bar{x}$ برای $i \in K$ شبه مقعر(کوازی کان کِیو)[1] باشد.

در این صورت $\bar{x}$ یک جواب بهین مطلق برای مسئله P است. درحالت خاص اگر مفروضات تحدب عمومی روی توابع محدودیتها و تابع هدف محدود به همسایگی $N_\varepsilon(\bar{x})$ برای یک $\varepsilon > ۰$ برقرار باشد آنگاه نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ یک مینیمم موضعی برای مساله P خواهد بود پایان قضیه ■

یادآوری می شود که توابع خطی هم محدب محسوب می شوند و هم مقعر. در ضمن شرایط لازم و کافی KKT از مرتبه دوم برای حالتی که مساله محدودیت نامساوی و تساوی دارد را می توانید در ص ۲۱۱ بازارا و همکاران(۲۰۰۶) مطالعه کنید.

۴-۲-۷ شرایط کافی مرتبه دوم KKT

ص ۲۱۳ بازارا و همکاران (۲۰۰۶)

ذیلاً شرایط کافی KKTاز مرتبه دوم را برای حالتی که مساله محدودیت نامساوی دارد ذکر می شود شرایط کافی KKTاز مرتبه دوم را برای حالتی که مساله محدودیت تساوی دارد در ص۲۱۳ بازارا و همکاران(۲۰۰۶) قابل مطالعه است.

قضیه۴-۷

مساله P را مطابق زیر در نظر بگیرید(ص ۲۱۰ بازارا و همکاران ،۲۰۰۶):

$$P: Min\,\{f(x): x \in S\}$$
$$S = \{\boldsymbol{x}: g_i(\boldsymbol{x}) \leq ۰, i = ۱, \ldots, m, \quad h_i(\boldsymbol{x}) = ۰, i = ۱, \ldots, l \;\; \& \boldsymbol{x} \in X\}$$

آنگاه فرض کنید(ص ۲۱۳ بازارا و همکاران،۲۰۰۶) X یک مجموعه غیر تهی و توابع محدودیت ها و هدف ۲بار مشتق پذیرباشند؛ تابع لاگرانژین محدود شده به صورت زیر خواهد بود:

[1] quasiconcave

$$L(x) = \phi(x,u,v) = f(x) + \sum_{i \in I} u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{\ell} v_j h_j(x)$$

در ضمن فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه KKT با ضرایب لاگرانژ $\bar{u}$و $\bar{v}$ مربوط به محدودیتهای غیرتساوی و تساوی برای مساله P باشد، حال ماتریس هشیان تابع لاگرانژین را با H_L یا $\nabla^2 L$ نشان دهید.

الف) اگرماتریس $H_L = \nabla^2 L$ نیمه معین مثبت برای کلیه $x \in S$ باشد $\bar{x}$ یک مینمم مطلق (کلی) برای مساله P خواهد بود در ضمن

اگر برای یک دلتا همسایگی$N_\delta(\bar{x})$حول نقطه $\bar{x}$ با$\delta > 0$، $H_L = \nabla^2 L$ نیمه معین مثبت برای کلیه $x \in S \cap N_\delta(\bar{x})$ باشد $\bar{x}$ یک مینمم موضعی برای مساله P خواهد بود.

ب) اگر ماتریس $H_L(\bar{x}) = \nabla^2 L(\bar{x})$ معین مثبت باشد، $\bar{x}$ یک مینمم موضعی اکید برای مساله P خواهد بود. پایان قضیه از ص۲۱۲ بازارا(۲۰۰۶) ■

یادآوری:$N_\delta(\bar{X})$ = دلتا همسایگی نقطه $\bar{x}$ است که شامل تمام نقاط یک مجموعه است با فاصله $\delta > 0$ از $\bar{x}$.

تمرینات شرطهایKKT

۱- درمساله زیراز شرط لازم مرتبه اول KKTیک نقطه کاندید بهینه بودن را بدست آورید. آیا این نقطه در شرط لازم مرتبه دومKKT هم صدق می کند؟

$$\min f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

جواب: $x^* = (1,1,1)'$ با $\lambda^* = 1$ ازشرط لازم مرتبه اول بدست می آیدودرشرط لازم مرتبه دوم صدق می کند

۲- از یک تکنیک بهینه سازی بی محدودیت برای یافتن یک نقطه KKT جهت مساله زیر استفاده کنید.

$$\min f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$$
$$s.t.\ -2x_1 - 3x_2 + 6 \le 0$$

۳- چه نقاطی در شرط بهینگی مرتبه اول برای مدل زیر صدق می کند؟

$$Min\ 2x_1^2 + x_2 - x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 - 5 = 0$$
$$2x_3 - x_1^2 + 2x_1 = 0$$

راهنمایی: تابع لاگرانژین(L) را نوشته ازآن نسبت به xگرادیان گرفته مساوی صفر قرار دهید و دستگاه شامل $\nabla_X L=0$ و محدودیت ها را حل کنید.

۴- (رائو،۲۰۰۹ ص۱۱۴)یک تولید کننده نوعی یخچال کوچک را با هزینه ۶۰۰ هزار تومان تولید و در محموله های حداقل ۱۰۰تایی به عمده فروش عرضه می کند. اگر عمده فروش۱۰۰ دستگاه بخرد قیمت ۸۰۰ هزار تومان است، اگر بیش از ۱۰۰ دستگاه بخرد هر دستگاهی که مازاد بر ۱۰۰ بخرد از قرار هر دستگاه ۱۰٪ تخفیف می گیرد. تعداد فروش را طوری تعیین کنید که سود سازنده ماکزیمم شود.

۵-نقاط KKT و ضرایب لاگرانژ مربوط به مساله زیر را بدست آورید

$$max\ f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$
$$s.t.$$
$$g_1(x): 2x_1 + x_2 - 5 \le 0$$
$$g_2(x): x_1 + x_3 - 2 \le 0$$
$$g_3(x): -x_1 + 1 \le 0$$
$$g_4(x): -x_2 + 2 \le 0$$
$$g_5(x): -x_3 \le 0$$

جواب:

$$x_1 = 1\ ,\quad x_2 = 2\ ,\quad x_3 = 0$$
$$u_1 = u_2 = u_5 = 0$$
$$u_4 = 4\quad ,\quad u_4 = 4$$

۴-۳ شرطهای فریتز جان(.F.J) [1]برای بهینگی مسائل برنامه ریزی غیرخطی

ذیلاً به شرط های موسوم به شرط های فریترجان (FJ)که در تعیین بهینگی جواب در مسائل غیرخطی کاربرد دارد پرداخته می شود. این شرطها گاه لازمند و گاه کافی ودر آنها از گرادیان استفاده شده است. فریترجان در۱۹۴۸ شرطهای لازم بهینگی برای

[1] Fritz John

مسائل محدودیت دار از نوع نامساوی(بدون محدودیت تساوی) را بیان نموده که در آن از مشتق‌های جزئی مرتبه اول استفاده می‌شود. ولی (برتسکاس ،۱۹۹۹ ص ۳۱۷)شرط منظم بودن(regularity) را لازم ندارد. بدیهی است که نقاط ارضاء کننده شرط های FJ از حل دستگاه شامل این شرط ها و محدودیت ها به دست می آید. شایان ذکر است که شرطهای جان توسط مالگا ساریان و فرومویتر برای مسائل شامل محدودیت تساوی و نامساوی بسط داده شده است.

۴–۳–۱ شرطهای لازم فریتز جان برای بهینگی در مسائل بامحدودیت نامساوی[1]

قضیه۴–۷

فرض کنید توابع $f:R^n \to R$, $g_i = R^n \to R$ و X یک مجموعه باز غیرتهی در R^n وبرای $i=1,...,m$ باشد. حال مساله‌P را در نظر بگیرید.

مساله P

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & s.t \\ & g_i(x) \le 0 \qquad i=1,...,m \\ & x \in X \end{aligned}$$

فرض کنید $\bar{\mathbf{x}}$ یک **جواب شدنی** و $I=\{i \mid g_i(\bar{\mathbf{x}})=0\}$. به‌علاوه فرض کنید که g_i,f برای $i \in I$ در $\bar{x}$ مشتق پذیرند و g_i ها برای $i \notin I$ در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ پیوسته باشند.

اگر $\bar{\mathbf{x}}$ یک مینیمم موضعی مساله‌P باشد آنگاه اعداد اسکالر u_0 و $u_i, i \in I$ وجود دارد که

$$\begin{aligned} & u_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \\ & u_0, u_i \ge 0 \qquad i \in I \\ & (u_0, u_I) \ne (0,0) \end{aligned}$$

که در آن $u_I = \{u_i \mid i \in I\}$.

[1] بازاراو همکاران(۲۰۰۶) ص ۱۸۳ برت سکاس(۱۹۹۹) ص ۳۱۷

$(u_{\cdot},u_I)\neq(\cdot,0)$به این معنی است که $u_{\cdot},u_I$ همزمان صفر نیستند. این محدودیت به صورت $u_{\cdot}^{2}+\sum_{i\in I}u_i^{2}>\varepsilon$ قابل نوشتن است که در آن ε یک عدد بسیار کوچک مثل $\varepsilon=\cdot/\cdot\cdot\cdot\cdot1$ است[1]؛ به عبارت دیگر بردار غیرصفر $u_{\cdot},u_I$ که در شرطهای فوق صدق می کند وجود دارد تا $\bar{x}$ بتواند مینیمم موضعی باشد برای مساله P.

به علاوه اگر g_i ها برای $i\notin I$ در نقطه $\bar{x}$ مشتق پذیر باشند شرطهای فوق را می‌توان به صورت معادل زیر نوشت:

$$u_{\cdot}\nabla f(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{l=1}^{m}u_i\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})=\cdot$$

$$u_i\ g_i(\bar{\mathbf{x}})=\cdot\quad i=1,\dots,m$$

$$u_{\cdot},u_i\geq\cdot\quad i=1,\dots,m$$

$$(u_{\cdot},u_1,u_2,..u_m)\neq(\cdot,0)$$

عناصر $u_{\cdot},u_1,u_2,u_3,...$ همزمان صفرنیستند. پایان قضیه■

پس باید بردار غیر صفر $(u_{\cdot},u_1,u_2,...)\neq0$ را یافت که در شرایط فوق صدق کند(= برقراری شرطهای **FJ**) تا $\bar{x}$ بتواند مینیمم موضعی باشد. در این جا نیز به $u_{\cdot},u_i$ها گاه ضرائب لاگرانژ می‌گویند.

مثال ۴-۱۵:

الف) مطلوبست حل ترسیمی مساله زیر

ب)آیا شرایط FJ در نقطه $\bar{x}=(2\ 1)'$ برقراراست ؟ ج) آیا شرایط KKT در نقطه $\bar{x}=(2,1)'$ برقرار است ؟ د) $\bar{x}=(\cdot,\cdot)'$ شرایط FJ را دارد؟

$$\min Z=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

$$s.t$$

$$x_1^2+x_2^2\leq5$$

$$x_1+2x_2\leq4$$

$$-x_1\leq\cdot$$

$$-x_2\leq\cdot$$

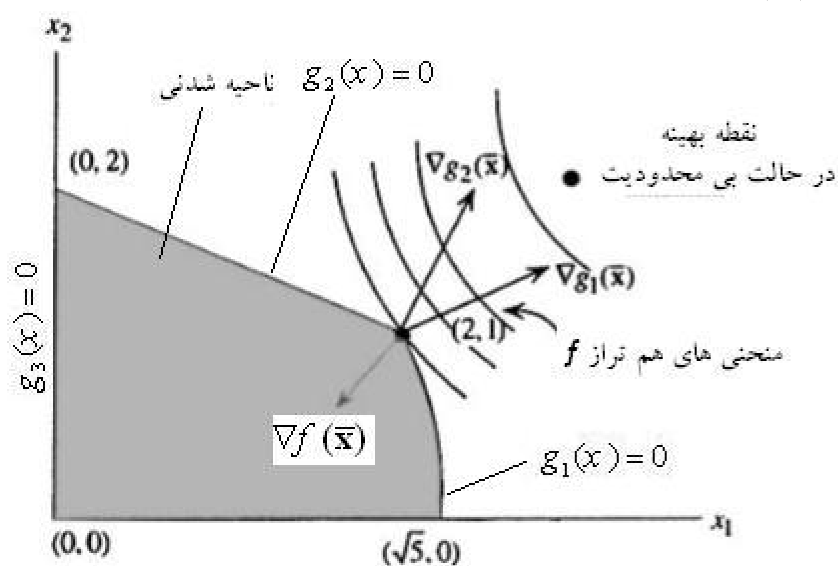
[1] برا ساس پیشنهاد آقای دکتر امین زاده برنده مدال طلای المپیاد ریاضی : $u_{\cdot}^{2}+\sum_{i\in I}u_i^{2}>\cdot$

حل الف)

با قرار دادن

$$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 5 \qquad g_2 = x_1 + 2x_2 - 4$$
$$g_3 = -x_1 \qquad g_4 = -x_2$$

حل ترسیمی در شکل زیر انجام شده است(شکل ص۱۸۴ بازاراو همکاران،۲۰۰۶)و جواب $\bar{x} = (2,1)'$ با $Z^* = 2$ است.



حل ب)

$\bar{x} = (2,1)'$ در محدودیت ها صدق می کند پس شدنی است و توجه کنید که تنها به ازای $g_i(\bar{x}) = 0 \,, I = \{1,2\}$ لذا ضرائب لاگرانژ متناظر با g_4, g_3 صفرند.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 6 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1(\mathbf{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \nabla g_2(\mathbf{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

باید یک بردار غیرصفر (u, u_1, u_2) را چنان بیابیم که

$$u_{\cdot}\nabla f\ (\bar{x})+\sum_{i\in I}u_i\nabla g_i\ (\bar{x})=\cdot\Rightarrow u_{\cdot}\begin{pmatrix}-۲\\-۲\end{pmatrix}+u_۱\begin{pmatrix}٤\\۲\end{pmatrix}+u_۲\begin{pmatrix}۱\\۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$$

دستگاه شامل ۲معادله خطی ۳ مجهولی است و مقادیر $u_۱,u_۲$ برحسب $u_{\cdot}$ چنین است:

$$u_۱=\frac{u_{\cdot}}{۳}\qquad u_۲=\frac{۲}{۳}u_{\cdot}$$

برای هر مقدار مثبت برای $u_{\cdot}$ شرایط FT ارضاء می‌شود.

ج)بررسی شرایطKKT برای نقطه $\bar{x}=(۲,۱)'$:

۱) شدنی است

۲) آیا $\nabla g_۲(\bar{\mathbf{x}})=\begin{pmatrix}۱\\۲\end{pmatrix}$ $\quad\nabla g_۱(\bar{\mathbf{x}})=\begin{pmatrix}٤\\۲\end{pmatrix}$ مستقلند؟

بله زیرا دتر مینان $\begin{pmatrix}٤&۱\\۲&۲\end{pmatrix}$ غیر صفر است

آیا دستگاه

$$\nabla f\ (\bar{\mathbf{x}})+\sum_{l=۱}^{m}u_i\nabla g_i\ (\bar{\mathbf{x}})=\cdot$$
$$u_۱(x_۱^۲+x_۲^۲-٥)=\cdot$$
$$u_۲(x_۱+۲x_۲-٤)=\cdot$$
$$u_۱,u_۲\geq\cdot$$

جواب دارد؟

بله به ازای $\bar{x}=(۲,۱)'$ دستگاه $u_۱=\frac{۱}{۳}>\cdot$ و $u_۲=\frac{۲}{۳}>\cdot$ را نتیجه می دهد.

پس شرایطKKT برای این نقطه برقرار است به عبارت دیگر $\bar{x}=\begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix}$ یک نقطه KKT است.

د) اگر نقطه $\bar{x}=(\cdot\ \cdot)^t$ را بررسی کنیم نتیجه می‌گیریم یک نقطهFJ نیست (بازاراو همکاران ،۲۰۰۶ص ۱۸۵)

مثال ۴-۱۶: آیا در مساله زیر نقطه $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ حایز شرایط FJ است؟

$$Min \quad (2x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2$$
$$s.t. x_1^2 + x_2^2 \le 13$$
$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 4 \qquad -x_1 \le 0 \qquad -x_2 \le 0$$

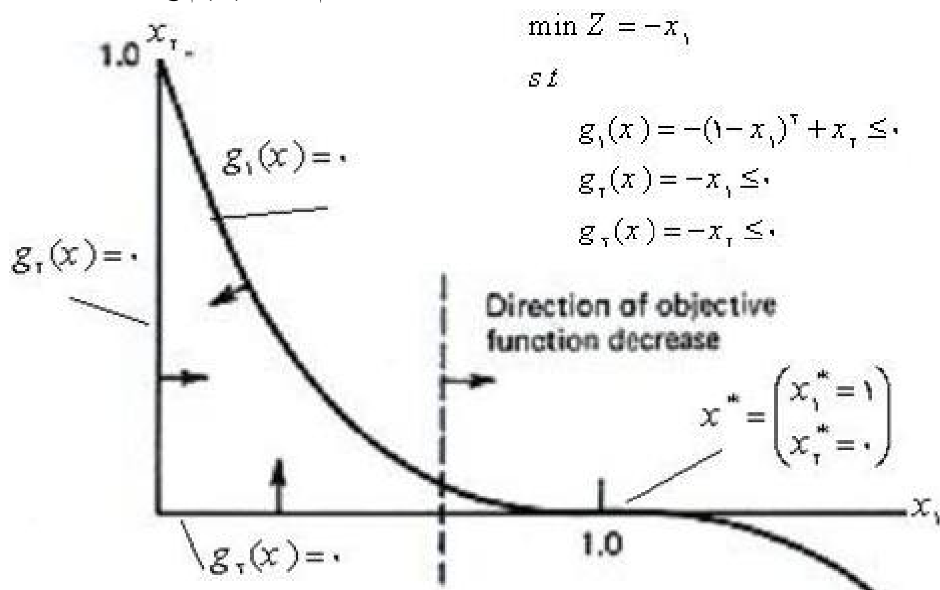
حل

ابتدا شدنی بودن بررسی می‌شود: در رابطه اول صدق نمی کند. بررسی دیگر شرایط لازم نیست. نقطه حایز شرایط FJ نیست. پایان مثال ▲

مثال ۴-۱۷: مک کورمیک (۱۹۸۳)ص ۲۱۳

مطلوبسنت حل ترسیمی مساله زیر -

$$\min Z = -x_{۱}$$
$$s.t$$
$$g_{۱}(x) = -(۱-x_{۱})^{۳} + x_{۲} \le ۰$$
$$g_{۲}(x) = -x_{۱} \le ۰$$
$$g_{۳}(x) = -x_{۲} \le ۰$$



با توجه به شکل در می‌یابیم که مینیمم Z در نقطه $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* = ۱ \\ x_2^* = ۰ \end{pmatrix}$ اتفاق می‌افتد.

$$FJ\ \ conditions$$

$$u_0 \nabla f\ (x^*) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i\,(x^*) = ۰$$

$$u_0, u_i \geq ۰ \qquad i \in I$$

$$(u_0, u_I) \neq (۰, 0)$$

نقطه x^* شدنی است. چون مقادیر توابع g_1, g_3 در نقطه x^* صفر می‌باشد پس I={۱،۳}

$$\nabla f\ (x^*) = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} ۳(۱-x_1)^۲ \\ ۱ \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x^*) = \begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

قضیه شرطهای **فریتز جان** بیان می‌کند اعداد اسکالر u_0, u_1, u_3 که همگی صفر نیستند باید وجود داشته باشد که

$$u_0 \nabla f\ (x^*) + u_1 \nabla g_1(x^*) + u_3 \nabla g_3(x^*) = ۰$$

یعنی

$$u_0 \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} ۰ \\ +۱ \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_0 = ۰ \\ u_1 = u_3 \end{cases}$$

پس ضرایب طوری می‌باشند که $(u_0, u_1 = u_3)$, $u_1 = ۰$ همزمان نباید صفر باشد. بازای کلیه مقادیری که برای u_1, u_3 در رابطه

$u_{\cdot} = \cdot$
$u_{۱} = u_{۳}$
$u_{\cdot}, u_i \geq \cdot \qquad i \in I$
$(u_{\cdot}, u_I) \neq (\cdot, 0)$

برقرار باشد شروط لازم فریتز جان در نقطه $x^* = \begin{pmatrix} ۱ \\ \cdot \end{pmatrix}$ ارضاء می‌شود ؛ به بیان دیگر

مشاهده می‌کنیم وجود دارد $u_{\cdot} = \cdot, u_1 = u_3 = \alpha > \cdot$ که به ازای آنها شروط لازم فریتز جان در نقطه $x^* = \begin{pmatrix} ۱ \\ \cdot \end{pmatrix}$ ارضاء می‌شود.از لحاظ جبری شرط فوق شرط لازم است یعنی $x^* = \begin{pmatrix} ۱ \\ \cdot \end{pmatrix}$ "ممکن" است مینیمم باشد. پایان مثال ▲

توجه:

با مقایسه این مثال و مثال ۴-۱۳ دریافته می شود که جواب بهینه مساله ممکن است که در شرایط KKT صدق نکند ولی شرایط FJ را ارضاء کند.

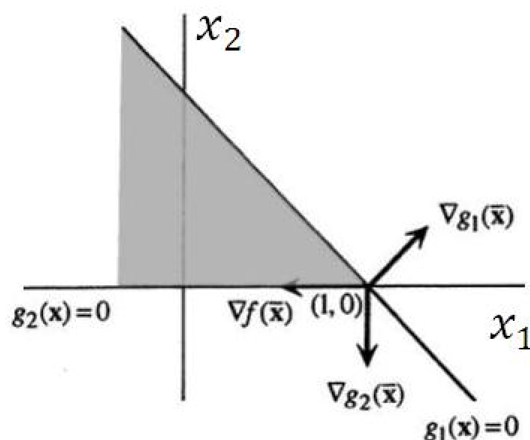
مثال ۴-۱۸: (۴,۲,۱۱ص۱۸۶بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

مطلوبست حل ترسیمی مدل زیر و درضمن یافتن نقطه ای به طریق جبری که در شرایطFJ صدق می کند.

$Min -x_۱$
s.t.
$g۱: \ x_۱ + x_۲ - ۱ \leq \cdot$
$g۲: \ -x_۲ \leq \cdot$

حل ترسیمی در شکل زیر دیده می شود

جواب: $Z^* = -۱, x_۲^* = \cdot, x_۱^* = ۱$



برای یافتن نقطه ای شدنی که در شرایط FJ صدق کند چنین می گوییم:

چون تمام g_i ها مشتق پذیرند پس شرایط فریتزجان طبق روابط آخر قضیه ۷-۴ چنین می تواند نوشته شود.

$$\begin{aligned}
&FJ\ \ conditions\\
&u_۰\nabla f\ (\overline{\mathbf{x}})+\sum_{i=۱}^{۲} u_i\nabla g\,(\overline{\mathbf{x}})=۰\\
&u_i\ \ g_i\,(\overline{\mathbf{x}})=۰ \quad\ i\ =۱,۲\\
&u_۰,u_۱,u_۲\geq ۰\\
&(u_۰,u_۱,u_۲)\neq(۰,0)\\
&Constra\,\mathrm{int}\,s
\end{aligned}$$

شرط اول FJ

$$u_۰\nabla f\ (x^*)+\sum u_i\nabla g_i\,(x^*)=۰\Rightarrow u_۰\begin{pmatrix}-۱\\ ۰\end{pmatrix}+u_۱\begin{pmatrix}۱\\ ۱\end{pmatrix}+u_۲\begin{pmatrix}۰\\ -۱\end{pmatrix}=۰$$

این نتیجه را می دهد که باید $u_۰=u_۱=u_۲$.

شرط دوم FJ

$$u_i\ \ g_i\,(\overline{\mathbf{x}})=۰\Rightarrow\begin{cases}u_۱(x_۱+x_۲-۱)=۰\\ u_۲(-x_۲)=۰\end{cases}$$

پس دستگاه معادلات شامل شرطهایFJ چنین می شود:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 & (1) \\ u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (2) \\ u_2(-x_2) = 0 & (3) \\ x_1 + x_2 - 1 \le 0 & (4) \\ x_2 \ge 0 & (5) \\ u_0, u_1, u_2 \ge 0 & (6) \\ (u_0, u_1, u_2) \neq (0, 0) & (7) \end{cases}$$

برای حل دستگاه دستگاه چند حالت را در نظر می گیریم:

تحقیق کنید حالت $u_1 = 0, u_2 > 0$ و حالت و $u_1 > 0, u_2 = 0$ غیر ممکن اند. ; $u_1 = 0$ و $u_2 = 0$, نیز قابل قبول نیست. می ماند $u_1 > 0, u_2 > 0$:

از روابطه ۱ و ۶ نتیجه می شود باید $u_0 = u_1 = u_2 > 0$ آنگاه از روابط دوم و سوم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

نتیجه می شود

$$x_2 = 0, x_1 = 1 \quad \text{و} \quad u_0 = u_1 = u_2 = \alpha > 0$$

پس $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ یک نقطه شدنی است که شرایط FJ را ارضاء می کند لذا می تواند مینیمم مساله باشد

حل دستگاه فوق بالینگو:

```
u۰=u۱;
u۱=u۲;
u۱*(x۱+x۲-۱)=۰;
u۲*(-x۲)=۰;
x۱+x۲-۱<=۰;
x۲>=۰;
u۰>=۰;u۱>=۰;
u۰^۲+u۱^۲+u۲^۲>۰          معادل رابطه۷
end
```

```
@free  x۱
```

جواب:

Variable	Value
U۰	۰,۲۴۳۷۵۰۰
U۱	۰,۲۴۳۷۵۰۰
U۲	۰,۲۴۳۷۵۰۰
X۱	۱,۰۰۰۰۰۰
X۲	۰,۰۰۰۰۰۰

پایان مثال ▲

بسط شرطهای فریتز جان(FJ)

شروط فریتز جان را مالگان ساریان و فرو موتیز برای مسائل شامل محدودیت مساوی و نامساوی بسط دادند که در ذیل می آید.

۴-۳-۲ شرایط لازم فریتز جان برای بهینگی مسایل با محدودیت تساوی و نامساوی

قضیه ۴-۸[۱]

فرض کنید مجموعه X یک مجموعه باز غیرتهی در R^n و $f:R^n \to R$ و $g_i = R^n \to R \;\; i=۱,....,m$ و $h_j : R^n \to R \;\;\; j=۱,....,\ell$

حال مساله P را در زیردر نظر بگیرید.

Prolem P

$$\min f(x)$$
$$s.t$$
$$g_i(x) \le ۰ \qquad i=۱,...,m$$
$$h_j(x) = ۰ \qquad j=۱,....,\ell$$
$$x \in X$$

[۱] بازارا و دیگران(۲۰۰۶)ص۱۹۹، مک کور میک(۱۹۸۳) ص ۲۱۳، آوریل (۱۹۷۶)ص ۳۴ آوریل (۲۰۰۳) ص ۶۷

فرض کنید $\bar{\mathbf{x}}$ یک جواب شدنی و $I=\{i \mid g_i(\bar{\mathbf{x}})=0\}$. به‌علاوه فرض کنید g_i برای هر $i \in I$ در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ پیوسته و نیز g_i,f برای $i \in I$ در $\bar{x}$ مشتق پذیرند و h_j ها برای $j=1,2,..,\ell$ در نقطه $\bar{\mathbf{x}}$ به طور پیوسته مشتق پذیر[1] باشند. اگر $\bar{\mathbf{x}}$ یک مینیمم موضعی مساله P باشد آنگاه اعداد u_0 و $u_i, i \in I$ و $j=1,....,\ell$ v_j وجود دارد که

$$u_0\nabla f(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{i \in I}u_i\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{j=1}^{\ell}v_j\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})=0$$
$$u_0,u_i \geq 0 \qquad i \in I$$
$$(u_0,u_I,\mathbf{v}) \neq (0,0,0)$$

که در آن $\mathbf{v}=\{v_1,..,v_\ell\}$ $u_I=\{u_i \mid i \in I\}$.

$(u_0,u_I,\mathbf{v}) \neq (0,0,0)$ به این معنی است که $u_0,u_I,\mathbf{v}$ همزمان صفر نیستند

به علاوه اگر g_i ها برای $i \notin I$ در نقطه $\bar{x}$ [لذا اگر همه gi ها] مشتق پذیر باشندشروط فوق را می‌توان به صورت معادل زیر نوشت:

$$u_0\nabla f(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{i=1}^{m}u_i\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{j=1}^{\ell}v_j\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})=0$$
$$u_i \; g_i(\bar{\mathbf{x}})=0 \qquad i=1,...,m$$
$$u_0,u_i \geq 0 \qquad i=1,...,m$$
$$(u_0,\mathbf{u},\mathbf{v}) \neq (0,0,0)$$

که در آن $\mathbf{v}=(v_1,..,v_\ell)^t$,$\mathbf{u}=(u_1,..,u_m)^t$؛ پایان قضیه ■

$(u_0,\mathbf{u},\mathbf{v}) \neq (0,0,0)$ یعنی این اسکالرها همزمان صفرنیستند. معادل آن محدودیت $u_0^2+u_1^2+...+u_m^2+v_1^2+...+v_\ell^2>0$ است که این شرط را ارضاء می کند.

توجه کنید u_0 وعناصر بردار $\mathbf{u}$ باید غیر منفی باشد ولی عناصر بردار $\mathbf{v}$ می‌توانند مثبت، صفر یا منفی باشند.علایم قضیه فوق در کتابها یکسان نیست گاه به صورت زیر هم دیده می‌شود. مساله P را درزیر نظر بگیرید

[1] continuously differentiable

Problem P

$$\min_{x \in \Omega \subseteq R^n} f(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, \ell$$

فرض کنید توابع g_i, f هاو h_iها بطور پیوسته مشتق پذیر(مک‌کورمیک،۱۹۸۳ ص ۲۱۳) در مجموعه باز Ω (ناحیه شدنی) باشند اگر $\bar{x}$ مینیمم موضعی مساله P باشد و $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$انگاه مقادیر اسکالر u_0, $\{u_i, i \in I\}$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$که همه با هم صفر نیستند وجود داردکه

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

$$u_0, \ u_i \geq 0 \quad i \in I$$

$$(u_0, u_i \in I) \neq 0$$

$(u_0, u_i \in I) \neq 0$= بردار غیرصفر= عناصربا هم صفر نیستند.

علاوه بر فرض‌های بالا اگر در نقطه $\bar{x}$ ، g_i برای $i \notin I$ نیزمشتق پذیر باشد شرایط FT برای این مساله چنین خواهد بود

$$u_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{\ell} v_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

$$u_i \ g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_0, u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$(u_0, \boldsymbol{u}, \lambda) \neq (0, 0, 0)$$

توجه کنید:

- شروط فوق برای مسائل کمینه‌سازی محدودیت‌دار که در آن محدودیت از نوع ≥ 0 نداریم داده شده است. حالات خاص تر این قضیه درمراجعی نظیر بازارا و همکاران (۲۰۰۶) ص۱۸۳ آمده است.

- شروط FJ برای مسایل برنامه ریزی خطی(LP) شرایط کافی نیستند در حالی که شرایط KKT برای مسایل LP هم لازم و هم کافی اند (بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص۱۸۹)

۴-۴روشهاو الگوریتم های حل مسایل چند متغیره غیر خطی محدودیت دار

با جستجو در ادبیات بهینه سازی هیچ دسته بندی استانداردی از الگوریتم ها و روشهای حل مسایل غیر خطی بافرم کلی مساله P مندرج در قضیه ۴-۸ دیده نشد. کتاب نوسدال و رایت[۱] (۲۰۰۶) در ص۴۲۲ بر همین نظر صحه می‌گذارد، اماذیلاً آنچه در ادبیات موضوع، قابل توجه یافت شد ذکر می شود.

در یک تقسیم بندی کلی الگوریتم ها وروشهای های مورد استفاده در حل مسایل غیر خطی محدودیت داررا می توان به روشهای جستجوی مستقیم و روشهای گرادیانی تقسیم نمود (مجموعه مقالات کارگاه انستیتو آمار هندوستان ژانویه-۲۰۱۵[۲]).

روشهای جستجوی مستقیم

روشهای جستجوی مستقیم از مشتق بهره نمی گیرند وکم‌کم در جهت همگراشدن به جواب گام برمی‌دارند و در مقابلِ اختلال موجود در توابع و محدودیت توانایی بیشتری دارند. خیلی از این الگوریتم ها تابع هدف و محدودیت ها را ادغام می کنند و در ضمن فقط بهینه موضعی را می یابند. نمونه اینها الگوریتمهای هیوریستیک زیرند:

الگوریتم ژنتیک　　　انیلینگ شبیه سازی شده[۳]

تکامل تفاضلی[۴]　　　روش بهینه سازی ازدحام یا توده ذرات[۵]

به این الگوریتم ها در این درس پرداخته نمی شود و گاه در درسی بنام رایانش نرم توضیح داده می شوند.

روشهای‌گرادیانی

روشهای گرادیانی از مشتقات تابع (گردایان و هشیان) استفاده می کنند. نمونه این الگوریتمها رویکردهای برنامه ریزی درجه دوم متوالی یادنباله ای(SQP[۶])، ،روش

---

[۱] Nocedal, Wright

[۲] from https://www.isid.ac.in/~waomc۱۵/absvw.pdf

[۳] Simulated Annealing

[۴] Differential Evolution

[۵] Particle Swarm Optimization

[۶] Sequential or Succesive Quadratic Programming

لاگرانژی فزوده[1] وروش نقطه درونی[2](برای غیر خطی ها) است. الگوریتمهای موسوم به امتداد شدنی را می توان جزو روشهای گرادیانی دانست.

در یک گروه بندی دیگر کتاب نوسدال و رایت (۲۰۰۶) در فصل ۱۵ رویکردهای حل مسایل غیر خطی محدودیت دار را چنین فصل بندی نموده اند:

الف)الگوریتم های حل مدل های غیرخطی کوادراتیک نظیر روشهای مجموعه فعال[3]، نقطه درونی و تصویر گرادیان [4].

کتاب مذکور علت دسته بندی مسایل کوادراتیک را به صورت جداگانه اهمیت آنها اعلام نموده است.

ب) روشهای لاگرانژی فزوده و جریمه[5] یا SUMT

این روشها با ادغام تابع هدف و محدودیت های تساوی و نامساوی به حل دنباله ای از مسایل بی محدودیت می پردازد. به عنوان مثال اگر فقط محدودیت ها به صورت تساوی باشند بهینه کردن تابع زیر مد نظر قرار می گیرد.

$$f(x) + \frac{\mu}{۲}\sum_{i} h_i (x)$$

که درآن $\mu > ۰$ پارامتر با عنوان جریمه است.

در این گروه تابع بی محدودیت حاصل از ادغام برای یک سری مقدار μ کمینه می شود تا جواب مساله محدودیت دار با دقت کافی بدست آید.

شایان ذکراست درادبیات موضوع SUMT مخفف" تکنیک های کمینه سازی بدون محدودیت ترتیبی[6] بوده و همانطور که گفته شد مسایل را به یک سری مسایل بی محدودیت تبدیل می‌کند (راردین،۱۹۹۸ ص ۸۲۷). این تکنیکها نوعی از روش های جریمه ای و مانعی[7] می باشد که دربخش۴-۶ آمده است.

ج) روش های برنامه ریزی درجه دوم متوالی یا دنباله ای(*SQP*)

---

[1] augmented Lagrangian

[2] Interior point mehods

[3] Active Set

[4] gradient projection method

[5] penalty and augmented Lagrangian methods

[6] Sequential Uncostrained Minimization Techniques(SUMT)

[7] Penalty &Barrier Methods

روش های برنامه ریزی درجه دوم دنباله ای یکی از موفق ترین روشها برای حل مسایل غیر خطی محدودیت دار بزرگ است.[۱]

د) روشهای نقطه درونی

این روشها بسط روشهای اولیه- ثانویه نقطه درونی[۲] مورد استفاده در برنامه ریزی ریزی خطی است.

در پایان این بخش مرجع چند روش حل مسایل محدودیت‌دار برنامه ریزی غیرخطی ذکر می شود:

عنوان	مرجع
الگوریتم های جریمه ای و مانعی[۳]	بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص ۴۷۰
الگوریتم گرادیان تحویل یافته[۴] (توسعه سیمپلکس به برنامه ریزی غیر خطی با محدودیت های خطی)	آوریل(۱۹۷۶) ص۴۶۹، راردین(۱۹۹۸) ص۸۳۷
روش های قوس طبیعی[۵]	مک کور میک(۱۹۸۳) ص۳۰۹
الگوریتم های حذف متغیرها[۶]	

ذیلاً نوع خاص روشهای گرادیانی موسوم به الگوریتم حرکت در امتدادشدنی برای حل یک مساله برنامه ریزی غیر خطی شامل تابع هدف غیرخطی با محدودیت های خطی توضیح داده خواهد شد.

[۱] این متد ها در مراجعی مثل جزوه غیرخطی دانشگاه تهران، برتسکاس(۱۹۹۹) ص ۴۲۱ بازارا وهمکارا ن (۲۰۰۶)ص ۵۷۶ آمده است

[۲] primal-dual interior-point

[۳] Penalty/ Barrier function Methods

[۴] Reduced Gradient Algorithms

[۵] Natural Arc Methods

[۶] Variable Elimination Algorithms

۴-۱-۴ الگوریتم های حرکت در امتداد شدنی[1] برای حل مساله برنامه ریزی غیر خطی محدودیت دار

قبلا برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی بی محدودیت از روش بیشترین کاهش (SD) که یک نوع روش گرادیانی است صحبت به میان آمد. از جمله روشهایی که برای حل مسایل غیر خطی چند متغیره با محدودیت بکار می‌رود الگوریتم های موسوم به حرکت در امتداد شدنی(جهات موجه) است که تعمیم یافته روشSD اند (وینستون،۱۹۹۴ ص ۷۱۶). محدودیت ها در برخی از این الگوریتم ها باید خطی و دربرخی می تواند خطی یا غیر خطی باشد.

از جمله روشهای حرکت در امتداد شدنی عبارتست از

روش فرانک ولف[2]

روش زوتندیک[3]

روش روسن[4] (بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ص ۵۸۹)

روش زنگویل[5] ص ۶۱۳ بازاراو همکاران(۲۰۰۶) برای تابع محدب در حضور محدودیتهای خطی

روش تاپیکز و وِینوت[6] (بازارا و همکاران،۲۰۰۶ ص ۵۶۱)

در اینجا الگوریتم فرانک ولف و نیز روش زوتندیک تشریح می‌شود ولی قبل ازآن با مفهوم امتداد شدنی آشنا می شوید.

۴-۴-۱-۱ تعریف امتداد شدنی

(اقتباس از برت سکاس،۱۹۹۹ ص ۲۱۰)

---

[1] Feasible Direction

[2] Frank & Wolfe

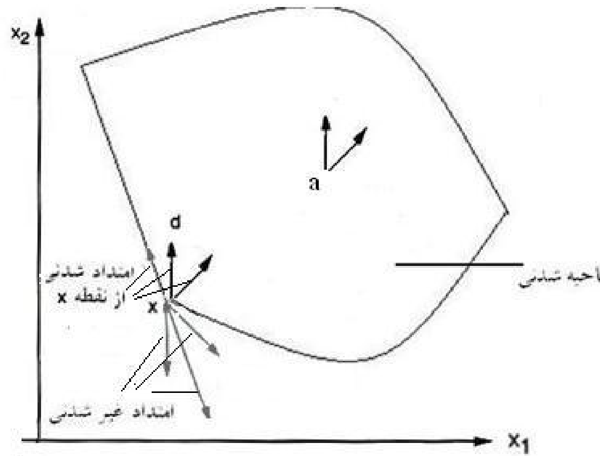
[3] Zoutendijk

[4] Rosen 's gradient projection Method

[5] Convex Simplex Method o f Zangwil

[6] Topiks&Veinott

یک امتداد شدنی در نقطه شدنی $\mathbf{x}_k$، برداری مثل $d \neq ۰$ می‌باشد که نقطه $\mathbf{x}_{k+۱} = \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}$ (برای تمام $\lambda > ۰$ باندازه کافی کوچک) شدنی باشد؛ به عبارت دیگر یک مقدار $\lambda > ۰$ باندازه کافی کوچک بتواند گرفته شود که با حرکت در جهت $d \neq ۰$ از $\mathbf{x}_k$، هیچ محدودیتی نقض نشود ؛ به عبارت دیگرفوراً ناحیه شدنی ترک نشود. شکل۴-۱ امتدادهای شدنی از ۲نقطه را برای یک مساله ۲ متغیره نشان می دهد. امتدادهای شدنی رسم شده از نقطه ای در مرز ناحیه شدنی یعنی به ازای آن نقطه، حداقل یک محدودیت تساوی آور(بایندیگ) است.



شکل ۴-۲ جهت حرکت در امتداد شدنی از ۲ نقطه

تعریف ریاضی امتداد شدنی

به طریق ریاضی بیان می شود که (رائو،۲۰۰۹ ص ۹۵):

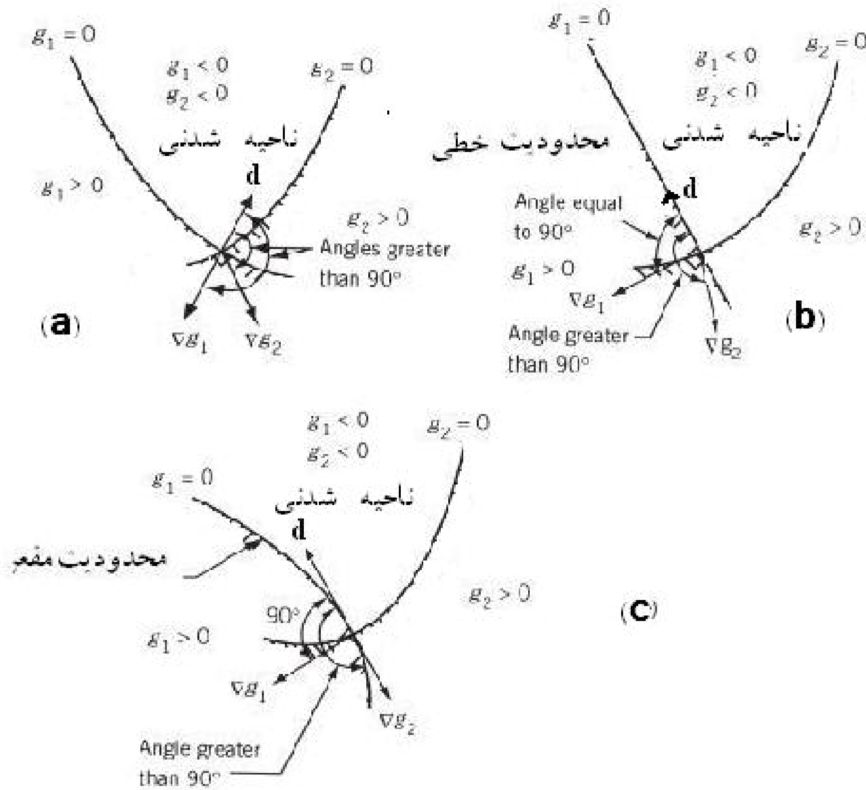
جهت شدنی از نقطه شدنی $\mathbf{x}$ مربوط به مساله زیر با سطوح به اندازه کافی نرم

$$\min_{x \in \Omega \subseteq R^n} f(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq ۰ \qquad i = ۱,۲,...,m$$

جهتی مثل $\mathbf{d}$ است که برای آن $\boldsymbol{d}^t \nabla g_i < ۰$. اگر تابع محدودیت خطی و یا مقعر باشد

همانطور که در شکل ۴-۳ b,c دیده می شود $d^t\nabla g_i \leq 0$.



شکل ۴-۳ جهت شدنی **d** (رائو،۲۰۰۹ ص ۹۶)

یاد آوری می‌گردد هر بردار **d** که در $d^t\nabla g_i(\mathrm{x}) < 0$ صدق کند یک جهت کاهشی از x است..

در محدودیتهای تساوی اگر $d^t\nabla h_j = 0$ آنگاه**d** جهت شدنی محسوب می‌شود (رائو،۲۰۰۶ ص ۱۸۰).

حالت خاص:x_k واقع بر $g_i(x) = 0$ باشد

اگر g_i در نقطه شدنی x_k ، تساوی آور (binding)باشد مطلب زیر هم جالب توجه است

بسط تیلور g_i حول نقطه $\mathrm{x_k}$:

$$g_i(\boldsymbol{x}) = g_i(\boldsymbol{x}_k) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}_k)^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) + \cdots \rightarrow$$

پس

$g_i(\boldsymbol{x}) \cong g_i(\boldsymbol{x}_k) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}_k)^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)$

حال فرض کنید محدودیت به شکل $g_i(\boldsymbol{x}) \leq ۰$ و $g_i(x)$ در نقطه شدنی $\mathbf{x}_k$ ، تساوی آور (binding)باشد یعنی $g_i(\boldsymbol{x}_k) = ۰$. اگر نقطه $\mathbf{x}_{k+۱} = \mathbf{x}_k + \lambda\mathbf{d}$ بخواهد شدنی باشد باید در محدودیت ها صدق کند یعنی $g_i(\boldsymbol{x}_{k+۱}) \leq ۰$ پس چون $g_i(x_k) = ۰$ نتیجه می‌شود:

$$g_i(\boldsymbol{x}_{k+۱}) \cong ۰ + \nabla g_i(\boldsymbol{x}_k)^t(\boldsymbol{x}_k + \lambda\mathbf{d} - \boldsymbol{x}_k) \leq ۰ \Rightarrow \nabla g_i(\boldsymbol{x}_k)^t\, \mathbf{d} \leq ۰$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{d}^t \nabla g_i(x_k) \leq ۰ \quad i = ۱,۲, \dots, m$$

$\boldsymbol{d}$: امتداد شدنی از نقطه x_k واقع برمنحنی $g_i(\boldsymbol{x}) = ۰$

لذا اگرمحدودیتها به شکل $g_i(x) \leq ۰$ باشند امتداد شدنی از نقطه شدنی $\boldsymbol{x}_k$، واقع بر $g_i(\boldsymbol{x}) = ۰$؛ برداری مثل $\boldsymbol{d} \neq ۰$ است که در رابطه فوق صدق کند.

۴-۴-۱-۲ اساس الگوریتمهای حرکت در امتداد شدنی

چون راههای زیادی برای انتخاب امتداد شدنی مناسب جهت حل مسائل وجوددارد لذا الگوریتم های حرکت در امتداد شدنی مختلفند. در الگوریتمهای حرکت در امتداد شدنی که برای حلNLP محدودیت دار بکار می رود(وینستون،۱۹۹۴ ص ۷۱۶) از یک نقطه شدنی آغاز و دنباله ای از نقاط $\{\mathbf{x}_k\}$ را مطابق زیرتولید می‌کند:

$$\boldsymbol{x}_{k+۱} = \boldsymbol{x}_k + \lambda\mathbf{d_k}$$

که در آن $\lambda > ۰$ اندازه گام است و $\mathbf{d_k}$جهت حرکت از $\mathbf{x}_k$ است؛ که طبق تعریف اگر $\nabla f(\mathbf{x}_k)^t \mathbf{d}_k < ۰$ یا $\mathbf{d}_k^t \nabla f(\mathbf{x}_k) < ۰$ یک جهت کاهش یا نزول هم می باشد.

دو حالت در نظر می گیریم

۱) اگر $\mathbf{x}_k$ زینی نباشد

اندازه گام چنان انتخاب می‌شود که

الف) $\mathbf{x}_k + \lambda\mathbf{d}_k$ شدنی باقی بماند(ناحیه شدنی $\mathbf{x}_k + \lambda \times \mathbf{d}_k \in X$)و

ب) مقدار تابع در آن بهتر از مقدار تابع در $\mathbf{x}_k$ باشد(بازارا و دیگران،۲۰۰۶ ص ۵۳۷).

۲) اگر $\mathbf{x}_k$ زینی باشد، روش متوقف می‌شود یعنی $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k$. بطور معادل $\mathbf{d}_k=0$
بعد از یافتن $\mathbf{d}_k$ برای یافتن λ یک مساله بهینه سازی یک متغیره باید حل شود.
جواب در اینگونه روشها غالباً نزدیک به جوابهای KKT وگاه FJ می‌شود. در ادامه یک الگوریتم حرکت در امتدادشدنی توضیح داده می‌شود.

۴-۴-۲ الگوریتم حرکت در امتداد شدنی فرانک ولف برای NLP با محدودیت خطی

ذیلاً با ذکر یک مثال به توضیح روش حرکت در امتداد شدنی ارائه شده در ۱۹۵۶ توسط فرانک ولف (تعمیم یافته متدGD[1]) می پردازیم.
فرض کنید می خواهیم مساله غیر خطی P به شرح زیررا حل کنیم (وینستون،۱۹۹۴، ص ۷۱۶ ، آوریل ،۱۹۷۶ ص۴۴۲)

مســـــــاله P

$$\begin{aligned} &\min/\max Z = f(\mathbf{x}) \\ &\quad s.t.\ A\mathbf{x} \le b \\ &\qquad \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

که در آن

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^t$$

A یک ماتریس $m \times n$ است

b یک بردار $m \times 1$

f تابع مشتق پذیر مقعر در بیشینه سازی یا تابع مشتق پذیر محدب در کمینه سازی

۴-۴-۲-۱ یافتن جواب شدنی

در شروع الگوریتم یک جواب شدنی اولیه ($\mathbf{x}_0$) که محدودیت‌های $A\mathbf{x} \le b$ را ارضاء کند باید پیدا کنیم. گاه از جمله مواردی که طرف راست نامعادلات محدودیتها منفی هم دارد این جواب نقطه ای مثل مبدا نیست که براحتی یافت شود. اما با استفاده از روش M بزرگ یا سیمپلکس‌دو مرحله ای(۲ فاز) اینکار ممکن است قابل انجام باشد[2] (وینستون ،۱۹۹۴ص ۷۱۶، وینستون،۲۰۰۴ص۶۹۳) .

---

[1] Gradient Descent

[2] برای یادآوری این ۲ متد به جزوه تحقیق در عملیات I حمید بازرگان دراینترنت مراجعه می‌توان نمود

مثال ۴-۱۹: مطلوبست یک جواب شدنی برای

$Min\ \ Z = ۲x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۳x_۱ - ۵x_۲$
s.t.
$۳x_۱ + x_۲ \leq ٦$
$۴x_۱ + ۲x_۲ \geq ٤$
$x_۱, x_۲ \geq ۰$

حل مبداء یک نقطه شدنی نیست. جواب مساله زیررا بدست می اوریم که یک نقطه شدنی برای مساله فوق نیز می باشد زیرا جواب مساله زیریک شرطش اینست که درمحدودیت ها صدق کند.

یافتن جواب شدنی با روش M بزرگ [1]

جهت یافتن یک جواب شدنی برای مساله غیر خطی P که تنها محدودیت های خطی دارد، محدودیت را به صورت تساوی شامل متغیر های مصنوعی(R) در می آوریم و همراه با یک تابع هدف به صورت $MR_۱ + MR_۲ + \cdots$ حل می کنیم:

$Min\ \ Z = ۰x_۱ + ۰x_۲ + MR_۲$
s.t.
$۳x_۱ + ۲x_۲ + S_۱ \qquad = ٦$
$٤x_۱ + x_۲ \qquad - S_۲ \quad + R_۲ = ٤$
$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, R_۲ \geq ۰$

	Z	$X_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$R_۲$	RHS	نسبت	رابطه
Z	۱	۰	۰	۰	۰	-M	۰		سطر Z
$S_۱$	۰	۳	۲	۱	۰	۰	٦		محدودیت اول
$R_۲$	۰	٤	۱	۰	−۱	۱	٤		محدودیت دوم

جدول اول(ضریب متغیر های پایه در تابع هدف صفر است):

[1] اقتباس از مهرگان،محمد رضا،۱۳۷۴ پژوهش عملیاتی، نشر کتاب دانشگاهی

	Z	x_1 ↓	x_2	S_1	S_2	R_2	RHS	نسبت	رابطه
Z	۱	٤M	M	۰	-M	۰	٤M		سطر Z
S_1	۰	۳	۲	۱	۰	۰	٦	۲	محدودیت اول
← R_2	۰	٤	۱	۰	−۱	۱	٤	۱	محدودیت دوم

جدول بعد

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_2	RHS		رابطه
Z	۱	۰	۰	۰	۰	-M	۰		سطر Z
S_1	۰	۰	۱/۲۵	۱	۰/۷۵	−۰/۷۵	۳		محدودیت اول
x_1	۰	۱	۰/۷۵	۰	۰−/۲۵	۰/۲۵	۱		محدودیت دوم

در سطر تابع هدف این جدول از مساله کمینه سازی ضریب با مقدار مثبت نداریم. متوقف می شویم با $x_2 = ۰, x_1 = ۱$.پس جواب شدنی اولیه برای مساله غیر خطی مثال چنین است: $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$.

اگر با قراردادن M=۱۰۰۰۰۰ مساله را با نرم افزار لینگو حل کنیم، جواب $x_2 = ۰, x_1 = ۱$, بدست می آید.:

```
min=۱۰۰۰۰۰*R۲;
۳*x۱+x۲+s۱=٦;  ٤*x۱+x۲-s۲+R۲=٤;
end

Optimal solution found at step:        ۱
 Objective value:              ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
                    Variable        Value              Reduced Cost
                       R۲       ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰       ۱۰۰۰,۰۰۰
                       X۱       ۱,۰۰۰۰۰۰                ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
                       X۲       ۰,۰۰۰E+۰۰               ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
                       S۱       ۳,۰۰۰۰۰۰                ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
                       S۲       ۰,۰۰۰۰E+۰۰        ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
```

یافتن جواب شدنی اولیه با فاز اول روش ۲ فاز سیمپلکس

برای دست یابی به یک جواب شدنی مساله غیر خطی مثال ۴-۱۹ با مرحله اول روش ۲فاز سیمپلکس باید مساله زیر را حل کنیم

$$Min\ W \quad - R_2 = 0$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 6$$

$$4x_1 + x_2 - S_2 + R_2 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

جدول آغازین

	W	x₁	x₂	S₁	S₂	R₂	RHS	نسبت	
W	۱	۰	۰	۰	۰	-۱	۰		سطر w
S₁	۰	۳	۲	۱	۰	۰	٦		محدودیت اول
R۲	۰	٤	۱	۰	-۱	۱	٤		محدودیت دوم

با عملیات گاس جردن بایدضریب متغیر های پایه در تابع هدف صفر شود:

جدول اول

	W	x₁	x₂ ↓	S₁	S₂	R₂	RHS	نسبت	
W	۱	٤	۱	۰	-۱	۰	٤		سطر w
S₁	۰	۳	۲	۱	۰	۰	٦	۲	محدودیت اول
← R۲	۰	٤	۱	۰	-۱	۱	٤	۱	محدودیت دوم

	W	x₁	x₂	S₁	S₂	R₂	RHS	نسبت	
W	۱	۰	۰	۰	۰	-۰/۲۵	۰		سطر w
S₁	۰	۰	۱/۲۵	۱	۰/۷۵	۰/۷۵	۳		محدودیت اول
x₁	۰	۱	۰/۲۵	۰	-۰/۲۵	۰/۲۵	۱		محدودیت دوم

در سطر تابع هدف ضریب با مقدار مثبت نداریم. جدول پایان فاز اول است با $x_1 = ۱, x_2 = ۰$.پس جواب شدنی اولیه برای مساله NLP داده شده در مثال ۴-۱۹ چنین است: $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$.

حل با نرم افزار لینگو :

```
min=R۲;
۳*x۱+x۲+s۱=٦; ٤*x۱+x۲-s۲+R۲=٤;
end
Optimal solution found at step:        ۱
 Objective value:            ۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
```

Variable	Value	Reduced Cost
R۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰	۱,۰۰۰۰۰۰۰
X۱	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
X۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
S۱	۳,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
S۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

پایان مثال ▲

۴-۲-۲ مراحل روش فرانک ولف برای مساله غیرخطی با محدودیت خطی

برای شروع حل یک مساله غیرخطی دارای محدودیت های صرفاً خطی با روش حرکت در امتداد شدنی فرانک ولف، یک جواب شدنی اولیه ($\boldsymbol{x_0}$) که محدودیت‌های $A\mathbf{x} \le b$ را ارضاء کند باید پیداکرد؛ سپس باید جهتی مثل $\boldsymbol{d} = (d_۱, \dots, d_n)'$ یافت که از $\mathbf{x}_0$ روی آن حرکت کنیم. این جهت باید ۲ ویژگی داشته باشد:

۱-وقتی از $\boldsymbol{x_0}$ در آن جهت حرکت می‌کنیم شدنی باقی بمانیم.

۲- وقتی از $\boldsymbol{x_0}$ در آن جهت حرکت می‌کنیم Z را بهتر نماید.

تذکر : قابل نشان دادن است که

- اگر مقدار حاصلضرب اسکالر $\nabla f(x_۰)^t.\mathbf{d} > ۰$ و ما از $\boldsymbol{x_0}$ به اندازه مقدار کم $\lambda > ۰$ در جهت $\mathbf{d}$ حرکت کرده تا به $\mathbf{x}_۰ + \lambda\mathbf{d}$ برسیم Z افزایش می‌یابد. $\mathbf{d}$ دراین حالت یک جهت افزایشی است.

اگر $\nabla f(x_o)^t\mathbf{d} < ۰$ و ما از $\boldsymbol{x_0}$ به اندازه مقدار کم $\lambda > ۰$ در جهت $\mathbf{d}$ حرکت کنیم Z کاهش می‌یابد $\mathbf{d}$ دراینجا یک جهت کاهشی است.پس هر چه ما در مساله کمینه سازی حاصلضرب $\nabla f(x_o)^t d$ را که منفی است کمتر کنیم مقدار تابع کاهش بیشتری می یابد.
برای توضیح توجه کنید طبق بسط تیلور

$Z= f(x) \cong f(x_۰) + \nabla f(x_o)^t(x - x_o)$،؛

پس اگر مقدار تابع بخواهد در $x_۱ = x_۰ + \lambda\mathbf{d}$ از مقدارش در $\boldsymbol{x_0}$ کمتر باشد بایدنامساوی زیر برقرار باشد(رائو، ۱۹۹۶ ص۱۶۴).

$$f(x_۱) - f(x_o) = \nabla f(x_o)^t(x_۱ - x_o) < ۰ \quad \text{یا} \quad \nabla f(x_o)^t\lambda d < ۰$$

لذا با کمتر شدن $\nabla f(x_o)^t d$ مقدار تابع کاهش می‌یابد.

۴-۴-۲-۳ انتخاب جهت حرکت

عموماً از یک جواب شدنی اولیه $\mathbf{x}_0$(و یا نقاط بعدی $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots$) جهات شدنی زیادی وجود دارد . قصد اینست که اگر مساله کمینه سازی است، جهت شدنی با بیشترین کاهش ممکن[۱] واگر بیشینه سازی است
جهت شدنی با بیشترین افزایش ممکن[۲] را بدست آورده و در آن جهت حرکت کنیم.
در شروع این متد، جهت $d_۱ - x_۰$ برای حرکت از $x_۰$ انتخاب می‌شود؛

که در آن $\mathbf{d}_۱$ جواب بهینه مساله زیراست:

اگرمساله P به صورت $\min f(x)$مشروط بر$Ax \leq b$ و $x \geq ۰$است)

$$\min \ \boldsymbol{d}^t \nabla f(x_k)$$

اگر مساله P به صورت $\max f(x)$مشروط بر$Ax \leq b$ و $x \geq ۰$ است)

$$\max \nabla f(x_k)^t \boldsymbol{d}$$

مشروط بر

$$Ad \leq b, \qquad d \geq ۰$$

---

[۱] steepest feasible desent
[۲] steepest feasible ascent

این یک مساله برنامه ریزی خطی است زیرا حاصلضرب $\nabla f(x_\circ)^t.d$،که در آن $\nabla f(x_\circ)$ یک بردار عددی است، یک تابع خطی ازعناصربردارn عنصری **d** است.

جواب بهینه $\mathbf{d}_1$برای مساله $MinZ = d^t\nabla f(x_\circ)$ یک جهت شدنی با بیشترین کاهش ممکن خواهد بود(آوریل،۲۰۰۳ ص ۷۵۷ و آوریل،۱۹۷۶ ص ۴۴۴) و اگر $\mathbf{d}_1$ برای مساله بیشینه سازی $MaxZ = \nabla f(x_\circ)^t.d$ به دست آید $\mathbf{d}_1$یک جهت شدنی با بیشترین افزایش ممکن خواهد بود.

سوال۱: آیا حرکت ازنقطه $x_\circ$ درجهت $\mathbf{d}_1 - \mathbf{x}_\circ$ مقدار تابع هدف را بهتر می کند؟

جواب:اگر $x_\circ$ نقطه بهینه نباشد حرکت در این جهت باعث بهبود تابع هدف می شود

توضیح: اگر جواب مساله فوق $\mathbf{d}_1$ باشد وهیچ نقطه دیگری ازجمله $x_\circ$جواب بهینه آن نباشد، آنگاه حتماً باید

برای مساله کمینه سازی $\nabla f(x_\circ).x_\circ$ $\nabla f(x_\circ).\mathbf{d}_1 < \nabla f(x_\circ).x_\circ$ یا $\nabla f(x_\circ).(\mathbf{d}_1 - x_\circ) < 0$

برای مساله بیشینه سازی $\nabla f(x_\circ).\mathbf{d}_1 > \nabla f(x_\circ).x_\circ$ یا $\nabla f(x_\circ).(\mathbf{d}_1 - x_\circ) > 0$

نتیجه می‌گیریم که:

مقدار کمی حرکت در جهت $\mathbf{d}_1 - x_\circ$ مقدارتابع هدف را بهتر می‌کند.

انتخاب گام حرکت در هر تکرار($t_0, t_1, \ldots$)

نقطه جدید (x_1) را برابر مقدار زیر می‌گیریم.

$$x_1 = x_\circ + t.(\mathbf{d}_1 - x_\circ)$$

.t جواب بهینه

$\max f[\mathbf{x}_\circ + t(\mathbf{d}_\circ - \mathbf{x}_\circ)] \quad s.t. \; 0 \le t \le 1$ اگر مساله P بیشینه سازی است

$\min f[(x_\circ) + t(d_\circ - x_\circ)] \quad s.t. \; 0 \le t \le 1$ اگر مساله کمینه سازی است

می‌توان نشان داد که در مساله اصلی P

a) اگر بیشینه سازی باشد $f(\mathbf{x}_1) \ge f(\mathbf{x}_\circ)$ و حال اگر $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_\circ)$ پس $\mathbf{x}_0$ جواب بهینه مساله P خواهد بود.

لذا اگر $x_\circ$ بهینه نباشد $\mathbf{x}_1$ مقدار Z را بیشترمی‌کند.

b)اگر کمینه سازی باشد $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_0)$ و اگر $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_0)$ پس $\mathbf{x}_0$ جواب بهینه مساله P خواهد بود

لذا اگر $\mathbf{x}_0$ بهینه نباشد $\mathbf{x}_1$ مقدار Zرا کمترمی‌کند.

سوال۲:آیا $x_1 = x_0 + t_0(\mathbf{d}_1 - x_0)$ نقطه شدنی هم می‌باشد؟

برای مثبت بودن پاسخ بایدالف) $A\mathbf{x}_1 \leq b$ وب) $x_1 \geq 0$.

الف) آیا $Ax_1 \leq b$ ؟

$$Ax_1 = A[x_0 + t_0(d_1 - x_0)] = (1-t_0)Ax_0 + t_0Ad_1 \leq (1-t_0)b + t_0b$$
$$\Rightarrow Ax_1 \leq b \blacksquare$$

البته $\mathbf{d}_1 \& \mathbf{x}_0$، هر ۲ در محدودیت ها صدق می‌کند و t_0 ضریبی بین صفر و یک است پس ترکیب محدب آنها نیز باید در محدودیت ها صدق می‌کرد.

ب) آیا $\mathbf{x}_1 \geq 0$؟

چون $x_0 \geq 0$, $\mathbf{d}_1 \geq 0$, $0 \leq t_0 \leq 1$ پس:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{d}_1 - \mathbf{x}_0) = (1-t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_1 \geq 0$$

لذا ثابت شد که $\mathbf{x}_1 \geq 0$. $\blacksquare$

حال از $\mathbf{x}_1$ در جهت $\mathbf{d}_2 - \mathbf{x}_1$حرکت می‌کنیم که در آن $\mathbf{d}_2$ جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی زیراست

$$\max \nabla f(\mathbf{x}_1).\mathbf{d}$$
$$\text{s.t.}$$
$$A\mathbf{d} \leq b$$
$$\mathbf{d} \geq 0$$

نقطه $\mathbf{x}_2$چنین انتخاب می‌شود:

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_1} + t_1(\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{x}_1)$$

که در آن

t_1 جواب بهینه مساله $0 \leq t \leq 1$ $\max f[x1 + t(d1 - x1)]$ می باشد.

می‌توان نشان داد $\mathbf{x}_۲$ شدنی و در مساله کمینه سازیP داریم $f(\mathbf{x_2}) \le f(\mathbf{x_1})$.
اگر $f(\mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1})$ جواب مساله غیرخطیP در بخش ۴-۴-۲ ، $\mathbf{x_1}$ خواهد بود.
با ادامه این روش، جهت‌های $\mathbf{d}_۲,\mathbf{d}_۳,...,\mathbf{d}_{n-۱}$ و نقاط جدید $\mathbf{x}_۳,\mathbf{x}_٤...\mathbf{x}_n$
بدست آورده شود. توقف هنگامی صورت گیرد که $(\mathbf{x}_k),(\mathbf{x}_{k-1})$ مساوی یا مقدارکمی با هم اختلاف داشته باشند:
$\{x_k \cong x_{k-1} \Leftarrow x_{k-1}$ جواب بهینه مساله کمینه سازیP یعنی مسئله زیر است.

$$\begin{aligned} \min Z &= f(\mathbf{x}) \\ s.t.\ A\mathbf{x} &\le b \\ \mathbf{x} &\ge ۰ \end{aligned}$$

البته ضوابط توقف دیگر هم از جمله $\|f(\mathbf{x_{K+1}}) - f(\mathbf{x_K})\| \le \epsilon \times \|f(\boldsymbol{x_{K+1}})\|$ یا $\nabla\|f(\mathbf{x_K})\| \le \epsilon$ نیز ارائه شده است که در آنها ϵ یک عدد حقیقی بسیار کوچک است

۴-۴-۲-۴ خلاصه روش فرانک ولف[۱] برای حل مسائل غیرخطی با تابع هدف مشتق پذیر پذیر و محدودیت ها ی خطی

مراحل حل با الگوریتم فرانک ولف برای مساله زیر

مسـالهP

$$\begin{aligned} \min/\max Z &= f(\mathbf{x}) \\ s.t.\ A\mathbf{x} &\le b \\ \mathbf{x} &\ge ۰ \end{aligned}$$

که در آن

A ماتریس $m \times n$

b بردار m عنصری

گام آغازین

یک جواب شدنی اولیه ($\mathbf{X}_0$)مشخص نموده,یک مقدار کوچک ε انتخاب کرده، k رابرابر یک قرار داده و به گام ۱ بروید.

---

[۱] Linearly Constrained NLP: Frank-Wolfe Algorithm

گام ۱ محاسبه $\mathbf{d}_k$ (برداری است با عناصری به تعداد متغیر های مساله P)

مقدارگرادیان تابع f رابه ازای $\mathbf{x}_k$ محاسبه و $\mathbf{d}_k$ را جواب بهینه مساله زیر قرار دهید

$\mathbf{d}_k$ جواب بهینه مساله زیراست

اگر مسالهP کمینه سازی باشد

$$min\ d^t \nabla f(x_k)$$

اگر مسالهP بیشینه سازی باشد

$$max\ \nabla f(x_k)^t d$$

مشرو ط بر

$$Ad \le b, \qquad d \ge ۰$$

گام۲ انتخاب طول گام(t_k)

t_k جواب بهینه

$\max f(\mathbf{x}_{k-۱} + t(\mathbf{d}_k - \mathbf{x}_{k-۱}) \quad s.t.\ ۰ \le t \le ۱$ اگر مساله P بیشینه سازی است

$\min f(x_{k-۱} + t(d_k - x_{k-۱}) \qquad s.t.\ ۰ \le t \le ۱$ اگر مساله P کمینه سازی است

گام۳ نقطه $\mathbf{x}_k$ را برابر زیر بگیرید:

$$x_k = x_{k-۱} + t_k(\mathbf{d}_k - x_{k-۱})$$

اگر شرط توقف که در زیر می آید برقرار نبود k را برابر k+۱ گرفته و به گام ۱ بروید.

۴-۴-۲-۵ شرط توقف

اگر $(\mathbf{x}_k),(\mathbf{x}_{k-1})$ مساوی یا کمی با هم اختلاف داشته باشند متوقف شویددر غیر اینصورت k را برابر k+۱ قرار داده وبه گام ۱ بروید. شایان ذکر است که ضوابط توقف با عبارات مختلف بیان می شود، مثلاً:

برطبق وینستون(۱۹۹۴) ص۷۱۷: توقف الگوریتم در جایی باشد که $\mathbf{x_k} = \mathbf{x_{k-1}}$ و هم چنین اعلام می‌کند اگر $f(\mathbf{x}_k), f(\mathbf{x}_{k-1})$مساوی شدند $\mathbf{x_{k-1}}$جواب بهینه مسئلهPاست.

راویندران وبقیه(۲۰۰۷) ص۳۳۹ اعلام می‌کند که اگر $\nabla\|f(x_K)\| \le \epsilon$ توقف کنید.
هم چنین شرط توقف را با $\epsilon > 0 \;\&\; \delta > 0$ مطابق زیر بیان می کند[1]:

$$\|x_{K+1} - x_K\| \le \delta \times \|(x_{K+1})\| \;\&\; \|f(x_{K+1}) - f(x_K)\| \le \epsilon \times \|f(x_{K+1})\|$$

گفتنی است که الگوریتم فرانک ولف از هرنقطه شدنی شروع شود به نقطهKKT همگرایی می‌یابد واگر تابع محدب باشد می‌توان میزان بهبود باقیمانده را برآورد کرد[2]

مثال برای الگوریتم حرکت در امتداد شدنی فرانک ولف درحل مساله با تابع هدف غیر خطی مشتق پذیر و محدودیت ها خطی

مثال ۴-۲۰ (ص ۷۱۷-۸ ۷۱ وینستون ,۱۹۹۴)

مطلوبست اعمال دو تکرار الگوریتم فرانک ولف روی مساله زیر با شروع از مبدا.

$$maxZ = f(x,y) = 2xy + 4x + 6y - 2x^2 - 2y^2$$

s.t.

$$(1,1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le 2$$

$$x, y \ge 0$$

حل

گام آغازین

انتخاب نقطه شدنی $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $f(x_0) = 0$ برای شروع

K=1

گام ۱

$$\nabla f(x) = (2y + 4 - 4x \qquad 2x + 6 - 4y)^t \Longrightarrow \nabla f(x_0) = (4 \qquad 6)^t$$

برای حرکت از مبدا با حل مساله برنامه ریزی خطی زیر جهتی شدنی را می یابیم:

$$\max \quad (4 \;\; 6)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 4d_1 + 6d_2$$

s.t.

$$(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = d_1 + d_2 \le 2$$

$$d_1, d_2 \ge 0$$

---

۱ Ravindran به نقل از networks.cs.ucdavis.edu/opt_review/ch_۸.ppt
۲ Ravindran به نقل از networks.cs.ucdavis.edu/opt_review/ch_۸.ppt

جواب بهینه ۲ ۰ است: پس $d_1 = \binom{0}{2}$.

جهت حرکت

$$\boldsymbol{d_1} - \boldsymbol{X_0} = \binom{0}{2} - \binom{0}{0} = \binom{0}{2}$$

گام ۲ نقطه بعد

$$\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{X_0} + t(\boldsymbol{d_1} - \boldsymbol{X_0}) = \binom{0}{0} + t\binom{0}{2} = \binom{0}{2t}$$

گام حرکت(t_1)جواب مساله محدودیت دار زیر است:

$$\max f(x = 0 \quad y = 2t) = 12t - 8t^2$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \le t \le 1$$

برای مساله می توان شرط های KKT را نوشت و حل کرد یا از نرم افزار کمک گرفت. اما می‌توان این راه حل را هم آزمودکه ابتدا محدودیت را در نظر نگیریم و بگوییم چون مشتق تابع $12t - 8t^2$ در نقطه $t = 0/75$ اتفاق می افتد واین نقطه در محدودیت صدق می کند پس $t_1 = 0.75$ جواب بهینه است.

$$\boldsymbol{X_1} = \binom{0}{2t_1} = \binom{0}{1.5} \qquad f(\boldsymbol{X_1}) = f(x = 0 \quad y = 1.5) = 4.5$$

چون $f(X_0)$ و $f(X_1)$ با هم برابر نیستند ادامه و K را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

K=۲

گام ۱ حل مساله زیر:

$$\max \nabla f(x_k)^t d$$
$$\text{s.t. } Ad \le b, \qquad d \ge 0$$

$$f(\mathbf{x}) = 2xy + 4x + 6y - 2x^2 - 2y^2$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2y + 4 - 4x \\ 2x + 6 - 4y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_1} = \binom{0}{1.5} \qquad f(\boldsymbol{X_1}) = 4.5$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 2\times 1/5 + 4 - 0 & 0 + 6 - 4\times 1/5 \end{pmatrix}^t = (7 \quad 0)^t$$

پس برای تعیین جهت بعدی یعنی $\mathbf{d}_2$ باید مساله زیر را حل کنیم

$$\max Z = \nabla f(\mathbf{x}_۱)^t \mathbf{d} = (۷ \quad ۰)\begin{pmatrix} d۱ \\ d۲ \end{pmatrix}$$

s.t.

$$(۱ \ ۱)\begin{pmatrix} d۱ \\ d۲ \end{pmatrix} \le 2 \quad , \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d۱ \\ d۲ \end{pmatrix} \ge ۰$$

یا

$$max \ \ ۷d۱ + ۰d۲$$

s.t.

$$d۱ + d۲ \le ۲$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d۱ \\ d۲ \end{pmatrix} \ge ۰$$

جواب این مساله $\mathbf{d}_۲ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}$ است.

حال

گام ۲

$$X_۲ = X_۱ + t(d_۲ - X_۱) = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۳}{۲} \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۳}{۲} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ۲t \\ \frac{۳}{۲} - \frac{۳t}{۲} \end{pmatrix}$$

$t_۲$ جواب مساله بیشینه سازی زیر می باشد.

$$maxf\left(\boldsymbol{X_1} + t(\boldsymbol{d_1} - \boldsymbol{X_1})\right) = ۴.۵ + ۱۴t - ۱۸.۵t^۲$$

$$۰ \le t \le ۱$$

چون مشتق تابع $f(t) = ۴.۵ + ۱۴t - ۱۸.۵t^۲$ در نقطه $t = \frac{۱۴}{۳۷}$ صفر می شود مشتق دوم درآن نقطه منفی است واین نقطه در محدودیت صدق می‌کند پس $t_۲ = \frac{۱۴}{۳۷}$.

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} ۲t_۲ \\ \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}t_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۲۸}{۳۷} \\ \frac{۶۹}{۷۴} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X_2}) = f\left(x = \frac{۲۸}{۳۷} \ , y = \frac{۶۹}{۷۴}\right) = ۷.۱۵$$

گام ۳

$f(X_2) = ۷.۱۵$ و $f(X_1) = ۴.۵$ با هم برابر نیستند باید ادامه وبا قرار دادن K=K+۱=۳ به گام ۱ برویم

K=۳

X_2 را نقطه اولیه تکرار۳ قرار می دهیم...

این الگوریتم جواب بهینه برابر $x^* = \binom{۰.۸۳}{۱.۱۷}$ با $Z^* = ۸.۱۷$ را می دهد(وینستون، ۱۹۹۴ ص ۷۱۸)

لینگو برای مساله اصلی مقدار تابع هدف را ۸/۱۶۷ و $x^* = \binom{۰.۸۳}{۱.۶۷}$ می دهد. ▲

تمرینات روش حرکت در امتداد شدنی فرانک–ولف

۱- مطلوبست حل مساله زیر با روش فرانک-ولف

$$\text{Min } 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$x_1 \,\&\, x_2 \ge 0$$

۲- مطلوبست حل مساله زیر با روش فرانک-ولف

$$\text{Min } (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$$
$$\text{s.t.}$$
$$-x_1 + 2x_2 - 14 \le 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - 12 \le 0$$
$$x_1 \,\&\, x_2 \ge 0$$

جواب بهینه متغیرها: به ترتیب ۳٫۶۹ و ۰٫۴۶ و مقدار تابع هدف ۷٫۶۹ است.

۳- مطلوبست حل مساله زیر با روش فرانک-ولف با نقطه اولیه $(۰ \;\; ۲)'$.

$$\text{Max } 2x^2 + 3y^2 + 5xy$$
$$\text{s.t.}$$
$$x + 3y \le 6$$

۴-. مطلوبست حل مساله زیر با روش فرانک-ولف با نقطه شروع $(0 \quad 1)'$.

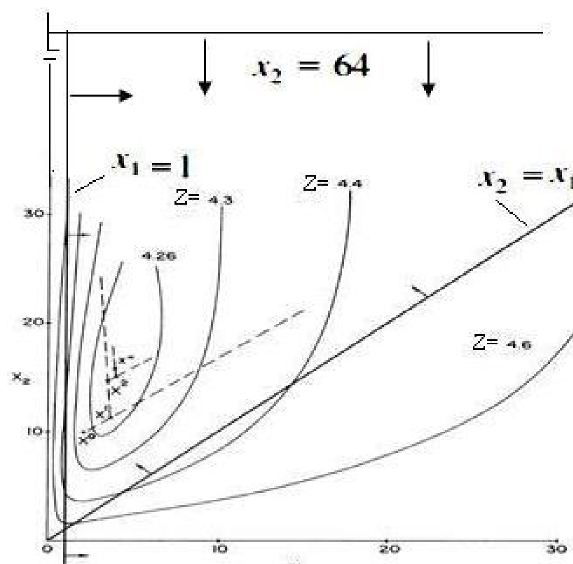
$$\begin{aligned}&Min \quad x^2+y^2-3xy\\ &s.t.\\ &3x+y\le 4\\ &x,y\ge 0\end{aligned}$$

۵- مطلوبست حل مساله زیر با روش فرانک-ولف با نقطه شروع مبدا

$$\begin{aligned}&\text{Max } 12x_1+13x_1^2-2x_1^3+12x_2-x_2^3\\ &\text{s.t.}\\ &x_1+x_2\le 3\\ &x_1 \,\&\, x_2\ge 0\end{aligned}$$

۶-با نقطه شروع $x_0=(2 \quad 10)'$ مطلوبست حل مساله داده شده با ناحیه شدنی زیر(مثال ۸-۱ راویندران و همکاران،۲۰۰۷ص۳۴۰)

$$\begin{aligned}&Min \quad Z=x_1^{\frac{1}{4}}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{64}{x_2}\\ &\text{s.t.}\ 1\le x_1\le x_2 \quad ,x_2\le 64\end{aligned}$$



ناحیه شدنی تمرین ۶

جواب بهینه هر ۲ متغیر: ۶۴ و مقدار تابع هدف ۴,۸۳ است.

۷-آیا $\nabla f^t d$ براساس

$$d^t \nabla f(x_\circ) = \frac{d}{d\lambda} f(x_k + \lambda d)|_{\lambda=\circ}$$

مولفه نموتابع f در جهت d می باشد؟

۴-۴-۳ الگوریتم حرکت در امتداد شدنی زوتند یک(Zoutendijk) برای مساله غیر خطی با محدودیت‌های خطی(تساوی و نامساوی) و تابع هدف مشتق پذیر

الگوریتم حرکت در امتداد شدنی زوتندیک در دهه ۱۹۶۰ ارائه شد . این الگوریتم هم، حرکت از یک نقطه اولیه در یک جهت شدنی را آغاز, یک نقطه بعدی بدست آورده و نقطه اولیه برای تکرار بعد قرار می‌دهد. تکرارها انجام می پذیرد تا اینکه هیچ جهتی شدنی برای بهبود یافت نشود. مساله می‌تواند محدودیت به شکل تساوی و نامساوی داشته باشد. در این متد، جهت جستجو از حل یک زیر مساله بدست می آید ؛ سپس در طول این جهت یک جستجو صورت می گیرد.

۴-۴-۳-۱ خلاصه روش زوتند یک

مراحل حل برای مساله زیر (بازارا و دگران ۲۰۰۶ص۵۴۳)

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\quad Ax \le b \\ &\quad Qx = q \end{aligned}$$

که در آن

A ماتریس $m \times n$

Q ماتریس $\ell \times n$

b بردار m عنصری

q بردار ℓ عنصری

چنین است(بازارا و همکاران ،۲۰۰۶ص۵۴۳و رائو،۲۰۰۹ ص ۳۹۴):

مرحله آغازین.

یک جواب اولیه[۱] x_1 چنان بیابید که در $Q\,x_1 = q$ و $A\,x_1 \le b$ صدق کند. k رامساوی ۱ قرار داده و به مرحله اصلی بروید.

مرحله اصلی گام ۱

مجموعه I مربوط به محدودیت های تساوی آور در x_k را مشخص کنید(آن محدودیت ها که به صورت تساوی ارضاء می‌شوند). ماتریس A را به $\boldsymbol{A_1}$ و $\boldsymbol{A_2}$ تجزیه کنید. ماتریس $\boldsymbol{A_1}$ را شامل سطر های به شماره مجموعه I از ماتریس A تشکیل دهید. بقیه ماتریس A را A_2 بنامید. همچنین بردار m عنصری $\boldsymbol{b}$ را به $\boldsymbol{b_1}$ و $\mathbf{b_2}$ تجزیه کنید. b_1 و b_2 را به همین نحو تشکیل دهید.

حال با تجزیه b^t, A^t بـــه $(A_1^t,\ A_2^t)$, $(b_1^t\ b_2^t)$ داریم: $A_1x_k = b_1$, $A_2x_k \le b_2$.

توجه: $\boldsymbol{A_1}$ و A_2 ، b_1 و b_2 در هر تکرار باید مجدداً تعیین شود.

انتخاب جهت

جهت یا امتداد شدنی $\mathbf{d}_k$ را برابر جواب بهینه مساله زیر قرار دهید[۲] تعداد عناصر بردار $\mathbf{d}$ در مساله زیر به تعدادمتغیرهای مساله اصلی است.

$$
\begin{aligned}
&\min\ \nabla f(x_k)^t d \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad A_1 d \le 0 \\
&\qquad Qd = 0 \\
&\qquad -1 \le d_j \le 1 \quad j = 1,\dots,m
\end{aligned}
$$

اگر مقدار تابع هدف زیرْ مساله فوق صفر بود یعنی اگر $\nabla f(x_k)^t d_k = 0$ توقف کنید(**شرط توقف طبق** بازارا ودیگران، ۲۰۰۶ ص ۵۴۳). x_k نقطه KKT خواهد بود.

مقادیر متغیر های دوال زیرْ مساله اخیر ضرایب لاگرانژ متناظر را [در مساله اصلی] می دهد[۱](مرجع: بازارا ودیگران،۲۰۰۶).

---

[۱] رسم ناحیه شدنی در صورت امکان در این مرحله می تواند کمک کار باشد.

[۲] مساله P۳یا P۲ ص ۵۴۱بازارا(۲۰۰۶) هم می‌تواند بجای آن قرار گیرد.

در غیر این صورت(یعنی اگر مقدار تابع هدف زیر مساله فوق صفرنبود) به گام ۲ بروید.

انتخاب مقدار یا اندازه گام

گام ۲

λ_k یک جواب بهینه مساله زیرمی باشدکه با جستجو بدست می‌آید و باعث می شود که x_{k+1} در ناحیه شدنی باشد

$$\min f(x_k + \lambda d_k)$$
$$s.t$$
$$0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$$

λ_{max} چنین تعیین می‌شود(باتوجه به بخش ۱۰,۱ ص ۵۴۳ بازارا و همکاران ،۲۰۰۶):

$$\lambda_{max} = \begin{cases} \min\left\{\frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} : \hat{d}_i > 0\right\} & \text{if } d \nleq 0 \\ \infty & \text{if } d \leq 0 \end{cases}$$

که در آن

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_i \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = b_2 - A_2 x_k \qquad \hat{d} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \\ \hat{d}_i \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = A_2 d_k$$

x_{k+1} را برابر $x_k + \lambda_k d_k$ بگیرید: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ و محدودیتهایی راکه در x_{k+1} بصورت تساوی ارضاء می‌شود معین نموده A_1, A_2 جدید را نیز مشخص کرده، بجای k ، k+۱ قرار داده به گام ۱ بروید.

---

[1] If $\nabla f(x_k)^t d_k = 0$ stop; xk is the KKT point with the variables to the foregoing problem giving the corresponding Lagrange multipliers. Otherwise go to step ۲.

مثال ۴ –۲۱ (ص۵۴۴ بازارا،۲۰۰۶ برای متد زوتندیک در حالت مساله NLP با محدودیت‌های خطی)
مطلوبست حل مساله زیر با الگوریتم زوتندیک:

$$\min f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$$

s.t شماره

$x_1 + x_2 \le 2$ ۱

$x_1 + 5x_2 \le 5$ ۲

$-x_1 \le 0$ ۳

$-x_2 \le 0$ ۴

حل

نقطه شروع حل مساله را $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ که شدنی است انتخاب می‌کنیم.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 \end{pmatrix}$$

هر تکرار الگوریتم شامل حل یک زیر مساله درگام ۱ می‌باشد تا جهت جستجو یافت شود سپس یک جستجوی خطی در طول این جهت انجام می‌شود.

تکرار اول $\mathbf{k}=1$

$$\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

در نقطه x_1 $I = \{3, 4\}$ ؛ یعنی تنها محدودیت‌های ۳و۴ در x_1 تساوی آورند.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

گام۱

$I=\{3,4\} \Rightarrow$ **A۱= سطر های ۳و ۴ ماتریسA** $=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ **A۲=دیگرسطرها** $\langle\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{matrix}\rangle$

b۱= سطرهای۳و ۴بردارb $=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ **b۲= دیگر عناصرb** $=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

زیرْ مساله برای یافتن جهت $\mathbf{d}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$ چنین است :

$$\min \nabla f(x_1)^t\mathbf{d} \quad =$$
$$\text{s.t} \;\; A_1\mathbf{d}\le 0$$
$$Q\mathbf{d}=0$$
$$-1\le d_1\le 1$$
$$-1\le d_2\le 1$$

محدودیت تساوی نداریم پس Q=۰ و مساله برنامه ریزی خطی چنین می شود:

$$\text{Min}(-4\ -6)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \le 0$$

$$-1 \le d_1 \le +1$$

$$-1 \le d_2 \le +1$$

$$\Rightarrow$$

$$\min -4d_1 - 6d_2$$

$$\text{s.t.}$$

$$-d_1 \le 0$$

$$-d_2 \le 0$$

$$-1 \le d_1 \le 1$$

$$-1 \le d_2 \le 1$$

جواب مساله فوق از سیمپلکس $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ به دست می آید. چون مقدار تابع هدف مساله اخیر به ازای این جواب برابر ۱۰-=۶-۴- بوده و صفرنیست توقف ننموده به گام ۲ می رویم.

گام۲

جواب بهینه مساله زیر را بدست آورده و λ_1 را برابرآن قرار می دهیم

$$\min f\ (x_1 + \lambda d_1)$$

$$s.t.$$

$$0 \le \lambda \le \lambda_{\max}$$

$$x_{۱} + \lambda d_{۱} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$f\,(x_{۱} = \lambda \;\;, x_{۲} = \lambda) = ۲\lambda^{۲} + ۲\lambda^{۲} - ۲\lambda^{۳} - ٤\lambda - ٦\lambda = ۲\lambda^{۲} - ۱۰\lambda$$

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\hat{b}_{۱}}{\hat{d}_{۱}}, \dfrac{\hat{b}_{۲}}{\hat{d}_{۲}}\right\} & \text{اگر } \hat{d} > ۰ \\ \infty & \text{اگر } \hat{d} \le ۰ \end{cases}$$

$$\hat{b} = b_{۲} - A_{۲} x_{k} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۵ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{۱} \\ \hat{b}_{۲} \end{pmatrix}$$

$$\hat{d} = A_{۲} d_{k} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_{۱} \\ \hat{d}_{۲} \end{pmatrix} \not\le ۰$$

$$\lambda_{\max} = \min\left\{\frac{\hat{b}_{۱}}{\hat{d}_{۱}}, \frac{\hat{b}_{۲}}{\hat{d}_{۲}}\right\} = \left\{\frac{۲}{۲}, \frac{۵}{٦}\right\} = \frac{۵}{٦}$$

مساله جستجوی خطی مربوطه چنین است:

$$\min f(\lambda) = 2\lambda^2 - 10\lambda$$

s.t.

$$0 \le \lambda \le \frac{5}{6}$$

$$f'(\lambda) = 4\lambda - 10$$

$$4\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2} = 2.5$$

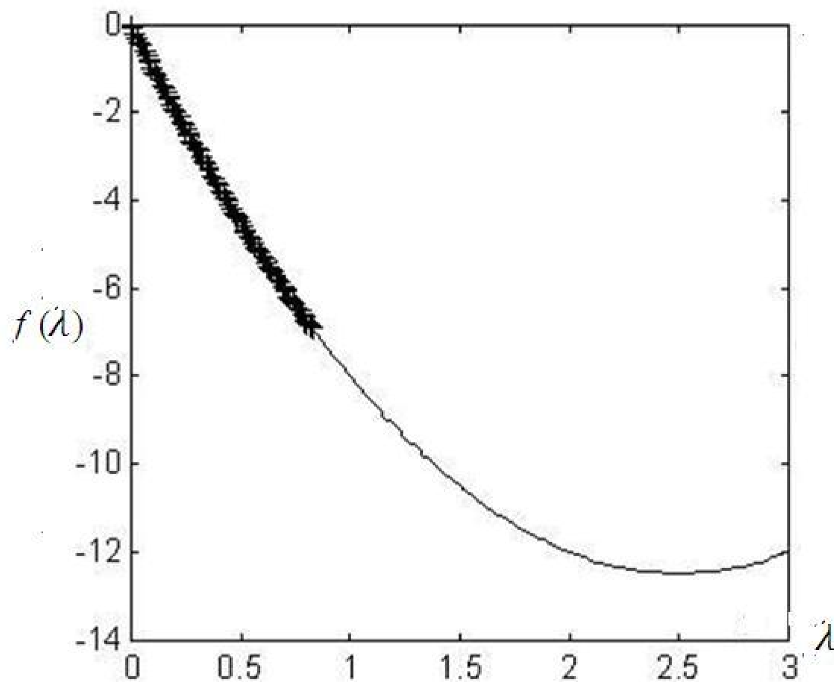
مشتق دوم $= 4 > 0$

مشتق دوم این تابع یک متغیره مثبت است پس تابع $f(\lambda) = 2\lambda^2 - 10\lambda$ محدب است. مینیمم این تابعِ بدون محدودیت در $\lambda = 2.5$ اتفاق می‌افتد؛ اما $\lambda = 2.5$ در محدودیت صدق نمی‌کند، با توجه به شکل به طور ترسیمی در می یابیم که $\lambda_1 = \dfrac{5}{6}$.

اگر از شروط KKTنیز کمک بگیریم، باز $\lambda = \dfrac{5}{6}$ بدست می آید.

$$x_2 = x_1 + \lambda_1 \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{5}{6}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

x_2 فقط در محدودیت دوم مساله اصلی به صورت تساوی صدق می کند بعبارت دیگر از میان محدودیت‌ها، تنها محدودیت دوم در x_2 تساوی آور(binding)است: $I=\{2\}$.



به علاوه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k=1+1=2$$

تکرار دوم k=۲- گام۱

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \nabla f(x_2) = \begin{pmatrix} 4\times\frac{5}{6} - 2\times\frac{5}{6} - 4 \\ 4\times\frac{5}{6} - \frac{2\times5}{6} - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\, \nabla f\ (x_2)^t\, \mathbf{d}$$
$$A_1\mathbf{d} \le 0$$
$$-1 \le d_1 \le 1 \qquad -1 \le d_2 \le 1$$
$$\min\begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$
$$s.t.$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \le 0$$
$$-1 \le d_1 \le 1$$
$$-1 \le d_2 \le 1$$

$d_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ جواب این مسأله نامه ریزی خطی با تابع هدف برابر $0 \neq \frac{-22}{15}$ می‌باشد.

شرط توقف برقرار نیست پس ادامه داده وبه گام ۲ می‌رویم.

گام ۲

جستجوی خطی:

$$Min\, f\ (x_2 + \lambda d_2)$$
$$0 \le \lambda \le \lambda \max$$

یافتن $\lambda_{\max}$

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\left\{\frac{\hat{b}_۱}{\hat{d}_۱}, \frac{\hat{b}_۲}{\hat{d}_۲} : \hat{d}_i > ۰\right\} & if\ \hat{d} \not\le ۰ \\ \infty & if\ \hat{d} \le ۰ \end{cases}, \quad \hat{b} = b_2 - A_2 x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\hat{d} = A_2 x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \not\le 0$$

$$\lambda_{max} = \min\begin{Bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۶} \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{Bmatrix} = \frac{۵}{۱۲}$$

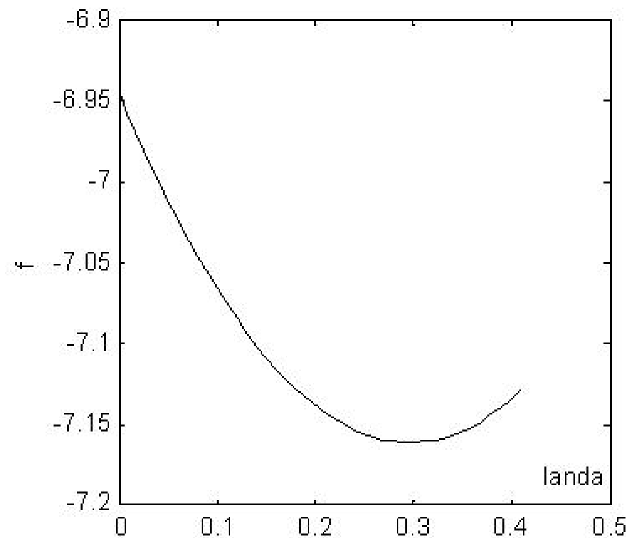
$$x_۲ + \lambda d_۲ = \begin{pmatrix} \frac{۵}{۶} \\ \\ \frac{۵}{۶} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ۱ \\ \\ \frac{-۱}{۵} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۵}{۶} + \lambda \\ \\ \frac{۵}{۶} - \frac{\lambda}{۵} \end{pmatrix}$$

$$f\ (x_۱ = \frac{۵}{٦} + \lambda\ \ , x_۲ = \frac{۵}{٦} - \frac{\lambda}{۵}) = -\frac{۱۲۵}{۱۸} - \frac{۲۲}{۵}\lambda + \frac{٦۲}{۲۵}\lambda^۲$$

حل مساله:

$$\min f(\lambda) = -\frac{۱۲۵}{۱۸} - \frac{۲۲}{۵}\lambda + \frac{٦۲}{۲۵}\lambda^۲$$

$$s.t. \quad ۰ \le \lambda \le \frac{۵}{۱۲}$$



مینیمم تابع = جواب بهینه مساله فوق

$$f'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{55}{186} = 0.296$$

این مقدار در محدودیت صدق می کند پس جواب بهینه مساله برنامه ریزی خطی فوق نیزمی باشد؛

$=\lambda_2 = \frac{55}{186}$, $\qquad x_3 = x_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{55}{186}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{pmatrix} \frac{35}{31} \\ \frac{24}{31} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} = \langle \begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{smallmatrix} \rangle$ ؛ محدودیت ۲به ازای $x_۳$ تساوی آور است، پس $I = \{2\}$ و $A_1 = (1 \;\; 5)$.

$\nabla f(x_۳) = (\frac{-۳۲}{۳۱}, -\frac{۱۶۰}{۳۱})'$

تکرار سوم $\qquad k = 2+1=3$

$$\min \nabla f\;(x_3)^t\;\mathbf{d}_3$$
$$A_1 d \le 0$$
$$-1 \le d_1 \le 1 \qquad -1 \le d_2 \le 1$$

با جایگذاری:

$$\min\begin{pmatrix} \frac{-32}{31} & \frac{-160}{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{-32}{31}d_1 \quad -\frac{160}{31}d_2$$
$$s.t.$$
$$(1 \quad 5)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \le 0$$
$$-1 \le d_1 \le 1$$
$$-1 \le d_2 \le 1$$

با حل این مساله خطی، جواب زیر را داریم:

$$d_k = d_3 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

توقف صورت می گیرد؛ زیرا

مقدار تابع هدف. = $\nabla f\;(x_k)^t d_k = \frac{-32}{31}(1) - \frac{160}{31}(\frac{-1}{5}) = 0$

$\mathbf{x_3} = \boldsymbol{x_2} + ۰.۲۹۶\mathbf{d_2} = \frac{۱}{۳۱}\begin{pmatrix} ۳۵ \\ ۲۴ \end{pmatrix}$ نقطه KKT این مساله است. جدول زیر خلاصه حل را نشان می دهد. تابع هدف محدب بوده و در واقع طبق بخش۴-۲-۵

(قضیه ۴-۵ برای شرایط کافی KKT در حالتی که محدودیت ها نامساوی اند) این جواب بهینه هم می باشد.

در ضمن تنها ضریب لاگرانژ متناظر با محدودیت $x_1+5x_2 \leq 5$ غیر صفر است. توضیح اینکه :ون توقفِ صورت گرفته، متغیرهای دوال(ثانویه) مساله اخیر ضرایب لاگرانژ را می‌دهد (بازارا ودیگران، ۲۰۰۸ ص ۵۴۳).

برای نوشتن ثانویه، مساله اخیر را چنین می نویسیم:

$$\min Z=\frac{-32}{31}d_1-\frac{160}{31}d_2$$

s.t.

$$-d_1-5d_2 \geq 0$$

$$-d_1 \geq -1$$

$$d_1 \geq -1$$

$$-d_2 \geq -1$$

$$d_2 \geq -1$$

دوگان(ثانویه) چنین است

$\max Z_Y = 0*y1-y2--y3-y4-y5;$

$-y1-y2+y3+0*y4+0*y5= -\frac{32}{31};$

$-5*y1+0*y2+0*y3-y4+y5= -\frac{160}{31};$

$y1, y2, y3, y4, y5 \geq 0$

حل این مساله با لینگو جواب $\frac{32}{31} =$ ۱.۰۳۲۲۵۸را برای y1 (یعنی متغیر اختصاص یافته به $d_1+5d_2 \leq 0$ که متناظر با $I=\{2\}$ است) و برای بقیه متغیرها مقدار صفر را می‌دهد. پس تنها ضریب لاگرانژ غیر صفر که مقدارش $\frac{32}{31}$ است، متناظر با دومین محدودیت یعنی $x1+5x2 \leq 5$ در مساله اصلی است (به نقل از بازارا و دگران۲۰۰۶،

ص۵۴۷). پس فقط اگر سمت راست محدودیت دوم(I={۲}) در مساله اصلی یعنی ۵ ≥x_1+5x_2 افزایش یابد تابع هدف مساله اصلی بهبود پیدا می‌کند.

جدول ۴-۱ خلاصه محاسبات روش زوتندیک برای مثال ۴-۲۱

(جدول ۱۰,۱ بازارا و دگران۲۰۰۶، ص۵۴۸)

		Search Direction				Line Search	
k	x_k, $f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	I	d_k	$\Delta f(x_k)^t d_k$	λ_{max}	λ_k
۱	(۰, ۰), ۰	(-۴, -۶)	{۳،۴}	(۱،۱)	-۱۰	[illegible]	
۲	$(\frac{۵}{۶}.\frac{۵}{۶})$, -۶. ۹۴	$(-\frac{۷}{۳}, -\frac{۱۳}{۳})$	{۲}	$(۱, \frac{۱}{۵})$		[illegible]	
۳	$(\frac{۳۵}{۳۱},\frac{۲۴}{۳۱})$, -۷,۱۶	$(-\frac{۳۲}{۳۱}, -\frac{۱۶۰}{۳۱})$	{۲}	$(۱,-\frac{۱}{۵})$	۰		

مقدار تابع هدف مساله اصلی($2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$) در این نقطه KKT یعنی نقطه $\frac{۱}{۳۱}(۳۵\ ۲۴)'$ برابر f(x) = -۷,۱۶۱۳ است پایان مثال ▲

شایان ذکر است روش زوتندیک برای برنامه ریزی غیرخطی با محدودیت‌های غیرخطی درمنابعی هم چون ص۵۵۰ بازارا و همکاران(۲۰۰۶) آمده است.

تمرینات روش حرکت در امتداد شدنی زوتندیک

۱-ابتدا یک نقطه اولیه با روش M بزرگ بدست آورده سپس مساله غیرخطی زیر را با روش زوتندیک حل کنید.

$$\text{Min} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

s.t.

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 \quad - 5 &\leq 0 \\
-x_1 - x_3 \quad &\geq 2 \\
-x_1 \quad + 1 &\leq 0 \\
- x_2 \quad + 2 &\leq 0 \\
- x_3 \quad &\leq 0
\end{aligned}$$

جواب: $x_1=1;x_2=2;x_3=0$.

راهنمایی: برای یافتن نقطه اولیه می توانید از عبارات زیر در محیط لینگو استفاده کنید.

دستورات لینگو برای یافتن نقطه اولیه برای این مساله با روش M بزرگ:

```
min=۱۰۰۰*R۳+۱۰۰۰*R۴;
۲*x۱+x۲+S۱=۵;
+x۱+x۳+S۲=۲;
x۱-S۳+R۳=۱;
x۲-S۴+R۴=۲;
```

۲-جواب مساله زیر را با نقطه شروع '(۰ ۱) با روش زوتندیک بیابید.

$$\begin{aligned}&\text{Min } -3x_1-5x_2+2x_1^2+x_2^2\\&\text{s.t.}\\&3x_1+2x_2 \quad -6\le 0\\&4x_1+x_2 \quad -4\le 0\\&x_1 \ \& \ x_2\ge 0\end{aligned}$$

۳-جواب مساله زیر را با روش زوتندیک هم با یک نقطه شروع شدنی دلخواه و هم پس از یافتن یک نقطه با فاز ۱ روش ۲ مرحله ای سیمپلکس بیابید.

$$\begin{aligned}&\text{Min } 3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-4x_1-3x_2-10x_3\\&\text{s.t.}\\&x_1+2x_2+x_3 \quad -8=0\\&2x_1-x_2 \quad \ge 1\\&x_1 \ \& \ x_2 \ \& \ x_3\ge 0\end{aligned}$$

جواب اولیه با ۲فاز'(۰ ۰ ۸) جواب نهایی '(۰ ۰ ۸)

۴-۵صلاحیت محدودیتی(صلاحیت قیدی) [1]

در یک مساله برنامه ریزی غیرخطی به فرم زیر

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&s.t.\quad g_i(x)\le 0 \qquad i=1,\dots,m\\&\qquad h_j(x)=0 \qquad j=1,2,\dots,\ell\\&\qquad x\in \underset{\text{Feasible Region}}{X}\subset R^n\end{aligned}$$

برای تضمین وجود ضرایب لاگرانژ درشروطKKT، لازم است توابع محدودیت‌ها ویژگی‌هایی داشته باشند که موسوم به صلاحیت محدودیتی یا شرط منظم بودن [2] است. به عبارت دیگر برای اینکه نقطه x^* در شروطKKT صدق کند، توابع محدودیت‌های

[1] Constraint Qualification =C.Q. بازارا(۲۰۰۶) ص۲۳۷ ، وینستون (۱۹۹٤) ص٦۹۹، آوریل (۱۹۷٦) ص۳۸،برت سکاس (۱۹۹۹)، ص۳۲۳

[2] Regularity Conditions

مساله باید شرطهای لازمی موسوم به صلاحیت محدودیتی را دارا باشند. علاوه بر صلاحیت های محدودیتی ارائه شده توسط کان تاکر (g_i, f $i \in I$ در نقطه شدنی $\mathbf{\bar{x}}$ مشتق پذیرو و g_i ها $i \notin I$ در نقطه $\bar{x}$ پیوسته، به علاوه $\nabla g_i(\bar{x})$ برای $i \in I$ و $\nabla h_j(\bar{x})$ $j=1,2,...$ بطور خطی مستقل) صلاحیت های محدودیتی دیگری هم ارائه شده است. از جمله صلاحیت های محدودیتی متداول برای مساله NLP فوق چنین است:

صلاحیت محدودیتی۱: اگر g_iوh_iها آفین باشند(یعنی به فرم خطی AX-bباشند) شرط دیگری لازم نیست.

صلاحیت محدودیتی۲: با فرض $I = \{i|g_i(\bar{x}) = 0\}$ درنقطه $\bar{x}$ هر g_i برای $i \in I$ سودوکنوکس بوده و هر g_i برای $i \notin I$ درنقطه $\bar{x}$ پیوسته و در مجموعه بازX یک $x \in X$ وجود داشته باشدکه $g_i(x) < 0$ برای‌تمام $i \in I$ (ص۲۴۳ بازارا و همکاران، ۲۰۰۶).

صلاحیت محدودیتی۳: نقطه شدنی$\bar{x}$، گرادیان محدودیت های تساوی آور و گرادیان محدودیت های تساوی استقلال مثبت خطی[1] داشته باشند. تعریف این نوع استقلال در برخی مراجع وهم چنین اینترنت آمده است.

مثال ۴-۲۲ (مبتنی بر رائو،۲۰۰۹ ص ۹۹) مسأله زیر را درنظر بگیرید.

$$\min Z = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$$
$$s.t.$$
$$g_1 : x_1^3 - 2x_2 \le 0$$
$$g_2 : x_1^3 + 2x_2 \le 0$$

جواب بهینه را به طور ترسیمی مشخص کنید. آیا صلاحیت محدودیتی و شرطهای KKT در نقطه بهینه ارضاء می شود یا نه؟.

حل

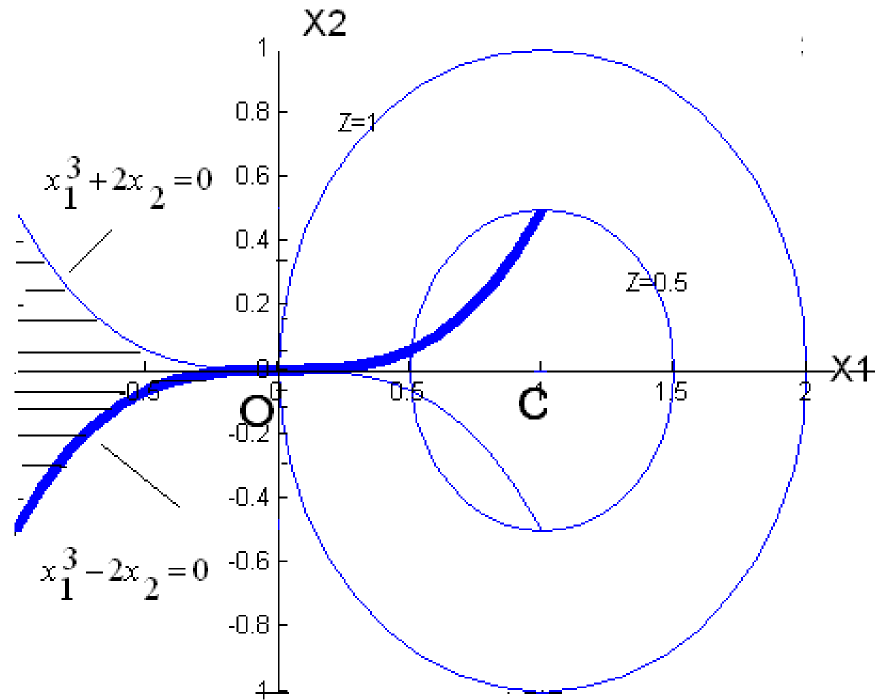
منحنی های محدودیتها با دستورات متلب زیر قابل رسم اند

```
<<x1=-1:.1:1;x2=.5*x1.^3; plot(x1,x2);hold on;x2=-
*x1.^3;plot(x1,x2)
```

ناحیه شدنی با هاشور مشخص شده است.

---

[1] Positive-linear independence



دستورمتلب رسم۲منحنی هم تراز تابع هدف[۱]

با Z=۰/۵ : دایره به مرکز (۱ و ۰)C با شعاع۰/۵:

```
hold on;r=۰,۵;   x=۱;   y=۰;   th = ۰:pi/۲۰:۲*pi;   xunit = r * cos(th) + x;
yunit = r * sin(th) + y;   plot(xunit, yunit);
```

با Z=۱ : دایره به مرکز ۱ و ۰ با شعاع۱ :

```
hold on;r=۱;   x=۱;   y=۰;   th = ۰:pi/۲۰:۲*pi;   xunit = r * cos(th) + x;
yunit = r * sin(th) + y;   plot(xunit, yunit);
```

---

[۱] با تابع متلب زیر هم می توان دایره رسم نمود:

```
function circle(x,y,r)
%x and y are the coordinates of the center of the circle
%r is the radius of the circle
%۰,۰۱ is the angle step, bigger values will draw the circle faster but
%you might notice imperfections (not very smooth)
ang=۰:۰,۰۱:۲*pi; xp=r*cos(ang);yp=r*sin(ang);
plot(x+xp,y+yp)
```

حل ترسیمی، X^* یعنی جواب بهینه این مدل کمینه سازی را مبدا بدست می دهد با $Z^* = ۱$.

از طرفی

$$.\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} ۳x_۱^۲ \\ -۲ \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} ۳x_۱^۲ \\ ۲ \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} ۲(x_۱ - ۱) \\ ۲x_۲ \end{pmatrix}$$

لذا واضح است که $\nabla g_1.(X^*) = \begin{pmatrix} ۰ \\ -۲ \end{pmatrix}$ و $\nabla g_2.(X^*) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \end{pmatrix}$ بطور خطی مستقل نیستند. لذا صلاحیت محدودیتی کان تاکر ارضاء نمی شود. حال ببینیم وضعیت شرایط KKT با این عدم ارضاء چگونه است. شرایط KKT(به غیر از محدودیت ها):

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=۱}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=۱}^{p} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) = ۰,$$
$$u_i[b_i - g_i(\bar{x})] = ۰ \qquad i = ۱,\dots,m$$
$$u_i \geq ۰ \qquad i = ۱,\dots,m$$

با توجه به اینکه

$$\nabla f(X^*) = \begin{Bmatrix} ۲(x_۱ - ۱) \\ ۲x_۲ \end{Bmatrix}_{(۰\ ۰)} = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

عبارت اول شرایط KKT چنین قابل نوشتن است

$$\nabla f(\overline{X^*}) + u_۱ \nabla g_۱(\overline{X^*}) + u_۲ \nabla g_۲(\overline{X^*}) = ۰ \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -۲ \\ ۰ \end{pmatrix} + u_۱ \begin{pmatrix} ۰ \\ -۲ \end{pmatrix} + u_۲ \begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \end{pmatrix} = ۰ \Longrightarrow$$

$$-2 + u_1(0) + u_2(0) = 0$$
$$0 + u_1(-2) + u_2(2) = 0$$

از آنجاکه معادله اول نمی‌تواند برقرار باشد، پس همواره لزوماً شرط های KKT در نقطه بهینه برقرار نیست. شایان ذکر است اگر مساله بیشینه سازی بود با وضعیت بیکران روبرو بودیم.پایان مثال ▲

چند صلاحیت محدودیتی مختلف دیگرعلاوه بر صلاحیت محدودیتی اولیه کان تاکر عبارتند از:

صلاحیت محدودیتی گیگنارد[۱]

صلاحیت محدودیتی مستقل خطی(LICQ)[۲]،

صلاحیت محدودیتی مانگاساریان و فروموویتز[۳]،

صلاحیت محدودیتی سلاتر[۴](ص ۲۴۳بازارا و بقیه،۲۰۰۶ و برت سکاس،۱۹۹۹ص ۳۲۵)،

صلاحیت محدودیتی کاتل[۵] (ص۲۴۴بازارا و همکاران ،۲۰۰۶)

شایان ذکر است که هنگامی که تمام محدودیتها اعم از تساوی و نامساوی، خطی باشند همواره صلاحیت محدودیتی یافرضیات منظم بودن ارضاء می‌شود(راتو،۲۰۰۹ ص۱۹۹)؛ در دیگر موارد ،بویژه هنگامی که برخی توابع محدودیت‌های غیرخطی بصورت تساوی و/یا محدودیت‌های نامساوی مقعر نیستند(از برت سکاس ،۱۹۹۹ص۳۲۳)، صلاحیت محدودیتی ممکن است ارضاء شود.

علاوه بر موارد فوق،اگر تمام توابع محدودیتهای نامساوی محدب باشند، تمام محدودیت های تساوی خطی باشند و لااقل یک جواب شدنی$\bar{x}$وجود داشته باشد که$g_i(\bar{x}) < ۰$ها و $h_j(\bar{x}) = ۰$ها باشد آنگاه صلاحیت محدودیتی ارضاء می شود (راتو،۲۰۰۹ ص۱۹۹):

۴–۵–۱ تعریف صلاحیت محدودیتی مرتبه اول مالگاساریان و موروویتز

فرض کنید نقطه $\bar{x}$ یک نقطه شدنی مسأله

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.t. \quad g_i(x) \le 0 \qquad i = 1,\dots,m \\ &\qquad\;\; h_j(x) = 0 \qquad j = 1,2,\dots,\ell \\ &\qquad\;\; x \in \underbrace{X}_{\text{Feasible Region}} \subset R^n \end{aligned}$$

---

[۱] Guignard Constraint Qualification(GCQ)

[۲] Linear Independence Constraint Qualification

[۳] Mangasarian Fromovitz constraint qualification

[۴] Slatter's constraint qualification

[۵] Cottle's constraint qualification

باشدکه در آن" $g_i : R^n \to R$ ها و h_i ها یکبار بطور پیوسته مشتق‌پذیرند[۱] اگر $j = 1, 2, \ldots, \ell$ $\nabla h_j(\bar{x})$ مستقل خطی باشند، با فرض‌های فوق در نقطه $\bar{x}$ ، می گوییم صلاحیت مرتبه اول برای محدودیت‌ها برقرار خواهد بودچنانچه یک بردار $(d \in R) \neq 0$ با شرایط زیر وجود داشته باشد

$$d^t \nabla g_i(\bar{x}) > 0 \qquad \forall i \in I = \{ i \mid g_i(\bar{x}) = 0 \}$$

$$d^t \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \qquad j = 1, \ldots, \ell$$

تعبیر:

d به هر منحنی که از نقطه $\bar{x}$ گذشته و در داخل ناحیه شدنی قرارگیرد مماس می‌شود.

شرایط فوق چنین هم نوشته می‌شود:

$$\nabla g_i(\bar{x})^t d > 0$$

$$\nabla h_j(\bar{x})^t d = 0$$

توجه: برای مسأله بیشینه سازی، درمجموعه I باید $d^t \nabla g_i(\bar{x}) < 0$ (آوریل،۱۹۷۶ص ۴۵).

در ادامه فصل، به روش هایی در بخش۴-۶ اشاره می شود که مساله محدودیت دار را به مساله بی محدودیت یا به مساله ای که محدودیت های ساده دارد تبدیل می‌کند. در عمل به علت پیچیدگی محاسبات یک دنباله از مسایل حل می‌شود.

۶-۴ الگوریتم های جریمه ای و مانعی(بازدارنده) [۲]

(ص ۴۷۰ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

از روشهای معروف در حل برنامه ریزی غیرخطی روشهای موسوم به جریمه ای و روشهای مانعی است. این روشها رویه هایی برای تبدیل مسایل بهینه سازی غیر خطی محدودیت دار به مسایل بی محدودیت ارائه می‌دهند. تکنیک های SUMT[۳] از جمله روشهای پیشتاز ارائه شده توسط فیباکو و مک کورمیک[۴] در ۱۹۶۸ در این زمینه است.

---

[۱] continuously differentiable

[۲] Penalty/ Barrier Methods

[۳] Sequential Uncostrained Minimization Techniques

[۴] Fibacco&McCormic

۴-۶-۱ روشهای جریمه ای

روشهای جریمه‌ای یک مساله محدودیت دار را به یک مساله یا یک دنباله از مسایل بی محدودیت تبدیل می‌کند. این تبدیل در این روشها با افزودن یک جمله به تابع هدف انجام می‌شود که باعث می‌گردد هزینه بالایی برای نقص محدودیت اعمال گردد. به عبارت دیگر تبدیل با قرار دادن محدودیت ها در تابع هدف از طریق یک پارامتر جریمه صورت میگیرد به طوریکه برای هرگونه نقض محدودیت جریمه‌ای منظور می‌شود. با اینکار سعی می‌گردد بهینگی حاصل شود. این روشها در خیلی از موارد از نقاط بیرونی غیر شدنی شروع کرده به سمت بهینگی پیش می‌روند.

در روش جریمه مساله Min f(x) مشروط بر محدودیت تساوی یگانه h(x)=۰ به صورت زیر در می آید.

$$\begin{aligned}&\text{Min } f(x)+\mu h^{۲}(x)\\&\text{s.t. } x \in R^n\end{aligned}$$

برای مینیمم شدن تابع هدف جدید،$h^{۲}(x)$ باید نزدیک به صفر شود که بدین ترتیب محدودیت ارضاء می‌شود.

اما برای مساله Min f(x) مشروط بر محدودیت یگانه $g(x) \le ۰$ کاری مشابه کار فوق مناسب نیست، اینکار $g(x)$را صفر می‌کندولی ما نمی‌خواهیم که $g(x)$ صرفاً صفر شود بلکه باید از صفر بیشتر نشود. یک تبدیل مناسب برای این مورد چنین است:

$$Min\, f(x) + \mu\{o, g(x)\}$$

یا

$$Min\, f(x) + \mu\{o, g(x)\}^{۲}$$

μ یک اسکالر است.

برای مساله کلی زیر

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&s.t.\quad g_i(x) \le 0 \qquad i = 1,\ldots,m\\&\qquad\;\; h_j(x) = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,\ell\end{aligned}$$

عموماً تابع جریمه α به صورت زیر است:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \phi[g_i(\mathbf{x})] + \sum_{i=1}^{\ell} \psi[h_i(\mathbf{x})].$$

ϕ, ψ توابع پیوسته با ویژگی خاص اند؛ موارد زیر به عنوان نمونه اند که در آنها p یک عدد صحیح و مثبت است(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص ۴۷۱)

$$\phi(y) = [\max\{0, y\}]^p$$

$$\psi(y) = |y|^p$$

تابع جریمه α به صورت زیر نیزیک تابع متداول می باشد:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, g_i(\mathbf{x})\}]^p + \sum_{i=1}^{\ell} |h_i(\mathbf{x})|^p.$$

۴-۶-۱-۱ خلاصه روشهای جریمه ای

(بازاراو همکاران ،۲۰۰۶ ص۴۸۴)

بواسطه مشکلات ناشی از پارامتر های بزرگ جریمه، بسیاری از الگوریتم هایی که از تابع جریمه استفاده می کنند دنباله ای از پارامتر های جریمه را به کار می گیرند و با جواب بهینه حاصل از پارامتر انتخاب شده قبلی آغاز می کنند. به این رویکرد گاه تکنیک کمینه سازی بی محدودیت ترتیبی با مخفف SUMT گفته می شود. ذیلاً خلاصه ای از روشهای جریمه ای برای حل مساله

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.t. \quad g_i(x) \le 0 \qquad i = 1,\dots,m \\ &\qquad\; h_j(x) = 0 \qquad j = 1,2,\dots,\ell \\ &\qquad\; x \in X \subset R^n \end{aligned}$$

بیان می شود. تابع جریمه α به فرم

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \phi[g_i(\mathbf{x})] + \sum_{i=1}^{\ell} \psi[h_i(\mathbf{x})],$$

است. این روشها محدودیتی به جز پیوستگی روی توابع مساله ندارندو موفقیت آنها به موجود بودن رویکردی کارا برای حل گام ۱ بستگی دارد.

گام آغازین

یک مقداراسکالر $\boldsymbol{\varepsilon} > ۰$ برای توقف، یک نقطه شروع اولیه $\mathbf{x_1}$ ، پارامتر جریمه $\boldsymbol{\mu_1}$ و یک مقدار اسکالر $\beta > ۰$ را برگزینید. k را برابر ۱ قرار داده به گام اصلی بروید.

گام اصلی

با شروع از $\mathbf{x_k}$ مساله زیر را حل کنید

$$\text{Min } f(x) + \mu_k \alpha(x)$$
$$\text{s.t. } x \epsilon X$$

جواب بهینه را $\mathbf{x_{K+1}}$ قرار داده به گام ۲ بروید.

اگر $\mu_k \alpha(x_{K+۱}) < ۰$ توقف کنید. در غیر این صورت $\mu_{K+۱}$ را برابر $\beta \times \mu_K$ و k را برابر $k+۱$ قرار داده به گام ۱ بروید

مثال ۴-۲۳

(بازاراو همکاران ،۲۰۰۶ ص۴۸۴)

مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Min } (x۱ - ۲)^۲ + (x۱ - ۲x۲)^۲$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_۱^۲ - x۲ = ۰$$
$$x \in X \equiv R^۲$$

توجه کنید در تکرار k ام برای پارامتر جریمه μ_k ، مساله ای که باید برای یافتن x_{μ_k} با استفاده از تابع کوادراتیک جریمه حل شود چنین است:

$$\text{Min } (x۱ - ۲)^۲ + (x۱ - ۲x_۲)^۲ + \mu_k (x_۱^۲ - x_۲)^۲$$

جدول ۴-۲ محاسبات روش جریمه را نشان می دهد و برآورد ضرایب لاگرانژ حاصل از روابط زیر(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص ۴۸۱ رابطه ۹،۶)

$$(\mathbf{u}_\mu)_i = 2\mu \max\{0, g_i(\mathbf{x}_\mu)\} \qquad \text{for all } i \in I$$

$$(\mathbf{v}_\mu)_i = 2\mu h_i(\mathbf{x}_\mu) \qquad \text{for all } i = 1, \ldots, \ell$$

نیر در جدول وارد شده است. البته در این مساله فقط محدودیت تساوی وجود دارد و لذا فقط v_{μ_k} در جدول داده شده است.

نقطه $x_۱^t = (۲/۰, ۱/۰)$ با مقدار تابع هدف صفر به عنوان نقطه شروع درنظر گرفته شده و مقدار اولیه پارامتر جریمه برابر $\mu_۱ = ۰/۱$ و مقدار β برابر ۱۰ قرار داده شد.

توجه کنید که در این الگوریتم تابعی با نماد $\theta(\mu_k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (بازارا و همکاران،۲۰۰۶ ص۴۷۶):

$$\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu \times \alpha(x_\mu)$$

توابع $\theta(\mu_k)$و $f(x_{\mu_k})$غیر نزولی و تابع $\alpha(x_{\mu_k})$ غیر صعودی است.

الگوریتم در تکرار چهارم که درآن مقدار $\alpha(x_{\mu_k})$ برابر۰/۰۰۰۲۶۷ می باشد می تواند پایان پذیرد. لکن برای نشان دادن واضح تر اینکه $\mu_k\alpha(x_{\mu_k})$ بر طبق یک قضیه به صفر نمی گراید (قضیه۹,۲,۲ مندرج در بازارا و همکاران ۲۰۰۶ ص۴۷۷)، یک تکرار دیگر انجام شده است. در نقطه x^t =(۰/۹۴۶۱۰۹۴, ۰/۸۹۳۴۴۱۴) خواننده می تواند تحقیق کند که شروط KKT با ضریب لاگرانژ برابر ۳/۳۶۳۲ برآورده می شود.

جدول ٤-٢ خلاصه محاسبات روش **جریمه** برای مثال ٤-٢٣

(جدول ۹,۱ بازارا ودیگران،۲۰۰٦ ص ٤٨٦)

k	μ_k	$x_{k+1} = x_{\mu_k}$	$f(x_{k+1})$	$\alpha(x_{\mu_k}) = h^2(x_{\mu_k})$	$\theta(\mu_k)$	$\mu_k\alpha(x_{\mu_k})$	v_{μ_k}
۱	۰/۱	(۱,٤٥۳۹،۰,٧٦۰٨)	۰,۰۹۳٥	۱. ٨۳۰٧	۰,۲٧٦٦	۰,۱٨۳۱	۰,۲٧۰٦۰٥
۲	۱	(۱,۱٦٨٧،۰,٧٤۰٧)	۰,٥٧٥۳	۰,۳۹۰٨	۰,۹٦٦۱	۰,۳۹۰٨	۱,۲٥۰۳۱۹
۳	۱۰	(۰,۹۹۰٦, ۰,٨٤۲٥)	۱,٥۲۰۳	۰,۰۱۹۲٦	۱,٧۱۲۹	۰,۱۹۲٦	۲,٧٧٥٧٦٧
٤	۱۰۰	(۰,۹٥۰٧, ۰,٨٨٧٥)	۱,٨۹۱٧	۰,۰۰۰۲٦٧	۱,۹۱٨٤	۰,۰۲٦٧	۳,۲٦٦۰۹٦
٥	۱۰۰۰	(۰,۹٤٦۱۰۹٤،۰,٨۹۳٤٤۱	۱,۹٤۰٥	۰,۰۰۰۰۰۲٨	۱,۹٤۳۳	۰,۰۰۲٨	۳,۳٦۳۲٥۲

۴-۶-۲ روشهای مانعی یا بازدارنده

روشهای مانعی به تابع هدف مساله که عموما محدودیت های نامساوی دارد یک جمله می‌افزاید. این جمله باعث می‌شود که نقطه اولیه شدنی در انجام عملیات به مرز محدودیت نامساوی نزدیک نشده و از ناحیه شدنی نیز خارج نگشته یعنی نشدنی شود. روشهای مانعی با نقطه ای در داخل ناحیه شدنی آغازشده و یک مقدارهزینه زیاد روی نقاط شدنی نزدیک مرز به نفع نقاط درونی قرار می‌دهد تا جواب از ناحیه شدنی بیرون نرود. لازم به ذکر است که برخی پژوهشگران روشهای مانعی را که از جواب درونی

(شدنی) شروع گشته و مانع میگردد تا این جواب غیر شدنی شود بر روش های جریمه ترجیح می‌دهند.

مساله زیر را که توابع آن پیوسته اند در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{Minf}(x)$$
$$\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}) \leq ۰ \quad i = ۱,۲,\dots,m$$
$$\boldsymbol{x}\epsilon X \subset R^n$$

X یک مجموعه غیرتهی در R^{n} است .

توجه کنید در مساله فوق یا محدودیت تساوی وجود ندارد یا اگر وجود داشته باشد در داخل مجموعهX است(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ ص۵۰۱). در اینجا نباید $h(x) = ۰$ به صورت دو محدودیت $h(x) \geq ۰$ و $h(x) \leq ۰$ در محدودیت ها گنجانده شود .

توابع مورد استفاده به عنوان مانع یا بازدارنده متفاوتند .از جمله آنها تابع بازدارنده لگاریتمی Frisch به صورت زیراست(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص۵۰۲)

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{i=۱}^{m} \ln\,[-g_i\,(\mathbf{x})].$$

چند تابع مانعی یا بازدارنده دیگر در مراجعی مثل بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص۵۰۲، نسترورف(۱۹۹۱) ص ۴۰ و آوریل(۱۹۷۶)ص۳۸۰ قابل رویت است.

۴-۶-۲-۲ خلاصه روش مانعی (تابع باز دارنده)

(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص۵۰۸)

ذیلاً رویه ای با استفاده از توابع مانعی(باز دارنده) برای بهینه سازی مساله

$$\boldsymbol{Minf}(x)$$
$$\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x}) \leq ۰ \quad i = ۱,۲,\dots,m$$
$$\boldsymbol{x}\epsilon X \subset R^n$$

ارائه می شود. تابع بازدارنده از نوع$B(x) = \sum_{i=۱}^{m} \phi[g_i(x)]$ است که درآنϕ تابعی تک متغیره پیوسته روی $\{y: y < ۰\}$ بوده و موارد زیر را ارضاء می کند.

$$\phi(y) \geq 0 \text{ if } y < 0 \quad \text{and} \quad \lim_{y \to 0^-} \phi(y) = \infty.$$

مساله مندرج در گام۱ زیر دارای محدودیت $g(x) < ۰$ است. اگر $g(x_k) < ۰$ ، از آنجا که هم چنانکه ناحیه $G = \langle x: g(x) < ۰ \rangle$ به مرز می رسد تابع بازدارنده به بی نهایت میل می کند، از $g(x) < ۰$ ممکن است صرفنظر گردد مشروط بر آنکه تکنیک بهینه سازی بی محدودیتِ مورد استفاده طوری باشد که تضمین نماید که نقطه بهینه $x_{k+۱}$ متعلق به ناحیه G باشد: ($x_{k+۱} \in G$). اما چون اکثر روش های جستجوی خطی از گامهای گسسته استفاده می کند، اگر ما نزدیک به مرزیم گام می تواند به نقطه ای خارج ناحیه شدنی منجر شود که در آن تابع بازدارنده B یک مقدار منفی قابل ملاحظه است. لذا اگر یک کنترل صریح و آشکار برای شدنی بودن انجام شود، با این مساله می‌توان به صورت مساله بهینه سازی بی محدودیت رفتار نمود.

گام آغارین

برای توقف، یک مقداراسکالر $۰ < \varepsilon$ ویک نقطه شروع اولیه $x_۱$ $(g(x_۱) < ۰)$ و $(x_۱ \epsilon X$، $\mu_۱ > ۰$ و یک مقدار β متعلق به فاصله صفر ویک برگزینید. k را برابر ۱ قرار داده به گام اصلی بروید.

گام اصلی

گام ۱

با شروع از نقطه x_k مساله زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{Minf(x) + \mu_k B(x)} \\ & \boldsymbol{g(x) < ۰} \\ & x \epsilon X \end{aligned}$$

$x_{k+۱}$ را برابر جواب بهینه مساله قرار داده و به گام ۲ بروید.

گام ۲

اگر $\mu_k B(x_{k+۱}) < \varepsilon$ متوقف شوید در غیر این صورت $\mu_{k+۱}$ را برابر $\mu_{k+۱} = \beta\mu_k$ و k را برابر $k+۱$ قرار داده به گام ۱ بروید

جهت آشنایی با روشهای بازدارنده به یک مثال ساده توجه کنید .در کتاب های غیرخطی مثال های مختلف و پیچیده وجود دارد.

مثال ۴-۲۴ (بازارا وهمکاران ،۲۰۰۶ ص۵۰۹)

مساله زیر را در نظر بگیرید و **با روش تابع بازدارنده** حل کنید

$$\text{Min } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$
$$\text{s.t. } x_1^2 - x_2 \leq 0$$
$$\boldsymbol{x} \in X = R^2$$

حل

از تابع $B(\mathbf{x})=\frac{-1}{x_1^2 - x_2}$ به عنوان تابع بازدارنده استفاده می شود. نتایج محاسبات در جدول ۴-۳ آمده است. همچنین ضرایب لاگرانژ که از رابطه زیر برآورد شده و در جدول وارد گشته است (به نقل از بازارا و دیگران، ۲۰۰۶ رابطه ۹,۳۵ص۵۰۷)

$$(\mathbf{u}_\mu)_i = \frac{\mu}{g_i(\mathbf{x}_\mu)^2} \to \bar{u}_i \quad \text{for all } i = 1,\ldots,m, \text{ as } \mu \to 0^+$$

در شروع μ_1=۱۰,۰ انتخاب، پارامتر β برابر ۰/۱ در نظر گرفته شده و کمینه سازی بدون محدودیت تابع $\theta(\mu_1)$:

$$\theta(\mu_k) = f\left(x_{\mu_k}\right) + \mu_k \times B\left(x_{\mu_k}\right) \quad k = 1$$

ازنقطه شدنی (۰,۱) آغازگردید. پس از ۶ تکرار به نقطه x_7^t=(۰/۹۴۳۸۹, ۰/۸۹۶۳۵) و $u_\mu = 3/3858$ دست یافتیم که در آن $\mu_1 B(x_7) = 0/0184$ و الگوریتم متوقف می‌شود. خوانندگان می‌توانند تحقیق کنند که این نقطه نزدیک به بهینه است. توجه کنید همانطور که در جدول هم دیده می‌شود $\theta(\mu_k)$ و $f(x_{\mu_k})$ توابعی غیر نزولی بر حسب μ_k بوده و $B(x_{\mu_k})$ تابعی غیرصعودی برحسب μ_k است. به علاوه ثابت می‌شود مقدار $\mu_k \times B(x_{\mu_k})$ به صفر می‌گراید (قضیه ۹.۴.۳ مندرج در بازارا و همکاران ۲۰۰۶ ص۵۰۵).

جدول ۴-۳ خلاصه محاسبات روش تابع بازدارنده (Barrier function) برای مثال۴-۲۴
(جدول۹,۲ بازارا ودیگران،۲۰۰۶ ص ۵۰۹)

k	μ_k	$x_{\mu_k}=x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$	$B(x_{k+1})$	$\theta(\mu_k) = f(x_{k+1}) + \mu_k B(x_{\mu_k})$	$\mu_k B(x_{\mu_k})$	u_{μ_k}
١	١٠,٠	[٠.٧٠٧٩ ; ١.٥٣١٥]	٨,٣٣٣٨	٠,٩٧٠٥	١٨,٠٣٨٨	٩,٧٠٥	٩,٤١٩٠٥١
٢	١,٠	[٠.٨٢٨٢ ; ١.١٠٩٨]	٣,٨٢١٤	٢,٣٥٩١	٦,١٨٠٥	٢,٣٥٩١	٥,٥٦٥٥٠٣
٣	٠,١	[٠.٨٩٨٩ ; ٠.٩٦٣٨]	٢,٥٢٨٢	٦,٤١٩٤	٣,١٧٠١	٠,٦٤١٩	٤,١٢٠٨١٥
٤	٠,٠١	[٠.٩٢٩٤ ; ٠.٩١٦٢]	٢,١٢٩١	١٩,٠٧٨٣	٢,٣١٩٩	٠,١٩٠٨	٣,٦٣٩٨١٨
٥	٠,٠٠١	[٠.٩٤٠٣ ; ٠.٩٠١١]	٢,٠٠٣٩	٥٩,٠٤٦١	٢,٠٦٢٩	٠٠٥٩٠	٣,٤٨٦٤٥٧
٦	٠,٠٠٠١	[٠.٩٤٣٨٩ ; ٠.٨٩٦٣٥]	١,٩٦٤٥	١٨٤,٤٤٥١	١,٩٨٢٩	٠,٠١٨٤	٣,٣٨٥٠٠٠

مثال۱,۲,۱۲ آوریل(۲۰۰۳) یا ص ۳۸۰ آوریل(۱۹۷۶) نیزقابل مطالعه است.

من انتظر بمعاجلة الفرصة مؤاجلة الاستقصاء سلبته الایام فرصته لان من شأن الایام السلب و السبیل الزمن الفوت .تحف العقلول

امام صادق (ع) :

هر که فرصت را به انتظار آینده مناسبتر از دست دهد روزگار فرصتش را برباید،

که رسم روزگار ربودن است و راه زمان از دست رفتن.

۵

مبحث دوگان در برنامه ریزی غیر خطی و کاربرد نقطه زینی تابع لاگرانژین در بهینگی



مبحث دوگان در برنامه ریزی غیر خطی – رابطه نقطه زینی تابع لاگرانژین با بهینگی

هدف فصل

مبحث دوگان مسایل غیر خطی و قضایای مربوطه دراین فصل مورد بحث قرار گرفته و شرط لازم بهینگی بدون فرض مشتق‌پذیری توابع هدف و محدودیت ها به صورت یک استفاده جنبی از قضایا برای طرح نقطه زینی تابع لاگرانژین در موضوع بهینگی ارائه می‌شود .بدست آوردن جواب مساله دوگان یک NLP نیز دراین فصل آمده است.

۵–۱ مقدمه

در برنامه ریزی غیر خطی همانند برنامه ریزی خطی مسأله ای بنام دوگان یا دوآل مطرح است به طوریکه همراه با هر مسأله غیرخطی یک مسأله دیگر که رابطه نزدیکی باهم دارند وجود دارد. مسأله اصلی را اولیه و مسأله دیگر را دوگان می‌نامند که نامهای ثانویه (مزدوج ، همزاد یا دوال هم خوانده می‌شود. در برنامه ریزی غیرخطی تحت شرایطی این دو مسأله مقادیر تابع هدف یکسان در حالت بهینه دارند. مسائل دوگان صورت‌های مختلف دارند نظیر دوگانِ ولف ، دوگانِJohri دوگانِ لاگرانژ؛ که از این میان مسأله دوگان لاگرانژ بیشترین توجه را به خود معطوف داشته وذیلاً شرح داده خواهد شد. در این بخش ضمن پرداختن به قضایای دوگان، به عنوان محصول جنبی قضایا،

شرط لازم بهینگی نقطه زینی بدون فرض مشتق‌پذیری توابع هدف و محدودیت بدست آورده می‌شود. قبل از پرداختن به اصل موضوع یک تعریف یاداوری می گردد

۵-۲ تعریف اینفیمم و سوپریمم

اینفیمم

منظورازاینفیمم یک مجموعه ازاعدادحقیقی(A) که با $inf(A)$ نشان داده می شود، بزرگترین کران پایین[1] مجموعه A است یا اینفیمم بزرگترین عدد حقیقی اسکالر α می‌باشد که:

$$\text{Inf}\{x|x\epsilon A\} = \alpha \leq x \qquad \forall x\epsilon A$$

پس $inf\ (A)$ بزرگترین عدد اسکالر α می باشد به طوری که $\alpha \leq x\epsilon A$ اگر چنین عددی موجود نباشد از علامت $inf = -\infty$ استفاده می‌شود(ص ۶۵۱ برت سکاس،۱۹۹۹).

توجه کنید

- اینفیمم همان مینیمم نیست ولی اگر مجموعه A مینیمم داشته باشد برابر آن است و برای هر مجموعه متناهی از اعداد حقیقی $A = \{x_1 ... x_n\}$:

$$\inf\ (A) = \min\{x_1 ... x_n\}$$

-بزرگترین کران پایین هر مجموعه مثل A ممکن است وجود نداشته باشد، اما اگر وجود داشته باشد منحصر به فرد بوده و اینفیمم A است.

سوپریمم

سوپریمم یک مجموعه از اعداد حقیقی(A) که با $sup(A)$ نشان داده می شود کوچکترین کران بالای [2] مجموعه A است. به عبارت ریاضی سوپریمم کوچکترین عدد حقیقی اسکالر α می‌باشد که: $\sup\{x|x\epsilon A\} = \alpha \geq x \qquad \forall x\epsilon A$.

---

[1] greatest lower bound

[2] least upper bound

قضیه۵-۱:

اگر اعداد حقیقی$A\subseteq R$ یک مجموعه غیرتهی کراندار از پایین باشد، آنگاه این مجموعه دارای بزرگترین کران پایین یعنی$\inf(A)$ است[۱]؛ درضمن هرمجموعه غبرتهی محدود از R ، کران بالا و پایین(سوپریمم واینفیمم) دارد[۲]. پایان قضیه■

چند مثال برای اینفیمم

$$inf\ \{1,2,3\}=1$$

$$inf\ \{x\in R:\ 0<x<1\}=0$$

$$inf\ \left\{(-1)^n+\frac{1}{n}:n\in N\right\}=-1$$

$$inf\ \left(A=\left\{\frac{1}{n}\quad n\in N\right\}\right)=0$$

برای فاصله باز $(0\quad 1)$ $\quad inf\ (0\quad 1)=\quad 0\neq \min\ (0\quad 1)$

برای فاصله نیم باز $[0\quad 1)$ $\quad inf\ [0\quad 1)=\quad 0=\min\ [0\quad 1)$

هر مجموعه غیرتهی از اعداد حقیقی دارای کران پایین (bounded) اینفیمم دارد.

۵-۳ دوگان(ثانویه) لاگرانژ[۳]

ضمن تذکر این مطلب که ثانویه هرگونه مساله برنامه ریزی یک مساله محدب است؛ همانطور که گفته شد از میان مساله های دوگان، مربوط برنامه ریزی غیر خطی مساله موسوم به دوگان لاگرانژ توضیح داده خواهد شد که در آن تابع هدف اینفیمم لاگرانژین مساله اولیه کمینه سازی است. مسأله بر نامه ریز ی غیر خطی اولیه زیر را در نظر بگیرید.

مسأله اولیه(مسأله P):

[۱] از راس(۱۹۸۰) ص۲۲

[۲] براساس اگزنر(۲۰۰۰) ص۱۷۳

[۳] Lagrangian duality formulation

$$\begin{array}{lll} Min\, f(\mathbf{x}) & & \text{Primal} \\ s.t. & & Min\, f(x_1....x_n) \\ \boldsymbol{g}(\mathbf{x}) \le 0 & \text{یا} & s.t. \quad g_i(\boldsymbol{x}) \le 0 \qquad i=1,....,m \\ h(\mathbf{x}) = 0 & & \quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i=1,....,\ell \\ \boldsymbol{x} \in X & & \boldsymbol{x} \in X \end{array}$$

$\mathbf{x}=(x_1...x_n)\in X$ بخشی از ناحیه شدنی است.

مقدار بهینه تابع هدف مدل مسأله P را با f^* نشان می‌دهیم. یاد آوری می‌گردد که لاگرانژین برای این مساله چنین تعریف می‌شود:

$$L=f(\mathbf{x})+u_1 g_1(\mathbf{x})+u_2 g_2(\mathbf{x})+..v_1 h_1(\mathbf{x})+v_2 h_2(\mathbf{x})+....$$

مسأله دوگان(ثانویه) لاگرانژ چنین است(مسألهD):

Lagrange's Dual

$$Max \quad \theta(u,v)$$

$$s.t. \quad u \ge 0$$

where

$$\theta(u,v)=\inf_{x\in X}\{L(\boldsymbol{x},u,v)\}$$

or

$$\theta(u,v)=\inf\left\{f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}u_i g_i(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{\ell}v_i h_i(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in X\right\}$$

مقدار بهینه تابع هدف این مدل را با θ^* نشان می دهیم.

توجه کنید

- تابع لاگرانژین تابعی از بردارهای $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ است اما $\theta(u,v)=\inf_{x\in X}\{L(x,u,v)\}$ تابعی خطی از$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ است. اجزای بردارهای $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ یعنی u_i, v_i ضرایب لاگرانژ یا متغیرهای دوآل نامیده می‌شود. $u_i \ge 0$ ولی v_i نامقید است یعنی $v_i \in R$

- یافتن مینیمم و اینفیمم لاگرانژین خود یک مساله است که گاه زیر مساله دوآل لاگرانژ[1] نامیده می شود و معادل مینیمم کردن تابع لاگرانژ روی x است و فقط به u,v وابسته است.

مثال ۵ -۱: مطلوبست دوگان مساله زیر

Primal اولیه

$$\begin{aligned}
&Min\, f(x) = (x-1)^2 \\
&s.t. \quad x^2 - 2 \le 0 \\
&\qquad 2(x-1) = 0 \\
&\qquad x \in X \equiv \{x \in R : |x| \le 2\}
\end{aligned}$$

فرمول ثانویه لاگرانژ مساله فوق چنین است:

Lagrange's Dual ثانویه لاگرانژ

$$\begin{aligned}
&Max \quad \theta(u,v) = \inf_{x \in X} \{L(x,u,v)\} = \\
&= \inf_{x \in X} \{(x-1)^2 + u(x^2-2) + v(2x-2) : |x| \le 2\} \\
&s.t. \\
&u \ge 0
\end{aligned}$$

مجموعه محدودیت مسأله دوال در واقع چنین است(ص ۳۶۰برت سکاس،۱۹۹۹)

$$Q = \{(u,v) \mid u \ge 0, \theta(u,v) > -\infty\}$$

پایان مثال ▲

در این جا توجه را به قضیه ای جلب می کنیم که در مبحث دوآل می تواند مورد استفاده قرار گیرد. اینفیمم در مسأله دوآل برای تمام u_i ,v_i به کمک این قضیه که

---

۱ برای درک تعبیر هندسی مساله دوگان به مراجعی نظیر ص ۲۵۹ بازارا(۲۰۰۶) مراجعه شود . در این مرجع مفهومی تحت عنوان پوش محدب(convex envelope) در ص۱۵۱ و ۷۳۶بازارا و دیگران (۲۰۰۶) نیز قابل مطالعه است.

موسوم به قضیه وایرشتراس است قابل تعیین است و در مراجعی هم چون برت سکاس(۱۹۹۹) ص ۶۵۴ و بازاراو همکاران (۲۰۰۶) ص ۴۸آمده است.

قضیه۵–۲(قضیه وایرشتراس [۱])

اگر Aیک زیر مجموعه غیر تهی از فضای nبعدی R^n و $f: A \longrightarrow R$در تمام نقاط A نیمه پیوسته از پایین[۲] بوده و یکی از ۳ شرط زیر بر قرارباشد(ص ۶۵۴ برت سکاس، ۱۹۹۹):

۱) مجموعه A فشرده است.

۲) مجموعه A بسته و تابع f چنان است که

$$\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$$

۳) عدد اسکالر c چنان موجود است که

مجموعه $\{x \in A \quad f(x) \le c\}$ غیر تهی و فشرده است.

آنگاه بردار $x \in A$ چنان وجود دارد که $f(x)= \inf_{Z\in A} f(z)$

متن قضیه از ص ۴۸ بازارا و همکاران(۲۰۰۶)

اگر A یک زیر مجموعه غیر تهی فشرده بوده $f: A \longrightarrow R$ در تمام نقاط A پیوسته باشد آنگاه مساله

$$\min\{f(x)\} \quad s.t. \ \ x \in A$$

که درآن A ناحیه شدنی است به مینیمم خود می‌رسد یعنی یک جواب مثل $\bar{x}$وجود دارد که در تمام نقاط $x \in A$ داریم. $f(\bar{x}) \le f(x)$ پایان قضیه■

مثال ۵–۲:

مسأله زیر را درنظر بگیرید (ص ۳۶۱برتسکاس،۱۹۹۹)

---

[۱] Weierstrass

[۲] تابع f را نیمه پیوسته از پایین(Lower semicontinuous) گویند اگر در یک نقطه مثل x_0 ,برای هر دنباله { $\{x_k\}$ همگرا به x_0, رابطه $f(x_0) \le \liminf_{k\to 0} f(x_k)$ بر قرار باشد.

$$\min f(x)$$
$$s.t. \quad x = 0$$

توجه کنید در مساله اولیه فوق محدودیت نامساوی نداریم و فقط یک محدودیت تساوی داریم(ناحیه شدنی آن محورعمودی است) لذا مساله ثانویه یافتن اینفیمم $f(x)+vx$ خواهد بود:

$$Max\ \theta(v) = \inf\{f(x)+vx\}$$

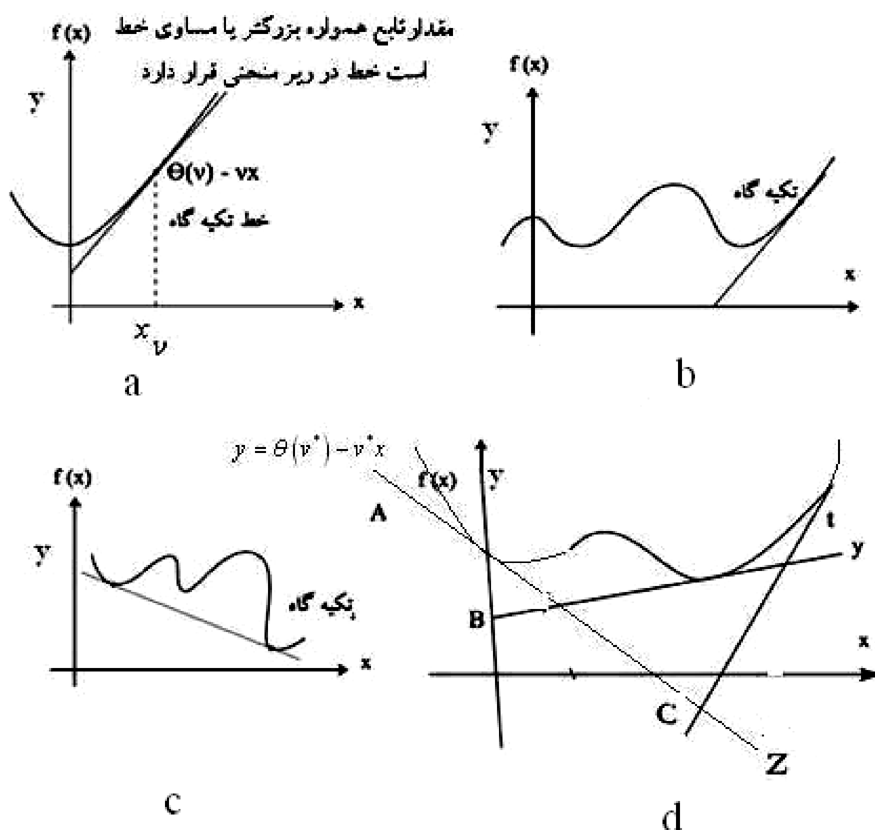
v آزاد در علامت است.

برای حل مساله ثانویه می‌گوییم می خواهیم مقدار v را چنان تعیین کنیم که تابع $\theta(v)$ماکزیمم شود

چون $\theta(v)$ برابر $\inf\{f(x)+vx\}$ است پس با توجه به تعریف اینفیمم

$$\forall x \quad f(x)+vx \geq \theta(v)$$
$$or \quad f(x) \geq \theta(v) - v * x$$

در اینجا می گوییم چون مقدار تابعf همواره بزرگتریا مساوی $\theta(v)-vx$ است پس به ازای یک مقدار مشخص v منحنی $\theta(v)-vx$ (در این مورد در واقع خطِ $y=\theta(v)-(v)\times(x)$) تکیه‌گاه تابعِ $f(x)$ است و باید یکطرف آن واقع شده و آنرا قطع نکند(شکل ۵-۱). طرف راست نامعادله یعنی $\theta(v)-vx$، نمایانگر یک خط در دستگاه مختصات x-y است با شیب v– و عرض ازمبدا $\theta(v)$. به ازای یک v داده شده نقطه تکیه‌گاه جائی است که مقدار تابع با مقدار خط برابر شود: $f(x)=\theta(v)-vx$ شکل ۵-۱ چند تابع و چند تکیه گاه را نشان می دهد. پس برای حل این مساله دوآل کافی است خطی به معادله $y=\theta(v)-(v)\times(x)$ بیابیم که در نامساوی $y \leq f(x)$ صدق کرده عرض از مبدا آن یعنی $\theta(v)$ ماکزیمم باشد.



شکل ۵-۱چند f(x)باتکیه گاه مربوط به مثال ۵-۲

درشکل ۵-۱ قسمت های a، b و c نشان می دهد که x حاصل از مساوی قرار دادن معادله خط و تابع، یعنی x حاصل از رابطه $f(x) = \theta(v) - vx$ ، در جایی اتفاق می‌افتد که خط بر منحنی مماس است. منحنی d ازشکل ۵-۱ نشان می دهد با تغییر v معادله خط تغییر می‌کند (معادله تکیه‌گاه تغییر می‌کند).

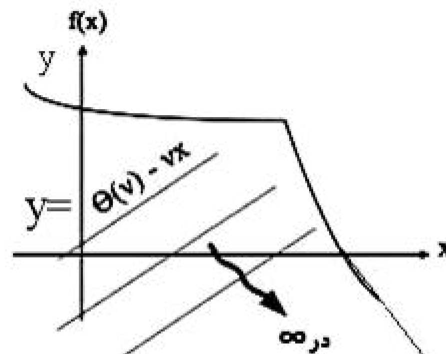
تکیه گاههای مختلف با تغییر شیب

در شکل ۵-۱-d فرض کنیددر شروع مقدار v انقدر باشد که خطAZ بدست آید وسپس با تغییرv خط را می لغزانیم تا به خطBy برسد که شیب کم داشته و مماس بر منحنی است.

حال اگر v را طوری تغییر تا خط به Ct برسد، اینجا دیگر تکیه‌گاه قابل لغزش نیست به عبارت دیگر اگر شیب را بیشتر کنیم منحنی را قطع خواهد کرد . در این جا عرض ازمبدا یعنی $\theta(v)$ مقدار منفی زیادی پیدا کرده است.

پس با تغییر v، می‌توان تکیه گاههای مختلف را بدست آورد ولی عرض از مبدا آنها یعنی $\theta(v)$ مربوطه از مقدار مثبت تا منفی تغییر می کند اما در جایی بینابین، تابع $\theta(v)$ به ازای یک مقدار خاص برای v مثل $\mathbf{v}^*$ حداکثر مقدار را پیدا می کند. که مقدار بهینه تابع هدف مساله دوگان فوق است به ازای $\mathbf{v}^*$ که جواب مساله دوگان است.

درشکل ۵-۲ بعلت شکل منحنی $f(x)$ ، خط با حرکت دادن نمی تواند در پایین منحنی قرار گیرد، در این صورت $\theta(v) = \inf_x \{f(x) + v \times x\}$ ، $-\infty$ می‌شود. انگار در $\theta(v) = -\infty$ خط در زیرمنحنی واقع می‌شود. پایان مثال ▲



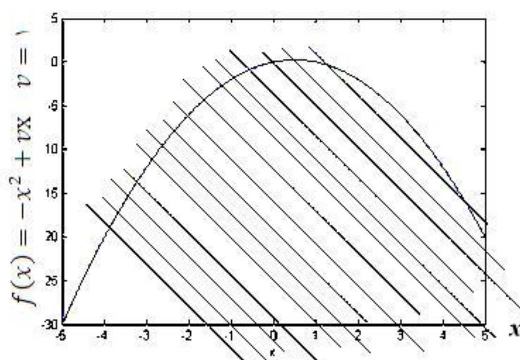
شکل۵-۲ منحنی بدون تکیه گاه

مثال ۵-۳:

فرض کنید درمثال۵-۲ ،تابع هدف به صورت $f(x) = -x^2$ باشدآنگاه به ازای هر مقدار v جواب $\theta(v) = \inf_X \left(-x^2 + vx\right)$ برابر منفی بینهایت است.

x بازه نامحدود دارد و به عنوان نمونه به ازای v=۱ تابع $-x^2 + vx$ درشکل ۵-۳ رسم شده است. اینفیمم این تابع $-\infty$ است:

$$v = 1 \qquad \inf\left(-x^2 + x\right) = -\infty$$



شکل ۵-۳ نمودار تابع $f(x) = -x^۲ + vx$ به ازای $v = ۱$

در اینجا تکیه‌گاه نداریم به عبارت دیگر، خطی بامعادله $y = \theta(v) - vx$ نمی توان یافت که همواره رابطه $\forall x \; f(x) \geq \theta(v) - vx$ برقرار باشد. به طور کلی هرگاه لاگرانژین از پایین نامحدود باشد $\theta(u, v)$ مقدار $-\infty$ را بخود می گیرد.

پایان مثال ▲

مثال ۵-۴ :

با توجه به مثال ۵-۲

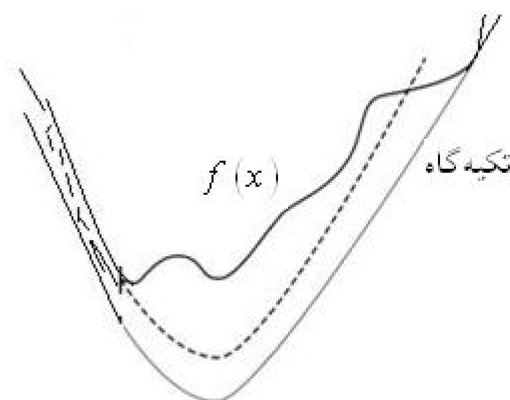
$$\theta(v) = \inf_x [f(x) + vx] \leq f(x) + vx \Rightarrow f(x) \geq \theta(v) - vx$$

فرض کنید $f(x) = -x$ آنگاه به ازای $v = 1$داریم:

$$v = ۱ \quad \theta(v) = \inf_x (f(x) + v \times x) = \inf(-x + ۱x) = \inf(۰) = ۰$$

پس در اینجا بازای v=۱،خط تکیه‌گاه دارای معادله $y = \theta(v) - x = 0 - x$ یا $y = -x$ شده ودقیقاً بر $f(x) = -x$ منطبق و خود f تکیه‌گاه می‌شود.

شایان ذکر است که نمودار تکیه‌گاه ممکن است شکل منحنی داشته باشد همانند شکل های ۵-۴.و ۵-۵. پایان مثال ▲



شکل ۵-۴ تکیه‌گاه به شکل منحنی

مثال ۵ -۵ :

مطلوبست دوآل مساله زیر

$$\min f(x)$$
$$s.t.$$
$$1+x^2 \le 0$$

حل:

دوآل مساله فوق چنین است:

$$Max\ \theta(u) = \inf_x \left\{ f(x) + u\left(1-x^2\right) \right\}$$
$$u \ge 0$$

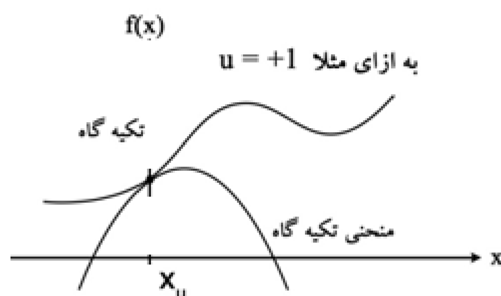
پس داریم

$$f(x) + u\left(1+x^2\right) \ge \theta(u) \qquad \forall x$$
$$f(x) \ge \theta(u) - u\left(1+x^2\right)$$

در اینجا شکل تکیه‌گاه $(y = \theta(u) - u(۱ + x^۲)$ به صورت منحنی است نه خط. این امر درشکل ۵-۵ که برای یک نمونه f ترسیم شده است دیده می شود. اگر در نقطه x_u دو طرف نامساوی باهم برابرباشند آنگاه:

$$f(x_u) = \theta(u) - u\left(1+x_u^2\right)$$

پایان مثال ▲



شکل ۵-۵ نمایش تکیه‌گاه منحنی در مثال ۵-۵

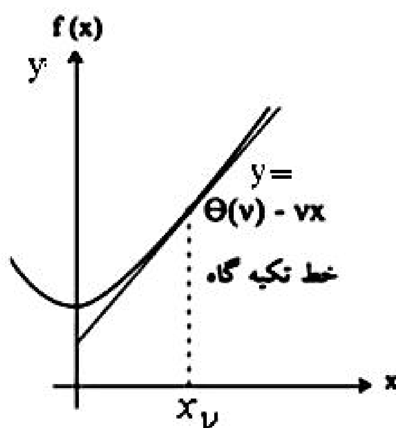
مثال ۵-۶ مطلوبست حل مساله زیر و حل ثانویه آن :

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t} \quad x = 0$$

حل اولیه: شکل ۵-۶ را در نظر بگیرید که برای مساله رسم شده است. محور عمودی ناحیه شدنی مساله است و $f^* = f(۰)$ ، $x^* = ۰$.

برای حل ثانویه که در مثال ۵-۲ بدست آمد چنین می گوییم:

با توجه به شکل ۵-۶ تکیه گاه تابع، خط $y = \theta(v) - (v) \times (x)$ است. با تغییر v در شکل زیر ماکزیمم $\theta(v)$ در کجا اتفاق می‌افتد؟



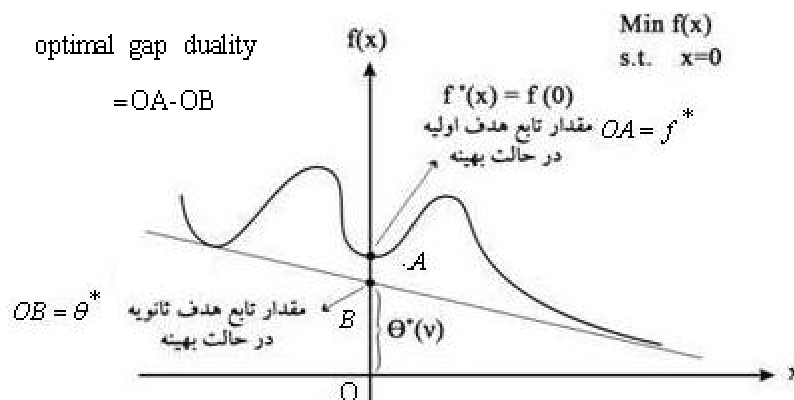
شکل ۵-۶ تکیه گاه مربوط به مثال ۵-۶

با نگاه به این شکل می توان دریافت با لغزاندن خط بیشترین عرض از مبدأ خط یعنی ماکزیمم $\theta(v)(=\theta^*)$ در محل تلاقی تابع f با محور عمودی اتفاق می‌افتد. f^*

یعنی مینیمم تابع$f(x)$ هم همانجا اتفاق می افتد لذا $\theta^* = f^*$. پس در حالت بهینه مقدار تابع هدف مساله اولیه فوق با مقدار تابع هدف ثانویه برابر است و این در جایی است که شیب تابع در نقطه x=۰ با شیب خط برابر می‌شود یعنی $f'(0) = -v$ یا $\nabla f(0) = -v$ پس در شکل ۵-۶ به ازای ضریب لاگرانژِ $v = -\overset{-f'(0)}{\nabla f(0)}$، مقدار $\theta(v)$ ماکزیمم می‌شود.

پایان مثال ▲

البته لزوما همواره در حالت بهینه مقدار تابع هدف مساله اولیه (f^*)، با مقدار تابع هدف مساله ثانویه (θ^*) برابر نیستند بلکه خواهید دیدکه همواره $\theta^* \leq f^*$. مثلا اگر شکل تابع $f(x)$ در مساله $\min f(x) \quad s.t. \quad x = 0$ به صورت شکل ۵-۷ باشد دو مقدار f^* وθ^* باهم برابر نخواهند بود و به اصطلاح شکاف دوگانگی[۱] خواهیم داشت. با توجه به اینکه نقاط مساله محورعمودی مجموعه ناحیه شدنی مساله اولیه است کمترین مقدار تابع $f(x)$ بطوری که در محدودیت $x = 0$ هم صدق کند در نقطه A اتفاق می‌افتد که برابر مقدار بهینه مساله است: $f^* = OA$. مقدار $f^* - \theta^*$ مقداربهینه شکاف دوگانگی[۲] است. که در شکل برابرمقدار $OA - OB$ است.



شکل ۵-۷ مقداربهینه شکاف دوگانگی

[۱] duality gap

[۲] optimal gap duality

مطلب زیر هم شایان ذکر است:

اگرداشته باشیم

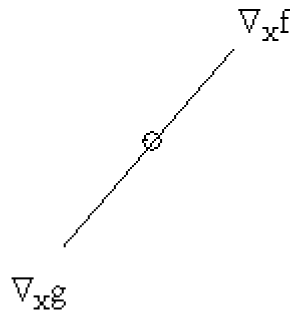
$$\min f(x)$$
$$s.t\ g(x) \le 0$$

ثانویه مساله $\max \theta(u) = \inf\{f(x) + ug(x)\}$ خواهد بود

$f(x)$و سطح تکیه گاه: $\theta(u) - ug(x),$ در نقطه‌ای مثل X_uباید مماس باشند یعنی

$$\nabla_X f(x)|_{x=x_u} = \nabla_X (\theta(u) - ug(x_u))_{x=x_u} \Rightarrow$$
$$\nabla_X f(x_u) = -u\nabla_X g(x_u)$$

پس با توجه به اینکه u غیر منفی است گرادیان f و گرادیان g در نقطه x_u خلاف جهت یکدیگرند(شکل ۵-۸).



شکل ۵-۸ مختلف الجهت بودن گرادیان های g, f در نقطه تماس.

مثال ۵-۷

مطلوبست ثانویه مساله زیر و حل هر ۲ مساله (بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص ۲۶۱)

$$\min f(x) = Z = x_1^2 + x_2^2$$
s.t
$$x_1 + x_2 - 4 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

با حل مساله به صورت ترسیمی یا با نرم افزار خواهیم داشت:

$f^* = Z^* = ۸ \qquad x_۱^* = x_۲^* = ۲$.

گرچه برای دوگان نویسی می‌توان قیود نامنفی را هم محدودیت بحساب آورد ولی اگر مجموعه X را چنین تعریف شود:

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0\}$$

پس از نوشتن محدودیت به فرم $-x_۱ - x_۲ + ۴ \leq ۰$ می‌توان دوگان را چنین نوشت

$$\max \quad \theta(u) = \inf_X \{x_1^2 + x_2^2 + u(-x_1 - x_2 + 4) : x_1, x_2 \geq 0\}$$

s.t.

$u \geq 0$

چون تابع تفکیک پذیراست پس

$$\max \ \theta(u) = \inf_X \{x_1^2 - ut_1 : x_1 \geq 0\} + \inf_X \{x_2^2 - ux_2 : x_2 \geq 0\} + 4u$$

s.t.

$u \geq 0$

یافتن اینفیمم:

زیر مساله دوگان چنین حل می‌شود:

مشتق هر ۲ تابع در $\frac{u}{۲}$ صفر می‌گردد پس توابع در $\frac{u}{۲}$ مینیممی برابر $\frac{u^۲}{۴} - \frac{u^۲}{۲}$ دارند

هر دو اینفیمم هم در $x_1 = x_2 = \dfrac{u}{2}$ اتفاق می‌افتد؛ پس:

$$\theta(u) = \inf_X \{\tfrac{u^2}{4} - u \times \tfrac{u}{2}\} + \inf_X \{\tfrac{u^2}{4} - u \times \tfrac{u}{2}\} + 4u$$

اینفیمم ($\frac{u^2}{4} - u \times \frac{u}{2}$)که یک عدد است، خودش می شودو

$$\theta(u) = \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{2} + 4u = \frac{-u^2}{2} + 4u$$

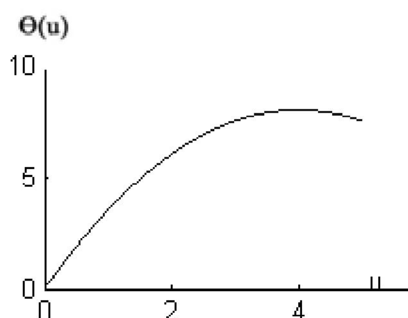
پس از ساده سازی، مساله دوگان چنین می شود:

$$\max \ \theta(u) = -\frac{1}{2}u^2 + 4u$$

s.t.

$u \geq 0$

شکل زیر منحنی $\theta(u)$ را بر حسب u نشان می دهد. ماکزیمم آن در $u=4$ اتفاق می افتد؛ پس جواب بهینه مساله دوال برابر $u^* = ۴$ با $\theta^* = ۸$ می باشد.

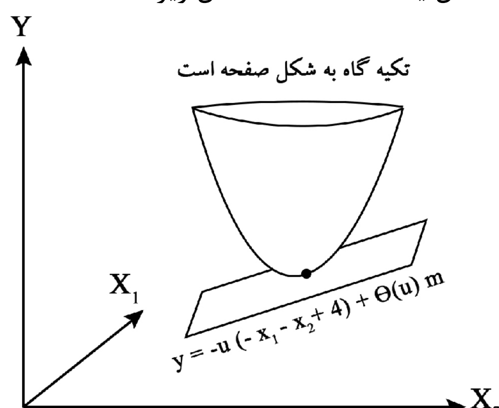


توجه کنید که در این مساله اولیه با مقدار بهینه تابع هدف ثانویه برابر شد واین به خاطر شروطی است که اگر برقرار باشد اتفاق می افتد ودریک قضیه (قضیه دوآلیتی قوی که بعد ازاین خواهد آمد) به آن اشاره خواهد شد. شایان ذکر است تعدادی الگوریتم برای حل دوآل وجود دارد. با یکی از آنها در همین فصل آشنا خواهید شد.

بررسی هندسی مساله دوال[۱]

سوال در اینجا سطح تکیه‌گاه (supporting) چیست؟

جواب تکیه‌گاه به شکل یک صفحه است(شکل زیر)



توضیح: چون $\theta(u)$ به صورت اینفیمم بود پس

[۱] از آقای دکتر امین امین راده برنده مدال طلای یکی المپیادهای جهانی ریاضی

$$\theta(u) \le f(x) + ug(x) = x_1^2 + x_2^2 + u(-x_1 - x_2 + 4) \Rightarrow$$
$$x_1^2 + x_2^2 \ge \theta(u) - u(-x_1 - x_2 + 4)$$

قبلا دیدیم $\theta(u) = -\frac{1}{2}u^2 + 4u$ ، پس به ازای یک مقدار خاصِ u، طرف راست نامعادله یعنی $y = \theta(u) - ug(x)$ یا

$$y = ux_1 + ux_2 - 4u + \theta(u) = ux_1 + ux_2 - 4u - \frac{1}{2}u^2 + 4u$$

که تکیه گاه راتشکیل می دهد نمایانگر یک صفحه در فضای ۳ بعدی با معادله $y = ux_1 + ux_2 - \frac{1}{2}u^2$ است. پایان مثال ▲

قضایای دوال[1]

قضیه ۵–۳ (قضیه دوآلیتی ضعیف)

اگر **x** یک جواب شدنی مساله زیر باشد(در $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le 0$ صدق کند)

$$\begin{aligned}
&\text{Problem} \quad P \\
&\min f(\mathbf{x}) \\
&\text{s.t.} \\
&g(\mathbf{x}) \le 0 \rightarrow g_i(\mathbf{x}) \le 0 \qquad i = 1, 2, .., m \\
&h(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow h_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1, 2, ...l \\
&\mathbf{x} \in X
\end{aligned}$$

هم چنین چنانچه بردارهای uو v جواب شدنی دوالِ مساله P یعنی مساله زیر باشد یعنی در محدودیت $u \ge 0$ صدق کند،

---

[1] مرجع: ص ۲۶۳ بازارا و دگران(۲۰۰۶)، ص ۱۱۴و۲۰۸ آوریل (۱۹۷۶)، ص۲۰۱،۳۶۵ ۲وریل(۲۰۰۳) ص ۴۸۵-۴۸۹ برت سکاس(۱۹۹۹)

Problem D

$$\text{Max} \quad \theta(u,v) = \inf\{f(\mathbf{x}) + u^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) + v^t \mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$$

s.t.

$u \geq 0$

آنگاه به ازای تمام x های شدنی: $f(x) \geq \theta(u,v)$.

پایان قضیه■ گفتنی است که این نامساوی به مین-ماکس هم معروف است.

کاربرد قضیه دوآلیتی ضعیف یا نا مساوی "مین ماکس"

چون برای هر مساله بهینه سازی, مساله دوگان یک مساله محدب است, با توجه به قضیه دوآلیتی ضعیف, حل مساله دوگان یک حد پایین برای مساله اولیه می دهد صرفنظر از میزان سختی آن. توجه شود که نقاط بهینه مسائل اولیه($\bar{\mathbf{x}}$) و ثانویه$(\bar{v}, \bar{u})$ هم همانند سایر نقاط شدنی در قضیه صدق می کند لذا

$f(\bar{x}) \geq \vartheta(\bar{u}, \bar{v})$ و $f^* \geq \theta^*$

بر طبق نا مساوی "مین ماکس" ،تابع هدف ثانویه یک کران پایین برای تابع هدف اولیه می تواند محسوب شود.

لم:

اگر$f(\bar{x}) = \theta(\bar{u}, \overline{v})$ و$\bar{x}$ متعلق به ناحیه شدنی مساله P باشد و $\bar{u} \geq ۰$ آنگاه $(\bar{x})$ جواب بهینه مساله اولیه و $(\bar{u}, \bar{v})$ جواب بهینه مساله ثانویه است. پایان لم■

تحت شرایطی که ۲ قضیه زیر بیان می‌کنند مقادیر بهینه توابع هدف مساله‌های اولیه وثانویه برابرند.

قضیه ۴-۵ (قضیه دوآلیتی قوی)

این قضیه بیان می کند در برنامه ریزی غیر خطی تحت شرایطی(مفروضات تحدبی مناسب و تحت یک نوع صلاحیت محدودیتی) مقادیر بهینه توابع هدف اولیه و ثانویه برابرند. این قضیه شرایط تساوی $\theta^* = f^*$ یا به عبارت دیگر شرایط صفر بودن شکاف دوگانگی را ذکر می‌کند. اگر درحالت بهینه مقدار شکاف دوگانگی صفر باشد می گوییم قضیه دوالیتی قوی برقرار است. این تساوی در کلیه مسایل برنامه ریزی غیرخطی صادق نیست و عموماً در مسایل محدب صدق می‌کند.

متن قضیه[1]

فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی محدب در R^n و توابع

$$f : R^n \to R$$

$$\mathbf{g} : R^n \to R^m \quad \text{or} \quad g_i : R^n \to R \quad i = 1, \dots, m$$

[در مجموعهX] محدب باشند.

و فرض کنید توابع

$$\mathbf{h} : R^n \to R^\ell \quad \text{or} \quad h_j : R^n \to R \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

توابعی آفین باشد یعنی به صورت $\mathbf{h}(x) = \mathbf{A}x - \mathbf{b}$ باشد(A یک ماتریس عددی و b یک بردار عددی است).

در ضمن فرض براین می‌نمائیم که صلاحیت محدودیت‌ها بصورت زیر صادق باشد: نقطه[شدنی] $\hat{x} \in X$ وجود دارد آن چنان که $g(\hat{x}) < 0$ (یعنی g_i ها در $\hat{\mathbf{x}}$ تساوی آور نیستند) و $h(\hat{x}) = 0$ و $o \in \operatorname{int} \mathbf{h}(X)$ صـــــفر [2] که درآن $\mathbf{h}(X) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$.

آنگاه: $\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \le 0, h(x) = 0\} = \sup\{\theta(u, v) : u \ge 0\}$

[یعنی مقادیر بهینه توابع هدف اولیه و ثانویه برابر بوده و شکاف دوگانگی نداریم] .

به علاوه اگر مقدار اینفیمم مقداری محدود باشد، آنگاه سوپریمم تابع θ یا $\sup\{\theta(u, v); u \ge 0\}$ در $(\bar{u}, \bar{v})$ با $\bar{u} \ge 0$ حاصل می‌شود.

هم چنین اگر نقطه $\bar{x}$ اینفیمم باشد آنگاه داریم: $u_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m$

(بازاراو همکاران،۲۰۰۶ص ۷۷۷). پایان قضیه ■

شایان ذکر است که انواع دیگری از شرایط صلاحیت محدودیتی هم وجود دارد. این قضیه نشان می دهد که تحت مفروضات تحدب و صلاحیت محدودیت مناسب, مقادیر بهینه توابع هدف مساله های اولیه و ثانویه یکسانند. البته اگر مفروضات تحدب بر قرار نباشد نمی توان گفت شکاف دوگانگی داریم. به عبارت دیگر برقرار نبودن مفروضات تحدب معادل وجود شکاف دوگانگی نیست.

---

[1] ص ۲۶۷ بازاراو همکاران(۲۰۰۶) ص ۲۰۸ ، ۱۹۴و۱۱۹آوریل(۱۹۷۶) ص ۵۱۴ برت سکاس(۱۹۹۹)

[2]

۵–۴ ارتباط نقطه زینی لاگرانژین و بهینگی[۱]

علاوه بر شرایط KKT برای بهینگی، شرایطی هم با استفاده از مفهوم نقطه زینی تابع لاگرانژین برای بهینگی ارائه شده است.

می‌توان نشان داد که در واقع شرط لازم و کافی برای وقوع ویژگی(inf=sup)در قضیه دوالیتی قوی، وجود نقطه زینی در تابع لاگرانژین است. که ذیلاً به آن می‌پردازیم. ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

۵–۴–۱ نقطه زینی تابع لاگرانژین

تعریف: مساله P را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Problem } P\\&\operatorname{Min} f(\mathbf{x})\\&\text{s.t.}\\&\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le 0\\&\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\\&\mathbf{x} \in X\end{aligned}$$

یک جواب مثل $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ نقطه زینی تابع لاگرانژین

$$L(x,u,v) = f(x) + u^t g(x) + v^t h(x)$$

نامیده می‌شود اگر $\bar{x} \in X$, $\bar{u} \ge 0$ و

$$L(\bar{x},u,v) \le L(\bar{x},\bar{u},\bar{v}) \le L(x,\bar{u},\bar{v}) \quad \forall x \in X, u \ge 0$$

(ص ۲۶۹ بازاراو همکاران،۲۰۰۶ ، ص ۲۰۸ آوریل،۱۹۷۶ و ص ۴۹۰ برت سکاس،۱۹۹۹)

قضیه زیر شرط نقطه زینی بودن جواب معادلات $\nabla L = 0$ را بیان کرده و نشان می دهد وجود نقطه زینی یک شرط لازم و کافی برای نبودِ شکاف دوگانگی می باشد. به عبارت دیگر اگر تابع لاگرانژین نقطه زینی داشته باشد, قضیه دوالیتی قوی برقرار و شکاف دوگانگی نداریم. بالعکس اگر در نقطه $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$قضیه دوالیتی قوی برقرار باشد این نقطه زینی است.

---

[۱] Saddle Point and optimality

قضیه ۵–۵ : شرط زینی بودن نقطه برای تابع لاگرانژین وکاربرد نقطه زینی در بهینگی[۱]

ص ۲۶۹ بازارا و همکاران(۲۰۰۶)

در تابع لاگرانژین مساله P یعنی

$$L(\mathbf{x},u,v)=f(x)+u^t\mathbf{g}(\mathbf{x})+v^t h(\mathbf{x})$$

نقطه $\bar{x},\bar{u},\bar{v}$ که در $\nabla L=0$ صدق می کند با شرط $\bar{u}\geq 0\ ,\ \bar{x}\in X$ یک نقطه زینی برای L محسوب می‌شود اگر وفقط اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

شرط ۱-

$$L(\bar{x},\bar{u},\bar{v})=\min\{L(x,\bar{u},\bar{v}):x\in X\}$$

توجه کنید:

$\bar{u},\bar{v}$ متغیر نیستند و $L(x,\bar{u},\bar{v})$ تابعی برحسب فقط x است.

این شرط یعنی مینیمم این تابع (مقدار تابع به ازای $x_{\min}$) برابر $L(\bar{x},\bar{u},\bar{v})$ است

شرط ۲- شرط شدنی بودن:

$$g(\bar{x})\leq 0\ ,\ h(\bar{x})=0$$

شرط ۳- شرط مکمل:

$$\begin{cases} u_i g_i(\bar{x})=0 \\ u_i\geq 0 \end{cases}$$

به علاوه $(\bar{x},\bar{u},\bar{v})$ یک نقطه زینی تابع لاگرانژین است اگر و فقط اگر $\bar{X}$ جواب بهینه مساله اولیه زیر

$$\begin{aligned} \text{Problem}\quad P \qquad & \min f(x) \\ & \text{s.t.} \\ & g(x)\leq 0 \\ & h(x)=0 \\ & x\in X \end{aligned}$$

---

[۱] Saddle point optimality & Absence of a duality gap

و $(\bar{u},\bar{v})$ جواب بهینه مساله ثانویه D یعنی

$$\text{Problem D} \quad \text{Max} \quad \theta(u,v)$$
$$\text{s.t} \quad u \geq 0$$

بوده و اختلافی بین دو مقدار بهینه مربوطه وجود نداشته باشد[۱] یعنی $f(\bar{x}) = \theta(\bar{u},\bar{v})$ یا $f^* = \theta^*$. پایان قضیه ■

۵–۴–۱–۱ اهمیت نقطه زینی تابع لاگرانژین (L)

این مطلب در قضیه فوق مشهود است که اگر ما موفق به یافتن نقطه زینی تابع لاگرانژین(L) مساله اولیه شویم جواب بهینه مساله غیر خطی اولیه را یافته‌ایم. در این رویکرد هیچ فرض مشتق‌پذیری برای تابع هدف و تابع‌های محدودیت ها در نظر گرفته نشده است.

استنتاج(corollary)

اگر X ,f, **g** محدب و $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - b$ به علاوه $0 \in \text{int}\,\mathbf{h}(X)$ صفر و نقطه‌ای مانند $\hat{x} \in X$ وجود داشته باشد که در آن نقطه $\mathbf{g}(\hat{x}) < 0$, $\mathbf{h}(\hat{x}) = 0$. حال اگر $\bar{x}$ یک جواب بهینه مساله P باشد بردار $(\bar{u},\bar{v})$ با $\bar{u} \geq 0$ وجود دارد بطوریکه $(\bar{x},\bar{u},\bar{v})$ یک نقطه زینی برای تابع لاگرانژین است. اثبات در بازارا و همکاران (۲۰۰۶) ص ۲۷۱ آمده است.

مثال ۵ –۸ :

الف) نقطه زینی مساله زیر را بیابید.

ب) آیا این نقطه شرایط بهینگی مندرج در قضیه **۵-۵** را ارضاء می‌کند؟

$$Min \quad x$$
$$\text{s.t.}$$
$$g: \; -\sqrt{x} + ۱ \geq ۰$$
$$x > ۰$$

---

[۱] Absence of duality gap

حل

الف) تابع لاگرانژین

$$L(x,u) = x + u\left(-\sqrt{x} + 1\right)$$

ساده‌ترین راه یافتن نقطه زینی صفر قراردادن گرادیان L (در این جا مشتقات نسبی تابع L نسبت به u,x)است:

$$\nabla L = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - u\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \\ 1 - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{x} = 1 \\ \bar{u} = 2 \end{matrix}$$

ب[1]:

بررسی شرط اول قضیه ۵-۵

$$L(\bar{x},\bar{u}) = 1 + 2(-1+1) = 1 \qquad L(x,\bar{u} = 2) = x - 2\sqrt{x} + 2$$

مینیمم تابع $L(x,\bar{u})$را با صفر قرار دادن مشتق تابع $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0\right)$ به دست می آوریم یعنی مینیمم در x=۱ اتفاق می‌افتدبا مقدار تابع $L(x=1,\bar{u}=2)=1$ که برابر $L(\bar{x},\bar{u}) = 1$ است. پس $L(\bar{x},\bar{u}) = \min L(x,\bar{u})$.

شرط دوم قضیه شدنی بودن است: این نقطه($\bar{x} = ۱$) در محدودیت ها صدق می‌کند:

$۱ - \sqrt{\bar{x}} = ۱ - ۱ \leq ۰$

$\bar{x} = ۱ > ۰$

بررسی شرط سوم قضیه: آیا $\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$ ؟

$$\bar{u}\left(-\sqrt{\bar{x}} + 1\right) = 0 \qquad (2)(-1+1) = 0$$

پس نقطه $\bar{u} = 2$, $\bar{x} = 1$ نقطه زینی تابع لاگرانژین مربوط به مساله اولیه بوده ودر نتیجه شکاف دوگانگی وجود ندارد. پایان مثال ▲

[1] از مهندس هادیان دانش آموخته ارشد دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

درمثال زیر بررسی می شودکه آیا یک نقطه حائز شرایط KKT، در شرایط بهینگی نقطه زینی صدق می‌کند یا خیر.

مثال ۵ -۹:[۱] آیا نقطه $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 = -1 \\ \bar{x}_2 = -1 \end{pmatrix}$، که در مثال ۴-۳ امکان بهینه بودن آن قبلاً برای مساله زیر

$$\min \; x_1 + x_2$$
$$s.t. \;\; x_1^2 + x_2^2 = 2$$
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \; \text{نقطه} \; KKT$$

ازطریق یک قضیه در مبحث ضرایب لاگرانژ بررسی شده و ضریب لاگرانژ برابر $\frac{۱}{۲}$ بدست آمده بود، شرایط قضیه نقطه زینی را ارضاء می کند؟

حل

بررسی شرط **اول** قضیه ۵-۵

آیا نقطه جواب $\bar{x} = (-۱ \;\; -۱)^t$ ، $\bar{v}_1 = \frac{۱}{۲}$ در شرط

$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = \min\{L(x, \bar{u}, \bar{v}) : x \in X\}$ صدق می کند؟

مینیمم تابع لاگرانژین را، یعنی تابع $L(x, \bar{v}_1)$ را ، با صفر قرار داشتن گرادیان تابع به دست می آوریم:

$$L(x, \bar{v}_1) = x_1 + x_2 + \bar{v}_1(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 1 + 2\bar{v}_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-1}{2\bar{v}_1} \quad (\text{II}) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 1 + 2\bar{v}_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-1}{2\bar{v}_1} \end{cases}\right\} \overset{\bar{v}_1 = 0.5}{\Rightarrow} x_1 = x_2 = -1 \quad (\text{I})$$

$$\min\{L(x, \bar{v}_1)\} = -1 + -1 + \tfrac{1}{2}(1^2 + 1^2 - 2) = -2$$

[۱] از خانم مهندس نسرین عامری دانش آموخته کار شناسی و ارشد دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

$$L(\overline{x},\overline{v}_1)=\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{v}_1(\overline{x}_1^{\,2}+\overline{x}_2^{\,2}-2),\quad \begin{pmatrix}\overline{x}_1=-1\\ \overline{x}_2=-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$L(\overline{x},\overline{v}_1)=-1+-1+\overline{v}_1(1+1-2)=-2$$

شرط اول برقرار است.

۲- بررسی شرط دوم (شرط شدنی بودن):

$$g(\overline{x})\le 0\ ,\ h(\overline{x})=0$$

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}-2=0\Rightarrow(-1)^2+(-1)^2-2=0\Rightarrow h(\overline{x})=0$$

بنابراین شرط دوم هم برقرار است.

شرط سوم(شرط مکمل) اینجا مورد ندارد زیرا محدودیت نامساوی نداشتیم .

پس نقطه جواب $\overline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\overline{v}_1=0.5$ یک نقطه زینی برای تابع لاگرانژین مساله اولیه محسوب می شود و شکاف دوگانگی نداریم. و در ضمن نقطه $\overline{X}$=(-۱ -۱)' جواب بهینه مساله اولیه یعنی

$$\min\ x_1+x_2$$
$$s.t.\ \ x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=2$$

و $\overline{v}=\frac{1}{2}$جواب بهینه مساله ثانویه مربوطه است. پایان مثال ▲

دوگان مساله کوادراتیک

جهت بیان یک قضیه دیگر مساله های غیرخطیPQP,DQP را در زیردرنظر بگیرید:

$$(PQP)\qquad Min\, f(x)=d+\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^tQ\boldsymbol{x}$$

$$s.t.\qquad A^tx\ge\boldsymbol{b}\qquad\qquad Q:\ n\times n$$

که در آن

A یک ماتریس حقیقی $n\times m$ با رتبه m

b یک بردار حقیقی: $b\in R^m$

$\boldsymbol{c}$ یک بردار حقیقی: $c\in R^n$

d یک عدد اسکالر

Q یک ماتریس حقیقی متقارن $n\times n$

$\boldsymbol{x}$ یک بردارشامل n متغیر

مساله PQP یک مساله از نوع موسوم به کوادراتیک است (ص ۱۸۵ آوریل،۱۹۷۶).

$$(DQP) \qquad Max\ \theta(u,v) = d + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^t Q^{-1}\boldsymbol{v}$$

$s.t.$

$$Au - v = \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{u} \geq 0$$

که درآن

$\boldsymbol{v}$ یک بردار ستونیn متغیره؛ بجای $\boldsymbol{v}$ درتابع هدف $v = Au - \boldsymbol{c}$ می‌تواند قرار گیرد.

$\boldsymbol{u}$ یک بردار ستونی شامل m متغیر

$\boldsymbol{c}$ یک بردار ستونی اسکالر

$\boldsymbol{b}^t$ ترا تهاده بردار $\boldsymbol{b}$

مساله غیرخطی PQP یک مساله از نوع موسوم به کوادراتیک است. مساله DQP غیرخطی و دوگان مساله اولیه PQP است(ص۱۸۷ آوریل،۱۹۷۶).

مثال ۵-۱۰

در مساله DQP، d برا بر ۵ و $c^t = (-۲ \quad ۱)$ ، $A = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ و $Q = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$ و$b^t = (۱ \quad ۵)$ می باشد مسایل اولیه و ثانویه را بنویسید

حل

مساله اولیه چنین است:

$$\text{Min } f(x) = ۵ + (-۲ \quad ۱)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۲}(x_۱ \quad x_۲)\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} =$$

$x_۱^۲ + x_۲^۲ - x_۱x_۲ - ۲x_۱ + x_۲ + ۵$

s.t.

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} ۱ \\ ۵ \end{pmatrix}$$

مساله دوگان:

$$Q^{-۱} = \text{inv(Q)} = \begin{pmatrix} ۰.۶۶۶۷ & ۰.۳۳۳۳ \\ ۰.۳۳۳۳ & ۰.۶۶۶۷ \end{pmatrix}$$

$$\text{Max} \quad \theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ۵ + (۱ \quad ۵)\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۲}(v_۱ \quad v_۲)\begin{pmatrix} ۰.۶۶۶۷ & ۰.۳۳۳۳ \\ ۰.۳۳۳۳ & ۰.۶۶۶۷ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{pmatrix}$$

$$s.t.$$

$$\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$u_۱, u_۲ \geq ۰$$

یا با قرار دادن $\begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$ در تابع هدف داریم:

$$\text{Max} \quad \theta(\mathbf{u}) =$$

$$۵ + (۱ \quad ۵)\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۲}\left(\left[\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}\right]\right)^t \begin{pmatrix} ۰.۶۶۶۷ & ۰.۳۳۳۳ \\ ۰.۳۳۳۳ & ۰.۶۶۶۷ \end{pmatrix}\left(\left[\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}\right]\right)$$

$$s.t.$$

$$u_۱, u_۲ \geq ۰$$

قضیه۵-۶ (قسمتی از قضیه ۴-۷ ص ۱۸۸ آوریل،۱۹۷۶)

مسایل DQP, PQP فوق را در نظر بگیرید؛ اگر (x^*, u^*) نقطه زینی تابع لاگرانژین L مساله PQP، که مطابق زیر برای هر $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{u} \geq ۰$ داده شده، باشد:

$$L(x,u) = d + \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} + \tfrac{۱}{۲}\boldsymbol{x}^tQ\boldsymbol{x} - \textstyle\sum_{i=۱}^{m} \boldsymbol{u}_i\,[(\mathbf{a}_i)^t\boldsymbol{x} - b_i]$$

(رابطه ۴-۷ آوریل،۱۹۷۶)

که درآن

$\mathbf{a}_i$ ستون i ام ماتریس A

b_i عنصر i ام بردار **b**

آنگاه x^* یک جواب بهینه مساله PQP و u^* یک جواب بهینه مساله DQP بوده و به علاوه

$$f(x^*) = L(x^*, u^*) = \theta(u^*, v^*)$$

به طوری که مقدار $v = v^*$ در رابطه زیرصدق می‌کند (رابطه۲۱-۷ آوریل، ۱۹۷۶ ص ۱۸۷)::

$$Au - v = c$$

پایان قضیه■

توجه کنیدکه

$L(x,u)$ داده شده در قضیه فوق همان $L(x,u) = f(x) + \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{g}(x)$ برای مساله P بدون محدودیت تساوی است. به عبارت دیگر $L(x,u)$ حاصل از این رابطه برای مسأله اولیه با $L(x,u)$ داده شده در قضیه ۵-۶ یکی است.[۱]

مثال ۵-۱۱مطلوبست بررسی قضیه ۵-۶ با مثال ۵-۱۰.

حل

$$\min f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1+x_2+5$$
s.t.
$$3x_1+3x_2 \geq 1$$
$$-x_1+x_2 \geq 5$$
$$L(x,u) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{u}_i\,[(\mathbf{a}_i)^t \boldsymbol{x} - b_i]$$
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$L(x,u) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 5 - u_1[(\mathbf{a}_1)^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1] - u_2[(\mathbf{a}_2)^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 5]$$
$$L(x,u) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 5 - u_1[(3 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1]$$
$$- u_2[(-1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 5]$$
$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 5 - u_1(3x_1 + 3x_2 - 1) - u_2(-x_1 + x_2 - 5)$$

یافتن نقطه زینی تابع $L(x,u)$:

یک شرط زینی بودن نقطه برای تابع L، صدق نقطه در $\nabla L = 0$ است.

---

[۱] -این قضیه عکس هم دارد .عکس قضیه ۵-۶ (بر اساس ص ۳۲۷ پی دی اف آوریل،۲۰۰۳)

اگرمساله PQP، پایدارا (stable) باشد و x^* یک جواب بهینه آن باشد آنگاه یک بردار u^* وجود دارد به طوری که (x^*,u^*) نقطه زینی تابع لاگرانژین L می باشد و

اگر مساله DQP ، پایدار باشد و u^* یک جواب بهینه آن باشد آنگاه یک بردار x^* وجود دارد به طوری که (x^*,u^*) نقطه زینی L می باشد.

تعریف مساله پایدار در قضیه ۵-۲۰ ص ۲۲۵ آوریل(۲۰۰۳)مده است. اجمالاً اینکه درمسائلی که پایدارند، توابع آنها بینهایت نمی شوند.

$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 5 - u_1(3x_1 + 3x_2 - 1) - u_2(-x_1 + x_2 - 5)$

همانطور که در زیر می بینید با قرار دادن $\nabla L = 0$ جوابها چنین است:

$\bar{x}_1 = \frac{-7}{3} \quad \bar{x}_2 = \frac{8}{3} \quad \bar{u}_1 = \frac{-1}{15} \quad \bar{u}_2 = \frac{97}{15}$

$$\nabla L = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2x_1 - 2 - 3u_1 + u_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 - 3u_1 - u_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow 3x_1 + 3x_2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow -x_1 + x_2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$u_1, u_2 \geq 0$

جواب[1] دستگاه چنین است:(از سایتwww.wolframalpha.com)

$x_1 = \frac{-7}{3} \quad x_2 = \frac{8}{3} \quad u_1 = \frac{-1}{15} \quad u_2 = \frac{97}{15}$

بررسی و تحقیق زینی بودن و شکاف دوگانگی

برای بررسی اینکه آیا جواب حاصل از $\nabla L = 0$ نقطه زینی است یا نه، توجه کنید اگر این نقطه جواب در قضیه ۵-۵ صدق کند زینی بوده در نتیجه شکاف دو گانگی نداریم و اگر در آن صدق نکند، تابع L نقطه زینی نداشته و در نتیجه شکاف دوگانگی داریم؛ یعنی جواب بهینه توابع هدف اولیه و دوگان برابر نمی‌باشد.

---

[1] حل با متلب: با دادن ماتریس A و بردارطرف راست و انجام دستور inv(A)*b

```
>> A=[...
۲ ۰ -۳ ۱
۰ ۲ -۳ -۱
۳ ۳ ۰ ۰
-۱ ۱ ۰ ۰];
>> b=[...
۲
-۱
۱
۵];
>> inv(A)*b
```

بررسی شرط اول قضیه ۵-۵

$$L(\bar{x},\bar{u},\bar{v}) = \min\{L(x,\bar{u},\bar{v}) : x \in X\}$$

$$L(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) =$$

$$\left(\frac{-۷}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{۸}{۳}\right)^{۲} - ۲\left(\frac{-۷}{۳}\right) + \left(\frac{۸}{۳}\right) + ۵ - \frac{-۱}{۱۵}\left(۳\left(\frac{-۷}{۳}\right) + ۳\left(\frac{۸}{۳}\right) - ۱\right) - \frac{۹۷}{۱۵}\left(-\left(\frac{-۷}{۳}\right) + \left(\frac{۸}{۳}\right) - ۵\right) \Longrightarrow$$

با متلب:

(-۷/۳)^۲+(۸/۳)^۲-۲*(-۷/۳)+(۸/۳)+۵-(-۱/۱۵)* (۳*(-۷/۳)+۳*(۸/۳)-۱) - (۹۷/۱۵)*(-(-۷/۳)+(۸/۳)-۵)=

$$L(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) = ۲۴{,}۸۸۸۹$$

$$= \min\{L(x,\bar{u},\bar{v}) : x \in X\} = ????$$

$$L(\mathbf{x},\bar{\mathbf{u}}) =$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲x_۱ + x_۲ + ۵ - \frac{-۱}{۱۵}\left(۳x_۱ + ۳x_۲ - ۱\right) - \frac{۹۷}{۱۵}\left(-x_۱ + x_۲ - ۵\right)$$

با صفر قرار دادن مشتقات نسبی:

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۲ + ۳\frac{x_۱}{۱۵} + \frac{۹۷}{۱۵} = ۰ \\ ۲x_۲ + ۱ + ۳\frac{x_۱}{۱۵} - \frac{۹۷}{۱۵} = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x_۱ = -\frac{۶۷}{۳۳} \quad x_۲ = \frac{۸۲}{۳۳}$$

$minL = ?$

=x۱^۲+x۲^۲-۲* x۱+x۲+۵-(-$\frac{۱}{۱۵}$)*(۳* x۱+۳*x۲-۱)- ($\frac{۹۷}{۱۵}$)* (-x۱+ x۲-۵)=۲۵,۰۰۱۷

طرفین رابطه مربوط به شرط اول قضیه ۵-۵ یعنی

$$L(\bar{x},\bar{u},\bar{v}) = \min\{L(x,\bar{u},\bar{v}) : x \in X\}$$

مساوی نیستند. پس شرط ۱ برقرار نیست.

لذا نقطه فوق زینی نیست و L نقطه زینی ندارد. گرچه لازم نیست ۲ شرط دیگر بررسی شود اما جهت آشنایی، نحوه محاسبه انجام می شود.

شرط ۲ قضیه ۵-۵ : نقطه $x_۲ = \frac{۸}{۳}$ $x_۱ = \frac{-۷}{۳}$ شدنی است:

$$۳x_۱ + ۳x_۲ \geq ۱\ ,\ -x_۱ + x_۲ \geq ۵\ ,\ ۳ \times \frac{-۷}{۳} + ۳ \times \frac{۸}{۳} = ۱\ \ ,-\frac{-۷}{۳} + \frac{۸}{۳} = ۵$$

شرط ۳ قضیه ۵-۵ :

$$\begin{cases} u_i g_i(\bar{x}) = 0 & i = 1,2 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$i = ۱ \qquad \bar{u}_۱(۳\bar{x}_۱ + ۳\bar{x}_۲ - ۱) = \frac{-۱}{۱۵}\left(۳ \times \frac{-۷}{۳} + ۳ \times \frac{۸}{۳} - ۱\right) = ۰$$

$$i = ۲ \qquad \bar{u}_۲(-\bar{x}_۱ + \bar{x}_۲ - ۵) = \frac{۹۷}{۱۵}\left(\frac{۷}{۳} + \frac{۸}{۳} - ۵\right) = ۰$$

لذا در پاسخ سوال اینکه آیا نقطه $\bar{x}_۱ = \frac{-۷}{۳}\ ,\ \bar{x}_۲ = \frac{۸}{۳}\ .\ \bar{u}_۱ = \frac{-۱}{۱۵}\ .\ \bar{u}_۲ = \frac{۹۷}{۱۵}$ زینی است، می گوییم چون در قضیه ۵-۵ صدق نمی‌کند پس زینی نبوده و لذا L نقطه زینی نداشته در نتیجه شکاف دو گانگی داریم

آیا رابطه زیر مندرج در قضیه ۵-۶ بر قرار است؟

$f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{u}) = \theta(\bar{u}, \bar{v})$

صرفاً جهت آشنایی، نحوه محاسبه انجام می شود.

$$f(x) = d + \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^t Q \boldsymbol{x}$$

f(x)=۵+c'*x+.۵*x'*Q*x

$d = ۵$ و $c^t = (-۲ \quad ۱)$ و $Q = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$

$$f(x) = ۵ + (-۲ \quad ۱)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۲}(x_۱ \quad x_۲)\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} =$$

$x_۱^۲ + x_۲^۲ - x_۱x_۲ - ۲x_۱ + x_۲ + ۵$

$$\bar{x}^t = \left(\frac{-۷}{۳} \quad \frac{۸}{۳}\right)$$

f(x)=x۱^۲ + x۲^۲ − x۱ ∗ x۲ − ۲ ∗ x۱ + x۲ + ۵=۳۱,۱۱۱۱

f(x)=۵+c'*x+.۵*x'*Q*x=۳۱,۱۱۱۱

$f(\bar{x})$=۳۱,۱۱۱۱

قبلاً $L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = ۲۴,۸۸۸۹$ بدست آمد.

$\theta(\bar{u}, \bar{v})$=?

$$\theta(u, v) = d + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^t Q^{-1} \boldsymbol{v}$$

d= ۵و $Q = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$و $b^t = (۱ \quad ۵)$

$Q^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$ v=A*u-c → v^t=(-۴,۶۶۶۷ ۵,۲۶۶۷)

θ(u, v)= d+b'×u+.۵ *v'$Q^{-۱}$v

$\bar{u} = (\frac{-۱}{۱۵} \quad \frac{۹۷}{۱۵})$ v^t=(-۴,۶۶۶۷ ۵,۲۶۶۷)

MATLAB:

d+b'*u+.۵*v'*inv(Q)*v=۴۵,۵۷۹۳

پس f(x̄)=L(x̄, ū)= θ(ū, v̄) برقراز نیست و مقادیر f(x̄)، L(x̄, ū)وθ(ū, v̄) با هم برابر نیستند . انتظار هم می رفت زیرا L نقطه زینی ندارد. پایان مثال 

قابل ذکر است که روابط بین ۲ نوع شرط بهینگی یعنی " شرایط KKT" و "شرایط مبتنی بر نقطه زینی" مساله

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(\mathbf{x}) \\ &\text{s.t.} \\ &\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le 0 \\ &\quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\ &\quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

در مراجعی مثل ص ۲۷۲ بازارا وهمکاران(۲۰۰۶) داده شده است.

چون در برخی روش ها، تقریب خطی منحنی ها بکار می‌رود ذیلا توضیحی در این مورد شامل تقریب خطی برونی[۱] منحنی ها وتقریب خطی درونی[۲] منحنی ها آورده می شود.

۵–۵ تقریب خطی برونی و درونی منحنی ها

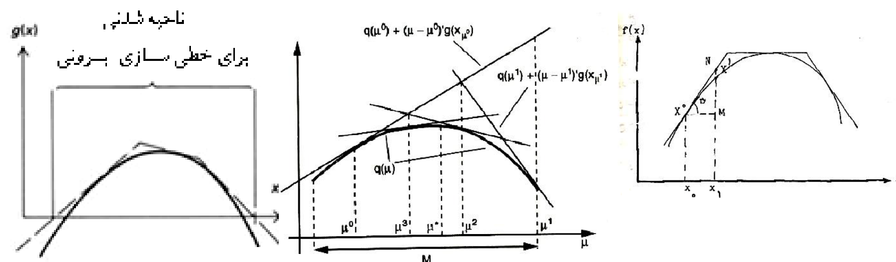
گاه در الگوریتم های حل مسایل غیرخطی توابع مسأله باید به طور تقریبی خطی شوند. منحنی های این توابع می‌تواند از داخل یا خارج منحنی با یک سری پاره خط تقریب زده شود. درتقریب موسوم به خطی برونی (دکتر اصغر پور،۱۳۸۱ ص۴۲۵)پاره خطهای

---

[۱] outer linearization

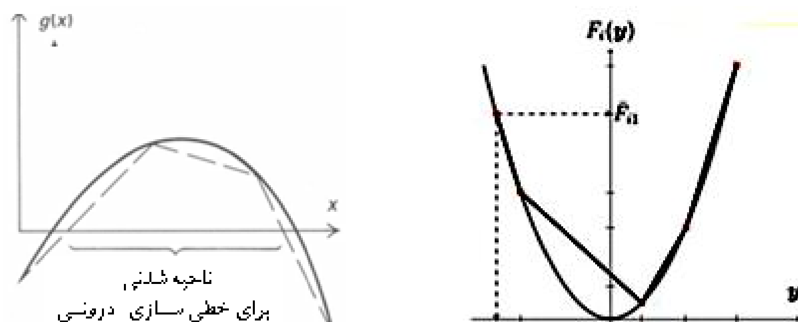
[۲] inner linearization

تقریب زننده منحنی درخارج انحناء منحنی واقع می شود و در تقریب خطی درونی پاره خط های تقریب زننده منحنی در داخل انحناء منحنی واقع می شود. شکل های ۵-۹و ۵-۱۰ نمونه ای از این ۲ نوع تقریب است.



شکل ۵-۹ تقریب خطی برونی

(اصغر پور ،۱۳۸۱ ص٤٤٤ ، برت سکاس،۱۹۹۹ص٦١٨ و
http://web.mit.edu/۱٥,۰٥۳/www/AMP-Chapter-۱۳.pdf ص٤٢٦)



شکل ۵-۱۰ تقریب خطی درونی

web.mit.edu/۱٥,۰٥۳/www/AMP-Chapter-۱۳.pdf ص٤٢٦

۵-۶ حل مساله دوگان

یکی از مشکلات بهینه سازی مساله دوگان لاگرانژ وقتی است که تابع هدف درهمه نقاط مشتق‌پذیر نباشد.؛ لذا الگوریتم‌های گرادیانی نمی تواند مفید افتد. برای حل مساله دوگان الگوریتم‌های چندی ارائه شده است. غالباً این روشها از برنامه ریزی خطی یا برنامه ریزی درجه ۲ یا برنامه‌ریزی محدب کمک گرفته‌اند. ازجمله پژوهش‌های این

زمینه پژوهش گلدفرب و ایدنانی[۱](۱۹۸۳) است که با برنامه ریزی درجه ۲ سرو کار دارد(به نقل از دِب و همکاران،۲۰۱۳). بازارا و همکاران(۲۰۰۶) یک نوع روش برش صفحه ای برای حل مساله دوال ارائه داده اند دِب و همکاران هم الگوریتمی بنام الگوریتم بهینه سازی تکاملی مشترک[۲] برای حل مساله دوگان ارائه داده اند.

دربرخی از الگوریتم های حل مساله دوال، در هر تکرار یک جهت حرکت تولید شده و یک مقدار گام(step size) در طول این جهت اخذ می‌شود تا نهایتاً ماکزیمم تابع دوال لاگرانژ بدست آید. در همه این روش ها لزوماً تحدب و تعمیم آن نقش مهمی ایفاء نمی‌کنند(به مراجعی همچون ص۲۸۹ بازاراو همکاران،۲۰۰۶، واگنر،۱۹۶۹ص۵۹ وآوریل، ۱۹۷۶ ص ۴۷۷ مراجعه شود). روشهایی هم جهت حل مسائل دوگان وجود داد که برای آن دسته مسایل غیرخطی، قابل استفاده است که برخی از ویژگی های تحدب را دارا باشند(ص۷۷ آوریل،۱۹۷۶). ازجمله روشهای معروف این دسته، روشهای برش صفحه‌ای اند. ذیلاً به الگوریتم های برش صفحه ای جهت حل مسائل دوگان پرداخته می شود.

۵-۶-۱ روش های برش صفحه ای [۳]

دراینجا صحبت ازیک سری الگوریتم باعنوان برش صفحه ای است که دربرنامه ریزی غیر خطی ارائه شده است و برای حل آن دسته ازمسائل غیرخطی بکار می‌رود که برخی ویژگیهای محدب بودن[۴] را دارا باشند (ص ۴۷۷ آوریل، ۱۹۷۶). شایان ذکر است دربرخی الگوریتم ها لزوماً تحدب و تعمیم آن نقش مهمی ایفا نمی کند. از جمله روشهای برش صفحه‌ای روش ارائه شده توسط کِلِی[۵] در سال ۱۹۶۰ است که از جواب ناشدنی " بهتر از بهینه" شروع می‌کند تا پس از چند تکرار جواب [شدنی و] بهینه بدست آید(هلیه و لیبرمن،۱۹۶۸ ص۵۸۹).[۶] اصل زیربنائی روشهای برش صفحه ای اینست که فضای شدنی

---

[۱] Goldfarb and Idnani

[۲] Co-Evolutionary Dual Optimization

[۳] Cutting plane مراجع: ص۲۸۹ بازارا و همکاران (۲۰۰۶)، ص ۴۷۷ آوریل(۱۹۷۶) ص۶۱۸ برت سکاس(۱۹۹۹)

[۴] استنباط نگارنده از این جمله این است که اگرتوابع در مساله اولیه محدب کامل هم نباشند الگوریتم های برش صفحه ای به انها قابل اعمال است

[۵] Kelley

[۶] روش برش صفحه ای Kelley-Cheney-Goldstein در ص ۴۸۱ آوریل(۱۹۷۶ قابل مطالعه است.

یک NLP را با یک مجموعه متناهی از نیم فضاهای بسته[۱] تقریب می‌زند و دنباله‌ای از مسائل برنامه ریزی خطی تقریب زننده حل می‌گردد.(ص ۴۷۷ آوریل،۱۹۷۶). ذیلاً پس از یادآوری مسایل اولیه و ثانویه، یک روش برش صفحه ای برای حل مساله دوال لاگرانژ توضیح داده می‌شود

Primal

$$\begin{aligned}
&Min\, f\,(x_1 \ldots x_n) \\
&s.t. \quad g_i(\mathbf{x}) \le 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\
&\qquad\; h_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, \ell \\
&\mathbf{x} \in X
\end{aligned}$$

Lagrange's Dual

$$\begin{aligned}
&Max \quad \theta(u,v) \\
&s.t. \quad u \ge 0
\end{aligned}$$

where

$$\theta(u,v) = \inf_{x \in X} \{L(x,u,v)\}$$

or

$$\theta(u,v) = \inf \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i h_i(x) : x \in X \right\}$$

۵-۶-۱-۱ روش برش صفحه ای بازارا و همکاران برای حل مساله دوال لاگرانژ

علاوه بر روشهای کلاسیک[۲]، که برای حل مساله دوال لاگرانژ مورد استفاده قرار گرفته اند، روش های دیگری مانند روشهای مختلف صفحه برش هم ارائه شده است. به عنوان نمونه روش مقاله کنیک[۳](۲۰۰۷) وکتاب بازاراو دگران (۲۰۰۶). در روش برش صفحه ای ارائه شده توسط بازارا و همکاران, تابع دوگان در هر تکرار با تابعی خطی تقریب زده شده و بهینه می‌گردد (ص ۲۸۹ بازارا و همکاران ،۲۰۰۶). بدین ترتیب که با توجه باینکه تابع هدف دوآل بصورت زیر تعریف گردیده

---

[۱] Finite set of closed half spaces

[۲] مانند روش subgradient

[۳] Konic

$$\theta(u,v)=\inf\{f(x)+u^t g(x)+v^t h(x): x\in X\}$$

اگر متغیر Z را برابر $Z=\theta(u,v)$ قرار دهیم برای تمام $x\in X$ نامساوی زیر باید برقرار باشد.

$$Z\le f(x)+u^t g(x)+v^t h(x)$$

لذا مساله دوال یعنی $\begin{cases}\max\theta(u,v)\\ u\ge 0\end{cases}$ معادل مساله زیر است.

$$\begin{aligned}&\max\quad Z\\ &\text{s.t}\\ &\qquad Z\le f(x)+u^t g(x)+v^t h(x)\qquad x\in X\\ &\qquad\quad u\ge 0\end{aligned}$$

این مساله براساس متغیرهای v,u,z یک مساله خطی است. در راه حل بازارا تابع مساله دوال مرتباً با یک تابع ازنوع خطی به طور برونی تقریب زده شده وبا روش سیمپلکس بهینه می‌گردد.

۵-۶-۱-۲ خلاصهٔ روش برش صفحه ای بازارا و همکاران (برای حل مساله دوال لاگرانژ)

Cutting plane or outer linearization Method

فرض کنید که f، g و h توابع پیوسته و X یک مجموعه فشرده[۱] است بطوریکه مجموعه $X(u,v)$[۲] برای هر u,v غیر تهی است(ص ۲۹۰ بازارا و همکاران(۲۰۰۶).

مرحلهٔ آغازین

نقطهٔ $x_0\in X$ را آن چنان بیابید که $g(x_0)\le 0$ و $h(x_0)=0$. k را یک قرار داده (k=۱) و به گام اصلی بروید که در آن ۲ مساله(اصلی و فرعی) باید حل و مقادیر تابع هدف آنها مقایسه گردد.

---

[۱] A compact set is one that is both closed & bounded .Bazaara(۲۰۰۶, page۴۵

[۲] منظور از مجموعه X(u,v) عبارتست از (اقتباس از ص ۲۷۷ بازارا و همکاران،۲۰۰۶در مورد(X(W)):

$$X(u,v)=\{X: x \text{ is a minimizer for } f(x_k)+u^t g(x_k)+v^t h(x_k),\ \text{when } x\in X \text{ i.e } x \text{ varies over } X\}$$

گام اصلی

الف)مسأله اصلی (Master) خطی زیر را حل:

$$\begin{aligned} &\max \quad z \\ &s.t \\ &\quad z \le f(x_j) + u^t g(x_j) + v^t h(x_j) \qquad j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ &\quad\quad u \ge 0 \end{aligned}$$

وجواب بهینه تکرارk را با (Z_k, u_k, v_k) نشان دهید.

ب)مسأله فرعی زیرین را حل کنید.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + u_k{}^t g(x) + v_k{}^t h(x) \\ & x \in X \end{aligned}$$

وجواب بهینه آنرا با x_k نشان داده و مقدار تابعθ را از رابطه زیر بدست آورید.

$$\theta(u, v) = f(x_k) + u_k{}^t g(x_k) + v_k{}^t h(x_k)$$

اگر در این تکرار مقادیر تابع هدف مسایل اصلی و فرعی یعنی Z_k و $\theta(u_k, v_k)$ مساوی شدند: $Z_k = \theta(u_k, v_k)$،آنگاه متوقف شوید .(بازارا و همکاران،۲۰۰۶ ص۲۹۱) (u_k, v_k)، یک جواب بهینه مساله دوال است. در غیر این صورت اگر $Z_k > \theta(u_k, v_k)$ نامساوی $Z \le f(x_k) + u^t g(x_k) + v^t h(x_k)$ را به مسأله اصلی اضافه کنید. (Z_k, u_k, v_k قبلی دیگر جواب مساله جدید نیست) مساله اصلی جدید باید مجدداً حل شود. kرا برابر k+۱ قرار داده و گام اصلی تکرار کنید.[۱]

مثال ۵ -۱۲ : ص ۲۹۲ بازارا و همکاران (۲۰۰۶)

مطلوبست ثانویه مساله زیر و حل آن با الگوریتم روش برش صفحه ای.

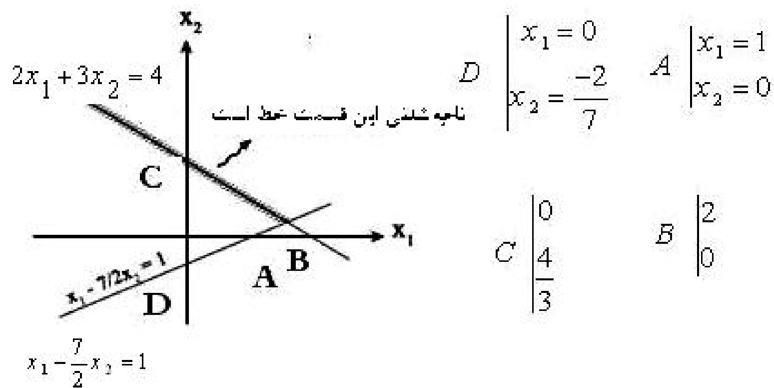
$$Min \quad f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + \frac{1}{4} x_2^2$$

$$s.t. \qquad g_1 : x_1 - \frac{7}{2} x_2 - 1 \le 0 \qquad h_1 : 2x_1 + 3x_2 = 4$$

حل: ناحیه شدنی در شکل زیر رسم شده است

---

[۱] برای یافتن یک جواب شدنی اولیه در حالت محدب بودن از طریق حل یک مسألهLP مطالعه مراجعی نظیر بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص۲۹۶ می تواند مفید باشد



تحقیق کنید تابع محدب است و لذا مینیمم دارد.

نوشتن دوگان:

با تعریف مجموعه X مطابق زیر

$$X = \left\{ (x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 = 4 \right\}$$

تابع هدف دوگان را می نویسیم:

$$\theta(u) = \min \left\{ (x_1, 2)^2 + \frac{1}{4} x_2 + u\left(x_1 - \frac{7}{2} x_2 - 1 \right) : \underbrace{2x_1 + 3x_2 = 4}_{\equiv x \in X} \right\}$$

نقطه شدنی[1] اولیه برابر $x_0 = (\frac{5}{4} \quad \frac{1}{2})^t$ در نظر گرفته شده است که نقطه‌ای روی خط $2x_1 + 3x_2 = 4$ می‌باشد.

گام اصلی

مسأله اصلی تکرار اول k=1

max Z

s.t

$$Z \le f(x_0) + u^t g(x_0)$$

$$u \ge 0$$

با توجه به اینکه $f(x) = (x_1 - 2)^2 + \frac{1}{4}(x_2)^2$ و $g_1(\boldsymbol{x}) = x_1 - \frac{7}{2} x_2 - 1$

[1] یافتن جواب شدنی اولیه در حالت محدب بودن باحل یک LP در بازارا(۲۰۰۶) ص ۲۹۶

$$Min\ z$$

$$z \le \underbrace{\left(\frac{۵}{۴}-۲\right)^۲+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲}_{f(x_۱)}+\underbrace{u\left(\frac{۵}{۴}-\frac{۷}{۲}\times\frac{۱}{۲}-۱\right)}_{u(g(x_۱))}=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۲}u$$

$$u \ge ۰$$

یا

$$Max\ z$$

$$s.t.$$

$$z \le \frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۲}u \qquad u \ge ۰$$

جواب این مدل خطی ۲ متغیره که بطورترسیمی هم قابل تعیین است چنین می باشد:

$$z=\frac{۵}{۸} \qquad u=۰$$

$$z_k = z_۱ = \frac{۵}{۸} \qquad u_k = u_۱ = ۰$$

مسأله فرعی

$$Min\ \ f(\mathbf{x})+u_1^* g_1(\mathbf{x})$$

$$s.t.\quad \mathbf{x}\in X$$

$$g_1(\boldsymbol{X})=x_1-\frac{7}{2}x_2-1 \qquad u_۱^* = ۰$$

لذا مسأله فرعی چنین می شود:

$$Min\ \ L = \quad (x_1-2)^2+\frac{1}{4}x_2^2+0$$

$$s.t.$$

$$\mathbf{x}\in X \ \equiv 2x_1+3x_2=4$$

جواب این مسأله را باید بدست آوریم. یک راه اینست که گرادیان تابع هدف را صفر قرار دهیم اگر جواب معادله حاصل شدنی هم باشد قابل قبول است.

$$\nabla L=\begin{pmatrix}2x_1-4\\ \frac{2}{4}x_2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}x_1=2\\ x_2=0\end{pmatrix}$$

چون $\mathbf{x}_1 \in X$ پس شدنی و قابل قبول است.

$$\theta(u_1)=f\ (x_1)+u_1^*\times \underset{=0}{g}\ (x_1)=(2-2)^2+\frac{1}{4}(0)+0=0$$

چون $z_1=\frac{5}{8}$ $\theta(u_1)=0<$ متوقف نمی‌شویم. به مسأله اصلی محدودیت $z\le f\ (\boldsymbol{x}_1)+ug_1(\boldsymbol{x}_1)$ را اضافه می‌کنیم. چون $g_1(\boldsymbol{x}_1)=2-\frac{7}{2}(0)-1=1\ ,\ f\ (\boldsymbol{x}_1)=f\ (2,0)=0$.

بایدمحدودیت جدید $z\le 0+u$ را اضافه کنیم.

مسأله اصلی جدید

تکرار دوم $k=۱+۱=۲$

$$\max\ z$$
$$st$$
$$z\le\frac{5}{8}-\frac{3}{2}u$$
$$z\le u$$
$$u\ge 0$$

باید مساله را طی چند تکرار حل نمود. دنباله $\{u_k\}$ به نقطه بهینه $u^*=\frac{۱}{۵}$ همگرا می شود و تابع هدف این دوال در $u^*=\frac{۱}{۵}$ حداکثر می شود با $\theta(u^*\}=۰,۱$. (بازارا و همکاران،۲۰۰۶ص ۲۹۳). خلاصه نتایج محاسبات ۴ تکرار در جدول زیر دیده می شود.

جدول ۵-۱نتایج محاسبات ۴ تکرارحل دوال مثال ۵-۱۲ با روش برش صفحه ای
(ازص ۲۹۳ بازارا و همکاران،۲۰۰۶)

تکرار k	محدودیت جدید	$(z_k\ ,u_k)$	x_k^t	$\theta(u_k)$
۱	$z\le\frac{۵}{۸}-\left(\frac{۳}{۲}\right)u$	$(\frac{۵}{۸},۰)$	(۲،۰)	۰
۲	$z\le u+۰$	$(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})$	$(\frac{۱۳}{۸},\frac{۱}{۴})$	$\frac{۳}{۳۲}$
۳	$z\le\frac{۵}{۳۲}-\left(\frac{۱}{۴}\right)u$	$(\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۸})$	$(\frac{۲۹}{۱۶},\frac{۱}{۸})$	$\frac{۱۱}{۱۲۸}$
۴	$z\le\frac{۵}{۱۲۸}+\left(\frac{۳}{۸}\right)u$	$(\frac{۷}{۶۴},\frac{۳}{۱۶})$	$(\frac{۵۵}{۳۲},\frac{۳}{۱۶})$	$\frac{۵۱}{۵۱۲}$

پایان مثال ▲

در بخش ۵-۶ کتاب بازارا و همکاران (۲۰۰۶) قضایایی اثبات شده است که به یافتن جواب اولیه از دوگان و لاگرانژین کمک می‌کند. البته لازم به توضیح است که برای مسأله غیرمحدب در صورت وجود شکاف دوگانگی کار اضافی باید صورت گیرد تا جواب بهینه مسأله اولیه بدست آید.

مثال ۵-۱۳:

مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}&Min\ \ \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-9lnx_2\\&s.t.\\&\qquad g: x_1-2x_2+10\le 0\\&\qquad x\in X\equiv\{x\in\mathbb{R}^2, x_2\ge 0\}\end{aligned}$$

الف) بررسی کنید که آیا تابع هدف محدب است یا خیر.

ب) مسألهٔ دوآل مربوط را نوشته و حل کنید.

حل[1]:

الف:

$$det\ Hessian = det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\frac{9}{x^2}\end{pmatrix} > 0$$

طبق آنچه در بررسی تحدب توابع دو متغیره در فصل اول گفته شد چون دترمینان هشیان این تابع ۲ متغیره منفی نیست و عناصر قطر اصلی آن هم منفی نیستند پس تابع محدب است و مینیمم دارد.

ب:

$$\begin{aligned}&Min\ f(x) = \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-9lnx_2\\&s.t.\\&\qquad g: x_1-2x_2+10\le 0\\&\qquad\quad x\in X\equiv\{x\in\mathbb{R}^2, x_2\ge 0\}\end{aligned}$$

g و f توابع پیوسته اند محدب بودن f اثبات شد و g هم که خطی است پس محدب است.

---

[1] توسط خانم مهندس میترا مزینانی دانش آموخته ارشد مهندسی صنایع دانشگاه شهید باهنرکرمان

دوگان یاثانویه مساله

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ \theta(u,v)\\
&s.t.\quad u \geq 0\\
&where\\
&\theta(u,v)=\inf_{x\in X}\{L(x,u,v)\}\\
&or\\
&\theta(u,v)=\inf\left\{f(x)+\sum_{i=1}^{m}u_i g_i(x)+\sum_{i=1}^{\ell}v_i h_i(x): x\in X\right\}
\end{aligned}
$$

دوگان چنین می شود:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \theta(u) = \inf\{\tfrac{۱}{۲}x_۱^۲ + \tfrac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + u(x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰): x \in \mathbb{R}^۲, x_۲ \geq ۰\}\\
&s.t.\\
&\quad u \geq ۰
\end{aligned}
$$

گام های حل این مساله دوگان با الگوریتم برش صفحه ای

مرحلۀ آغازین

نقطه$\binom{۰}{۶} = x.$ را که شدنی است به عنوان نقطه اولیه برمی گزینیم. زیر این نقطه هم متعلق است به$x \in X$ وهم در محدودیت صدق می کند

تکرار اول گام اصلی k=۱

مساله اصلی

$$
\begin{aligned}
&\text{Max z}\\
&\text{s.t.}\\
&\quad z \leq f(x.) + u^t g(x.)\\
&\quad u \geq ۰
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f: \tfrac{۱}{۲}x_۱^۲ + \tfrac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲\\
&g: x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰
\end{aligned}
$$

$$
z \leq f(x.) + ug(x.) \rightarrow \text{z} \leq (۰) + \tfrac{۱}{۲}(۳۶) - ۹ln۶ + u(۰ - ۱۲ + ۱۰) \rightarrow \text{z} + ۲\text{u} \leq ۱.۸۷۴۲
$$

$$\max \ z$$
s.t.
$$z + ۲u \leq ۱.۸۷۴۲$$
$$u \geq ۰$$

حل با لینگو:

```
max= z;
x۱=۰; x۲=۶;
Z<=.۵*x۱^۲+.۵*x۲^۲-۹*@log(x۲)+u*(x۱-۲*x۲+۱۰);
u>=۰@;free(z);end
```

یا

```
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۲;
u>=۰;  @free(z);end
```

دادن u>=۰ در لینگو ضرورت ندارد.

جواب مساله فوق:

$u_۱=۰$ $z^۱= ۱,۸۷۴۱۶۵$

مسئله فرعی:

$$\min \quad f(x) + u_k{}^t g(x) + v_k{}^t h(x)$$
$$x \in X$$

$$min \ \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + ۰$$
$$x_۲ \geq ۰$$

```
lingo:
u=۰;
min =.۵*x۱^۲+.۵*x۲^۲-۹*@log(x۲)+u*( u*(x۱-۲*x۲+۱);
@free(x۱);
end
```

توجه کنید تابع log در متلب و لینگو به محاسبه لگاریتم طبیعی(ln) می‌پردازد.

```
Optimal solution found at step:        ۵
Objective value:              -۵,۳۸۷۵۱۱
```

Variable	Value	Reduced Cost
x۱	۰,۲۹۵۴۴۰۰E-۰۸	۰,۵۲۴۰۲۵۳E-۰۵
x۲	۳,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

محاسبه مقدار تابع هدف به ازای این جواب $x_1=0$ $x_2=3$:

$$\theta(u,v)=f(x_k)+u_k^t g(x_k)+$$

$$\theta(u)=f(x)+u*g(x)$$

$$\theta(u)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-9\ln x_2+u(x_1-2x_2+10)$$

$$\theta(\mathbf{u}_1)=\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}(3)^2-9\ln 3+0=0+.5*3^2-9*\log(3)+0$$
$$=-5.387511$$

چون $z_1=1.8742 > \theta(\mathbf{u}_1)=-5.39$ متوقف نشده و

نامساوی $Z\le f(x_k)+u^t g(x_k)$ را به مسأله خطی اصلی اضافه باید کرد و ادامه داد

$$z\le f(\mathbf{x}_1)+u*(\mathbf{x}_1)=\ g\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}(3)^2-9\ln 3+u(0-2*3+10)$$
$$z\le=-5.387511+4u$$

تکرار دوم

```
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
@free(z);
end
Optimal solution found at step:        ۱
Objective value:            -۰,۵۴۶۳۹۳۷
```

Variable	Value	Reduced Cost
Z	-۰,۵۴۶۳۹۳۷	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
U	۱,۲۱۰۲۷۹	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

u۲=۱.۲۱ z۲= -۰,۵۵

مسئله فرعی کمینه سازی $\theta(u_k)=f(x_k)+u_k g(x_k)$:

$$\min \quad f(x_k) + u_k g(x_k)$$
$$x \in X$$

$$min \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹lnx_۲ + \ ۱.۲۱۰۲۷۹(\ x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰)$$
$$x_۲ \geq ۰$$

```
min =.۵*x۱^۲+.۵*x۲^۲-۹*@log(x۲)+ ۱,۲۱۰۲۷۹*( x۱-۲*x۲+۱۰);
@free(x۱);end
```

optimal solution found at step: ۶

Objective value: -۲,۹۳۵۹۸۴

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۱,۲۱۰۲۷۹	-۰,۶۹۷۱۶۹۳E-۰۷
X۲	۴,۴۴۵۲۰۹	۰,۴۳۳۵۷۸۵E-۰۶

چون $\theta(\mathbf{u}_۲) = -۲.۹۴ < z_۲ = -۰.۵۵$ متوقف نشده و نامساوی $z \leq f(\mathbf{x}_k) + u * g(\mathbf{x}_k)$ را به مسأله اصلی قبل اضافه باید کرد و ادامه داد:

$$z \leq f(\mathbf{x}) + u * g(\mathrm{x})$$

$$Z \leq .۵ * x۱^۲ + .۵ * x۲^۲ - ۹ * \log(x۲) + u * (x۱ - ۲ * x۲ + ۱۰)$$
$$z \leq= -۲.۸۱۴۱۱۲۸ - ۰.۱۰۰۰۶۹۷u$$

تکرار سوم

```
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
z<=-۲.۸۱۴۱۱۲۸-۰.۱۰۰۰۶۹۷*u;
@free(z); end
```

Optimal solution found at step: ۱

Objective value: -۲,۸۷۶۹۲۱

Variable	Value	Reduced Cost
Z	-۲,۸۷۶۹۲۱	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
u	۰,۶۲۷۶۴۷۳	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

پس z۳= -۲,۸۷۶۹۲۱ u۳=۰,۶۲۷۶۴۷۳

مسئله فرعی:

$$\min \quad f(x_k) + u_k g(x_k)$$
$$x \in X$$
$$min \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹lnx_۲ + ۰.۶۲۷۶۴۷۳(x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰)$$
$$x_۲ \geq ۰$$

حل با لینگو

```
min =.۵*x۱^۲+.۵*x۲^۲-۹*@log(x۲)+ ۰,۶۲۷۶۴۷۳*( x۱-۲*x۲+۱۰);
@free(x۱);
end
```

Optimal solution found at step: ۶

Objective value: -۳,۴۹۵۱۲۸

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۰,۶۲۷۶۴۷۵	-۰,۱۷۶۸۸۶۴E-۰۶
X۲	۳,۶۹۲۶۰۱	۰,۶۵۶۶۴۴۷E-۰۶

چون $\theta(\mathbf{u}_۳) = -۳.۴۹ < z_۳ =$-۲,۸۷ متوقف نشده و نامساوی

$z \leq f(\mathbf{x}_k) + u * g(\mathbf{x}_k)$ را به مسأله اصلی قبل اضافه باید کرد و ادامه داد

$$z \leq f(\mathrm{x}) + u * g(\mathrm{x}) = .۵ * (-۰.۶۲۷۶۴۷۵)\hat{}۲ + ۰.۵ * (۳.۶۹۲۶۰۱)\hat{}۲ - ۹ * \log(۳.۶۹۲۶۰۱) + u(-۰.۶۲۷۶۴۷۵ - ۲ * ۳.۶۹۲۶۰۱ + ۱۰)$$
$$z <= -۴.۷۴۲۳۵۸۰ + ۱.۹۸۷۱۵۰۵u$$

تکرار۴

```
L I N G O :
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
z<=-۲.۸۱۴۱۱۲۸-۰.۱۰۰۰۶۹۷*u;
```

$z <= \ -۴.۷۴۲۳۵۸۰ + \ ۱.۹۸۷۱۵۰۵ * u;$
@free(z);
end

Optimal solution found at step: ۱
Objective value: -۲,۹۰۶۵۶۱

Variable	Value	Reduced Cost
Z	-۲,۹۰۶۵۶۱	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
U	۰.۹۲۳۸۳۴۲	۰,۰۰۰۰۰

u۴= ۰,۹۲۳۸۳۴۲ z۴= -۲,۹۰۶۵۶۱

مسئله فرعی:

$$\min \quad f(x_k) + u_k g(x_k) \quad x \in X$$

$$min \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹lnx_۲ + \ ۰.۹۲۳۸۳۴۲(\,x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰) \quad x \in X$$

حل با لینگو

min =.۵*x۱^۲+.۵*x۲^۲-۹*@log(x۲)+ ۰,۹۲۳۸۳۴۲*(x۱-۲*x۲+۱۰);
@free(x۱);end

Optimal solution found at step: ۷
Objective value: -۳,۰۵۸۷۸۰

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۰,۹۲۳۸۳۴۲	-۰,۹۶۱۴۰۴۵E-۰۸
X۲	۴,۰۶۲۸۵۸	۰,۶۷۷۶۸۸۸E-۰۷

شرط توقف برقرار نیست. $\theta(\mathbf{u}_k)$ و z_k در این تکرار هم مساوی نشدند $\theta(\mathbf{u}_۴)$ =-۳,۰۵۸۷۸۰ از z۴= -۲,۹۰۶۵۶۱ کمتر است ادامه باید داد.

تکرار ۵

در تکرار ۵ بایدمحدودیت $z \leq f(\mathbf{x}_۴) + u * g(\mathbf{x}_۴)$ را به مساله اصلی اضافه نمود:
یعنی $z <= \ -۳.۹۳۶۸۳۷۶۲ + \ ۰.۹۵۰۴۴۹۸u$ را:

مساله اصلی:

```
max=z ;
 z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
 z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
 z<=-۲.۸۱۴۱۱۲۸-۰.۱۰۰۰۶۹۷*u;
 z <=  −۴.۷۴۲۳۵۸۰ +  ۱.۹۸۷۱۵۰۵ * u;
 z ≤  −۳.۹۳۶۸۳۷۶۲ +  ۰.۹۵۰۴۴۹۸ * u;
 @free(z);
 end
```

$\mathbf{u}_۵ = ۱.۰۶۸۷۳۳$, $z_۵ = -۲.۹۲۱۰۶۱$

مسئله فرعی:

$$\min \quad f(x_k) + u_k g(x_k) \quad x \in X$$

$$min \;\; \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + ۱.۰۶۸۷۳۳(\,x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰)$$

@free(x۱);

End

Optimal solution found at step: ۶

Objective value: -۲,۹۵۹۰۲۵

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۱,۰۶۸۷۳۲	۰,۱۲۵۹۰۵۳E-۰۵
X۲	۴,۲۵۳۴۱۴	۰,۱۱۲۵۵۱۵E-۰۵

حل با لینگو منجر به جواب $\mathrm{x}_۵ = \begin{pmatrix} -۱.۰۶۸۷۳۲ \\ ۴.۲۵۳۴۱۴ \end{pmatrix}$ با مقدار تابع هدف ۲,۹۵۹۰۲۵- می شود اگر دستی هم محاسبه شود همین نتیجه را می دهد:

$$\theta(\mathbf{u}_۵) = f(\mathrm{x}_۵) + \mathbf{u}_۵ * g(\mathbf{x}_۵) = \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + \mathbf{u}_۵(\,x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰) = -۲,۹۵۹۰۲۵$$

چون $\theta(\mathbf{u}_۵) = -۲.۹۵ \neq z_۵ = -۲.۹۲$ متوقف نشده و نامساوی

$$z \le f(\mathbf{x}_۵) + u * g(\mathbf{x}_۵) = -۳.۴۱۲۶۳۸۲۱۹ + ۰.۴۲۴۴۴ * u$$

را به مسأله اصلی قبل اضافه باید کرد و ادامه داد .

تکرار ۶

```
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
z<=-۲.۸۱۴۱۱۲۸-۰.۱۰۰۰۶۹۷*u;
z <=  -۴.۷۴۲۳۵۸۰ + ۱.۹۸۷۱۵۰۵ * u;
z <= -۳.۹۳۶۸۳۷۶۲ + ۰.۹۵۰۴۴۹۸ * u;
z <= -۳.۴۱۲۶۳۸۲۱۹ + ۰.۴۲۴۴۴ * u;
@free(z);
End
```

Optimal solution found at step: ۱

Objective value: -۲,۹۲۸۳۰۴

Variable	Value	Reduced Cost
Z	-۲,۹۲۸۳۰۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
U	۱,۱۴۱۱۱۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰

مسئله فرعی:

$$\min \quad f(x_k) + u_k g(x_k) \quad x \in X$$

$$min \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹lnx_۲ + ۱.۱۴۱۱۱۴ * (x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰)$$

@free(x۱);

Optimal solution found at step: ۶

Objective value: -۲,۹۳۷۹۵۵

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۱,۱۴۱۱۱۴	۰,۴۵۱۴۳۹۳E-۰۶
X۲	۴,۳۵۰۸۰۹	۰,۷۴۳۰۷۳۱E-۰

چون $z_۶ = -۲.۹۲۸۳ \neq \theta(\mathbf{u}_۶) = -۲.۹۳۷$ متوقف نشده و نامساوی

$$z \leq f(\mathbf{x}_۶) + u * g(\mathbf{x}_۶) = -۳.۱۱۷۴۱۶۱۸۵ + ۰.۱۵۷۲۶۸ * u$$

به برنامه اصلی قبل اضافه نموده و ادامه می دهیم.

تکرار ۷

```
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
z<=-۲,۸۱۴۱۱۲۸-۰,۱۰۰۰۶۹۷*u;
z<=  -۴,۷۴۲۳۵۸۰+ ۱,۹۸۷۱۵۰۵*u;
z<= -۳,۹۳۶۸۳۷۶۲+ ۰,۹۵۰۴۴۹۸*u;
z<=-۳,۴۱۲۶۳۸۲۱۹+۰,۴۲۴۴۴*u;
z<=-۳,۱۱۷۴۱۶۱۸۵+ ۰,۱۵۷۲۶۸*u;
@free(z);
end
```

Optimal solution found at step: ۱

Objective value: -۲,۹۳۲۰۵۷

Variable	Value	Reduced Cost
z	-۲,۹۳۲۰۵۷	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
u	۱,۱۷۸۶۲۰	۰,۰۰۰۰۰

مسئله فرعی:

$$\min \quad f(x_k) + u_k g(x_k)$$
$$x \in X$$

$$min \ \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + ۱.۱۷۸۶۲۰(\, x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰)$$

```
@free(x۱);end
```

Optimal solution found at step: ۶

Objective value: -۲,۹۳۴۶۷۲

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۱,۱۷۸۶۲۰	۰,۱۳۵۶۴۳۵E-۰۶
X۲	۴,۴۰۱۸۴۰	۰,۵۶۴۹۶۸۲E-۰۶

چون $\theta(\mathbf{u}_۷) = -۲.۹۳۴۶۷۲ \neq z_۷ = -۲.۹۳۲۰۵۷$ متوقف نشده و نامساوی

$z \le f(\mathbf{x}_۷) + u * g(\mathbf{x}_۷) = -۲.۹۵۵۵۳۳۴۷ + ۰.۰۱۷۷ * u$

به مساله اصلی در تکرار قبل اضافه و ادامه مِی‌دهیم:

تکرار ۸

Optimal solution found at step: ۱

Objective value: -۲,۹۳۴۲۷۹

Variable	Value	Reduced Cost
Z	-۲,۹۳۴۲۷۹	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
u	۱,۲۰۰۸۲۳	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

مساله فرعی

$$min\ \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + ۱.۲۰۰۸۲۳ * (x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰)$$

@free(x۱);end

Optimal solution found at step: ۶

Objective value: -۲,۹۳۵۲۰۰

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	-۱,۲۰۰۸۲۳	-۰,۳۶۹۸۲۰۷E-۰۸
X۲	۴,۴۳۲۲۲۸	۰,۴۷۶۹۳۰۵E-۰۶

نتیجه تکرا ر۸:

$$\mathbf{x_8} = \begin{pmatrix} -۱.۲۰۰۸۲۳۲ \\ ۴.۴۳۲۲۲۸ \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Z}_۸ = -۲/۹۳۴۲۷۹$

$\mathbf{u}_۸ = ۱.۲۰۰۸۲۳ \qquad \theta(\mathbf{u}_۸) = -۲.۹۳۴۲۷۹$,

چون $z_۸$ و$(\mathbf{u}_۸)$ θ دقیقاً برابرنشدند باید ادامه داد.

و نامساوی

$z \le f(\mathbf{x}_۸) + u * g(\mathbf{x}_۸) = -۲,۸۵۶۸۱۱۰۶۸۸ - ۰,۰۶۵۲۷۹ * u$

به مساله اصلی در تکرار قبل اضافه و ادامه می‌دهیم:

مساله اصلی

```
max=z ;
z+۲*u<=۱,۸۷۴۱۶۴۷۷۶۹۴۷۵۱;
z<=-۵,۳۸۷۵۱۱+۴*u;
z<=-۲,۸۱۴۱۱۲۸-۰,۱۰۰۰۶۹۷*u;
z<=  -۴,۷۴۲۳۵۸۰+ ۱,۹۸۷۱۵۰۵*u;
z<= -۳,۹۳۶۸۳۷۶۲+ ۰,۹۵۰۴۴۹۸*u;
z<=-۳,۴۱۲۶۳۸۲۱۹+۰,۴۲۴۴۴*u;
z<=-۳,۱۱۷۴۱۶۱۸۵+ ۰,۱۵۷۲۶۸*u;
z ≤ −۲,۸۵۶۸۱۱۰۶۸۸-۰,۰۶۵۲۷۹* u;
@free(z);
 end
Objective value:            -۲,۹۳۳۲۵۴
```

Variable	Value	Reduced Cost
z	-۲,۹۳۳۲۵۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
u	۱,۱۷۱۰۱۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

باید ادامه داد تاz_k و $\theta(\mathbf{u}_k)$ برابرشوند.

نحوه دیگر حل مثال ۵–۱۳ با باز تعریف مجمو عه X:

برای حل با روش برش صفحه ای ،مجموعه X را باز تعریف کرده مساله رابه صورت زیر می نویسیم:

$$
\begin{aligned}
&Min\, f(x) = \frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ \\
&s.t. \\
&g = -x_۲ \le ۰ \\
&x \in X \equiv \{x \in \mathbb{R}^۲,\ x_۱ - ۲x_۲ + ۱۰ \le ۰\}
\end{aligned}
$$

دوگان چنین می شود:

$$\theta(u) = \underbrace{\inf}_{x\in X} \{\frac{۱}{۲}x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}x_۲^۲ - ۹ln x_۲ + u(-x_۲)\}$$

f، g و h توابع پیوسته اند

حل با الگوریتم برش صفحه ای

نقطه $x_. = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۵ \end{pmatrix}$ را که شدنی است به عنوان نقطه اولیه برمی گزینیم.

k=۱

مساله اصلی:

$$\max \quad Z$$
$$\text{s.t}$$
$$Z \le f(x_0) + u^t g(x_0)$$
$$u \ge 0$$

$$\max \quad z$$
$$\text{s.t.}$$
$$z \le \frac{۱}{۲}(۰) + \frac{۱}{۲}(۲۵) - ۹ln۵ + u(-۵) \quad \text{or} \quad z + ۵u \le --۱.۹۸۴۹$$
$$u \ge ۰$$

حل این مساله خطی دو متغیره با متلب:

```
>> f=-[۱ ۰];
>>A=[...
۱ ۵
۰ -۱];
b=[...
-۱,۹۹
۰];
>>linprog(f,A,b)
Optimization terminated sucessfully.

ans =
 z۱ =-۱,۹۹
   u۱=۰
```

حل مساله اصلی با لینگو :

```
max=z ;
```

```
z+۵*u<=-۱,۹۸۴۹;
@free(z);
end
Optimal solution found at step:        ۰
 Objective value:              -۱,۹۸۴۹۹۰۰۰۰
```

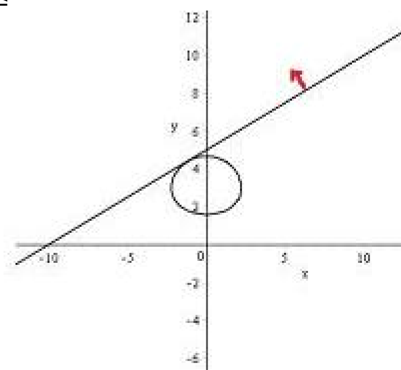
Variable	Value	Reduced Cost
z	-۱,۹۹۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
u	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰	۵,۰۰۰۰۰۰

$u_۱=۰$ $\quad z_۱=-۱,۹۹$

حل مساله فرعی:

$$\min \quad f(x)+u_k{}^t g(x)+v_k{}^t h(x)$$
$$x \in X$$

$$Min \ \frac{۱}{۲}x_۱^۲+\frac{۱}{۲}x_۲^۲-۹ln x_۲+۰$$
$$x_۱-۲x_۲+۱۰\leq ۰$$



حل این مساله فرعی که غیر خطی است با لینگو:

```
min =.۵*x۱^۲+.۵*x۲^۲-۹*@log(x۲);
x۱-۲*x۲+۱۰<=۰;
@free(x۱);
end
```

لینگو جواب زیر را می دهد

Optimal solution found at step: ۴

Objective value: -۲,۹۳۴۶۳۰

Variable	Value	Reduced Cost
x۱	-۱,۱۸۳۳۶۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
x۲	۴,۴۰۸۳۱۹	۰,۴۰۶۹۳۴۷E-۰۶

حل این مساله غیر خطی با متلب

ایجاد m-file زیر با عنوانی مثل constraints. m

```
function [c, ceq] = constraints (x)
c=[x(۱)-۲*x(۲)+۱۰];
ceq=[];
```

اجرای دستور زیر

```
[x fvalue]= fmincon(@(x) (.۵*x(۱)^۲+.۵*x(۲)^۲-۹*log(x(۲))),[۱;۲],[],[],[],[],[],[],@(x)  constraints(x))
```

Local minimum possible. Constraints satisfied.

x = -۱,۱۸۳۶ ۴,۴۰۸۲ fvalue = -۲,۹۳۴۶

بررسی شرط توقف:آیا $z1 = \theta(\mathbf{u}_1)$ ؟

مقدار $\theta(\mathbf{u}_1)$ همان مقدارتابع هدف مساله فرعی است که برابر-۲,۹۳۴۶۳۰ بدست آمد

حل دستی:

$\theta(u) = f(\mathbf{x}_1) + u\, g(\mathbf{x}_1)$

$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 9ln x_2 = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(5)^2 - 9ln5,\quad u1 = 0\ ,\ g = -x_2$

$x1 = -1.183362\ ;\ x2 = 4.408319;\ 0.5 * x1^2 + .5 * x2^2 - 9 * \log(x2) + 0 = -2.9346$

$\theta(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{x}_1) + u1 * g(\mathbf{x}_1) \Longrightarrow$

$\theta(\mathbf{u}_1) = -2.9346$

چون $z1 = -1.99 \neq \theta(\mathbf{u}_1) = -2.9346$ متوقف نباید شد.

در ادامه[1] در تکرار ۲ به مساله اصلی قبل محدودیت زیر اضافه می گردد

$z \leq f(\mathbf{x}_1) + ug(\mathbf{x}_1) \qquad f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 9\ln x_2 \qquad g = -x_2$

$z \leq \frac{1}{2}(-31.186)^2 + \frac{1}{2}(4.4082)^2 - 9\ln 4.4082 + u \times (-4.4082) \Rightarrow$

$z \leq -2.9346 - 4.40819u$

```
max=z;
z+5*u<=1,9849;
z<=-2,9346299-4,40819*u;
u>=0;
@free(z);
end
Optimal solution found at step:        0
 Objective value:            -2,934600
              Variable         Value      Reduced Cost
                 Z     -2,9346300         0,00000000E+00
                 U      0,00000000E+00      4,408200
```

جواب : $\mathbf{u}_2=0$ $\quad Z_2=-2/93463$

مساله فرعی:

چون $\mathbf{u}_2=0$: مساله فرعی جدید با قبلی یکی می شود و لذا در این تکرارهم

$x_1 = -1,183362 \qquad x_2 = 4,40819$

بررسی توقف:آیا $z_2 = \theta(\mathbf{u}_2)$ ؟

$\theta(\mathbf{u}_2) = f(x)+u_2 g(x)$

$\theta(u_2) = \frac{1}{2}(x_1^2) + \frac{1}{2}x_2^2 - 9\ln x_2 + \mathbf{u}_2(x_2) = -2.93463$

$\theta(\mathbf{u}_k)$ و z_k در این تکرارمساوی شدند پس شرط توقف برقرارو متوقف می‌شویم .

مقدار بهینه تابع هدف مساله دوال ۲,۹۳۴۶-= θ^* با $u^* = 0$.

پایان مثال ▲

مثال ۵ -۱۳:

مطلوبست دوآل مساله زیر و حل آن با روش برش صفحه ای [1].

[1] از مهندس حجت اسدی دانشجوی ارشددانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

Primal

$Min\, f(x) = x^2$

$s.t.\ \ g:(x-1)^2 - 1 \le 0 \quad \equiv x \in X$

براحتی قابل تحقیق است که جواب مساله اولیه: $x^* = ۰ \quad f^* = ۰$

ثانویه:

$Max\ Y = \theta(u)$

$s.t.\quad u \ge 0$

where

$\theta(u) = \inf_x \{L(x,u)\}$

$$\theta(u) = \underbrace{inf}_{x}\{x^۲ + u[(x-۱)^۲ - ۱]\} = \underbrace{inf}_{x}\{x^۲ + ux^۲ - ۲ux\}$$

حل با روش برش صفحه ای:

K=۱ $\quad \mathbf{x}_0 = 1$

مساله اصلی

Max z

s.t.

$z \le f(x_.) + u^t g(x_.) = x_.^۲ + u[(x_. - ۱)^۲ - ۱]$ یا $Z \le ۱ - u$

$u \ge ۰$

Max z

s.t.

$z \le ۱ - u$

$u \ge ۰$

جواب بهینه این مساله را با $z_۱ \& u_۱$ نشان میدهیم: $z_۱ = ۱ \& u_۱ = ۰$

مساله فرعی

یافتن جواب بهینه مساله زیر به عنوان $\mathbf{x}_1$

Min $f(x)+u_۱^t g(x)$

$x \in X$

[۱] از: مهندس امیر رضا ترابی دانش آموخته دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

توجه کنید که در اینجا منظور از $x \in X$ محدودیت $(x-1)^2 \leq 1$ می باشد .این محدودیت غیرخطی براحتی به ۲ محدودیت خطی زیر قابل تبدیل است ولی لزومی هم ندارد:

$(x-1) \leq 1 \quad or \; x \leq 2$

$(x-1) \geq -1 \; or \; x \geq 0$

Min $x^2 + 0$

s.t. $0 \leq x \leq 2$

جواب بهینه این مساله را با x_1 نشان میدهیم: $x_1 = 0$

مقدار تابع:

$\theta(u_1) = f(x_1) + u_1 g(x_1) = 0$

چون $\theta(u_1) < z_1$ متوقف نشده باید نامساوی $Z \leq f(x_k) + u^t g(x_k)$ را به مسأله خطی اصلی اضافه شودیعنی نامساوی :

$Z \leq f(x_1) + u_1 g(x_1) \quad x_1 = 1$ یا $Z \leq 0^2 + 0 \times (0-1)^2 - 1$ یا $z \leq 0$

k=۲

Max z

s.t.

$z \leq 1 - u$

$z \leq 0$

$u \geq 0$

جواب ترسیمی این مساله ۲ متغیره مبدا است: پس $z_2 = 1 \; \& \; u_2 = 0$.

مساله فرعی : یافتن جواب بهینه مساله زیر به عنوان x_2:

\Min $f(x) + u_2 g(x)$

s.t. $x \in X$

or

Min $x^2 + 0$

$0 \leq x \leq 2$

s.t. _

در تکرار دوم قرار داریم جواب بهینه این مساله را با x_2 نشان میدهیم: $x_2 = 0$

$\theta(u_2) = f(x_2) + u_2 g(x_2) = 0$

چون $Z_{k=2}$ و $\theta(u_{k=2})$ (مقادیر توابع هدف ۲ مساله اصلی و فرعی) برابر شدند متوقف می شویم پس $u^* = 0$ و $\theta^* = 0$. $\theta^* = f^*$ و شکاف دو گانگی نداریم .

بررسی شکاف دو گانگی **با استفاده از مفهوم نقطه زینی:**

طبق قضیه دوالیتی قوی در واقع شرط لازم و کافی برای نبود شکاف دوگانگی وجود نقطه زینی در تابع لاگرانژین است.

یافتن نقطه زینی تابع لاگرانژین (L):

نقطه زینی تابع Lدر وهله اول یک نقطه ساکن آن است و نقطه ساکن از حل معادله " گرایان تابع L=۰"بدست می آید

$$L = x^2 + ux^2 - 2ux$$

$$\nabla L = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2ux - 2u = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = x^2 - 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \quad u = 0 \\ x = 2 \quad u = 2 \end{cases}$$

بررسی زینی بودن نقطه:

$(\bar{x} \in X, \bar{u} \ge 0)$ حاصل از $\nabla L = 0$ که در آن $L = f(x) + ug(x)$ طبق قضیه ۵-۵ برای تابع لاگرانژین زینی محسوب می‌شود اگر وفقط اگردر ۳ شرط زیر صدق کند

-۱

$$L(\bar{x}, \bar{u}) = \min\{L(x, \bar{u}) : x \in X\}$$

۲- شدنی بودن

$$g(\bar{x}) \le 0$$

۳- رابطه کمک مکمل

$$\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$$

بررسی شرایط برای : $\bar{x}_1 = 0, \bar{u}_1 = 0$

شرط۱:

$$L(\bar{x}_1, \bar{u}_1) = 0,\ \ L = x^2 + ux^2 - 2ux,\ \ L(x, \bar{u}_1) = x^2 \rightarrow$$
$$\min L(x, \bar{u}_1) = 0 = L(\bar{x}_1, \bar{u}_1)$$

شرط۲ :

$$(\bar{x}_1 - 1)^2 \overset{?}{\le} 1 \ \Rightarrow (0-1)^2 = 1 \le 1$$

شرط۳:

$$\bar{u}_1 g(\bar{x}_1) \overset{?}{=} 0 \quad 0\left[(0-1)^2-1\right]=0 \;\Rightarrow\; \bar{u}_1 g(\bar{x}_1)=0$$

پس $\bar{x}_1=0, \bar{u}_1=0$ نقطه زینی برای تابع لاگرانژین بوده و شکاف دوگانگی نداریم.

پایان مثال ▲

تمرینات روش برش صفحه ای برای حل دوا ل

۱-مطلوبست حل **دوال** مساله های زیر با ا لگوریتم برش صفحه ای

ردیف	تابع هدف	نقطه اولیه
الف	$Min\ -3x_1-5x_2+2x_1^2+x_2^2$ $st.$ $3x_1+2x_2\le 6$ $4x_1+x_2\le 4$ $x_1 \& x_2\ge 0$	(۰ ۳)
ب	$Min\ (x_1-2)^2+(x_2-6)^2$ $st.$ $x_1^2-x_2\le 0$ $-x_1\le 1$ $2x_1+3x_2\le 18$ $x_1 \& x_2\ge 0$	(۰ ۰)
ج	$Min\ -4x_1-10x_2+x_1^2+x_2^2$ $st.$ $-x_1+x_2\le 2$ $x_1+x_2\le 6$ $x_1\le 5$ $-x_2\le 0$ $-x_1\le -1$	(۲ ۱)

۲- (خارج از درس فصل وبرای مطالعه بیشتر):الگوریتم برش صفحه ای در برنامه ریزی با اعداد صحیح (IP)هم کاربرد دارد. دانشجویان علاقه مند به این موضوع می توانند پس از مطالعه این بحث در برخی مراجع مانند وینستون(۱۹۹۴) مساله داده شده در زیر را حل کنند

مطلوبست حل مساله برنامه ریزی اعداد صحیح(IP) زیر که جدول نهایی برنامه ریزی خطی آن داده شده (وینستون ،۱۹۹۴ ص ۵۴۳)

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 6x_1 + 8x_2 \\
&s.t. \\
&3x_1 + x_2 \ge 4 \\
&x_1 + 2x_2 \ge 4 \\
&\text{integer } x_1 \,\&\, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$e_۱$	$e_۲$	RHS	نسبت	
Z	۱	۰	۰	$\frac{-۴}{۵}$	$\frac{-۱۸}{۵}$	$\frac{۸۸}{۵}$		Z سطر
$x_۱$	۰	۱	۰	$\frac{-۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۴}{۵}$		محدودیت اول
$x_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{-۳}{۵}$	$\frac{۸}{۵}$		محدودیت دوم

عمل صالح سکوی پرش کلمه (عقیده)طیب است. عمل صالح باعث صعود اعتقادات است .
تقوی نیل میکند عمل صالح صعود. ۹۵/۹/۲۰ آقای جوادی آملی

٦

پیرامون چند مسأله کلاسیک NLP

و

خطی سازی روابط غیرخطی



معرفی چند مسأله کلاسیک غیر خطی و چند روش خطی سازی

هدف فصل

فصل حاضر به معرفی دو مساله بهینه سازی غیر خطی(NLP) کلاسیک و نیز چند روش خطی سازی عبارات غیر خطی می پردازد. مسائل کوادرا تیک و تفکیک پذیر، روش ولف برای حل مسایل کوادراتیک با محدودیت خطی وروش تقریب خطی جزء به جزء برای آماده سازی مسایل غیرخطی تفکیک پذیر جهت حل نیز بیان می گردد.

۶-۱ مقدمه

در کتب برنامه ریزی غیر خطی(به عنوان نمونه فصل ۱۱ بازارا و همکاران، ۲۰۰۶) به چند مساله خاص از جمله مدل‌های کوادراتیک(محدب و غیرمحدب)، تفکیک پذیر، برنامه ریزی خطی کسری، برنامه ریزی هندسی و برنامه ریزی خطی متمم[۱] توجه ویژه

[۱] Linear Complement Programming

می شود. در این فصل با پرداختن به۲ مورد اول یعنی مدل های کوادراتیک (درجه ۲)و مدل‌های تفکیک‌پذیر وتفکیک‌پذیر کردن مسائل, و تقریب خطی جزء به جزء[۱] برای آماده سازی مسایل غیرخطی تفکیک پذیر جهت حل مساله خطی حاصله با سیمپلکس آشنا می شوید و اشاره ای به مدلهای برنامه ریزی خطی کسری می‌گردد[۲]. شایان ذکر است برای آشنایی با برنامه ریزی هندسی [۳] به مراجعی مثل بازاراو همکاران (۲۰۰۶)ص۷۱۲ ،مک کورمیک(۱۳۸۳) ص ۴۱۷ و برای آشنا شدن با برنامه ریزی متمم خطی به منابعی نظیرفصل ۱۱ بازارا و همکاران (۲۰۰۶) ص ۶۵۵ می توان رجوع نمود

۶-۲ مسایل کوادراتیک[۴] یا درجه دوم (QPP)

به طور کلی هر گاه در یک تابع حاصل ضرب $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ ظاهر شود درجه آن $k_1+k_2+...+k_n$ میباشد، به عنوان نمونه: $x_1^2x_2$ از درجه سوم و x_1x_2 از درجه دوم(کوادراتیک) است. مدل‌های کوادراتیک مختلفند ودر اینجا مدل‌های کوادراتیکی که محدودیت‌های آن خطی و تابع هدف آنها از درجه دوم و شامل جملات $c_mx_m^2$و $c_{jk}x_jx_k$ ، c_jx_j باشد مد نظراست:

$$z = \sum c_j x_j + \sum\sum c_{jk} x_j x_k + \sum c_m x_m^2 + d$$

کد در آن c_j, c_{jk}, c_m, d اعداد اسکالرند.

این مدل با شرح فوق چنین قابل نشان دادن است:

$$\begin{aligned} &Min\, f(\boldsymbol{x}) = c^t\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^tQ\boldsymbol{x} + d \\ &\quad s.t. \\ &\quad A\boldsymbol{x}(\le,=,\ge)b \end{aligned}$$

که در آن

---

[۱] linear piece wise linearization

[۲] Fractional Linear Programming

[۳] Geometric Programming

[۴] ص ۶۶۷ بازارا و همکاران (۲۰۰۶)، ص ۴۳۵ مرحوم دکتر اصغر پور() ۱۳۸۱ ، ص۵۷۸ هلیه و لیبرمن(۱۹۶۸)ص۱۸۵ آوریل (۱۹۷۶) ص ۳۲۰ آوریل (۲۰۰۳)

A یک ماتریس m×n

b یک بردار m عنصری

c یک بردار n عنصری

d یک عدد اسکالر

Q یک ماتریس n×n متقارن یعنی در آن $Q_{jk} = Q_{kj}$.

x یک بردار n عنصری شامل متغیر های $x_1, ..., x_n$

توجه کنید:

=قبلاً در فصل اول دیدیم که اگر هیچ مقدار ویژه ماتریس Q منفی نباشد تابع کوادراتیک f(x) محدب خواهد بود.

=ضریب $\frac{۱}{۲}$ گاه به منظور سهولت عملیات بعدی برخی الگوریتم‌ها در مدل گنجانده می‌شود (اصغرپور،۱۳۸۱ص ۴۳۵).

=فرق این مدل با مدل برنامه ریزی خطی در تابع هدف است؛ جملات تابع هدف یا از درجه صفرند یا یک یا دو.

=الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک(QPP[۱]) ارائه شده است و نرم‌افزارهایی مثل لینگو نیز قادر به حل QPP اند. از جمله الگوریتم‌ها، الگوریتم ولف است. یک راه‌حل هم در کتاب دکتر اصغرپور (۱۳۸۱) ص ۴۳۵ ارائه شده است. برخی ازاین الگوریتم‌ها، اگر تابع هدف آنها محدب اکید باشند، جواب بهینه نهایی را بدست می‌دهند. (اصغر پور،۱۳۸۱ ص ۴۴۳) در غیر این صورت ممکن است جواب موضعی هم بدست نیاید. در اینجا شایان ذکر است که مطالعه مجدد قضیه ۵-۶ و۵-۷ در فصل ۵ که ارتباط با مسایل کوادراتیک دارد بی مناسبت نیست..

اگر مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک (QPP) به فرم

$$\begin{aligned} Min \quad & c^t x \frac{1}{2} x^t Q x \\ s.t. \quad & Ax = b \end{aligned}$$

---

[۱] Quadratic Progamming Problem

و ماتریس($A(m \times n)$ ماتریسی متقارن از مرتبهm، و معین مثبت روی $\{x : Ax = 0\}$ باشد، جواب یگانه این مسأله از طریق نوشتن وحل دستگاه خطی معادلات شرطهای KKT برای مساله بدست می‌آید (ص ۷۳۱ بازاراوهمکاران،۲۰۰۶ مسأله ۱۸-۱۱).

۶-۲-۱ روش ولف(Wolfe)درحل مسائل برنامه‌ریزی کوادراتیک با محدودیت خطی

در اینجا روش موسوم به روش ولف برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک (QPP) با محدودیت خطی آورده می شود. این روش با ذکر یک مثال، که در آن x_j ها باید غیرمنفی باشند، تشریح می‌گردد(به نقل از ص ۷۰۶ وینستون (۱۹۹۴). در این روش در ابتدا مسأله‌ای به کمک شرائطKKT ساخته شده و با فاز اول روش ۲ فاز برنامه ریزی خطی حل شده و سپس سعی در یافتن نقطه KKT می‌گردد.

شرح روش ولف در ضمن ذکریک مثال

روش ولف برای حل مدلهای کوادراتیک دارای محدودیت های خطی، شرایط کاروش کان تاکر را به صورت تعدادی رابطه خطی وتعدادی محدودیت غیر خطی(شامل حاصل ضرب چند زوج متغیر) در آورده، ازاین روابط یک مساله ساخته وآنرا شبیه فاز اول روش ۲-فاز سیمپلکس حل کرده و جواب آنرا جواب مدل کوادراتیک اعلام می‌کند. مثال زیر این روش را تشریح می‌کند.

مثال ۶-۱: مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} Min \quad & f(x) = -x_1 - x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \\ & s.t. \\ & g_1 : x_1 + x_2 \le 3 \\ & g_2 : 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ & \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

f و g_i ها مشتق‌پذیرند که لازم برای اعمال شرایط KKT است. ضوابط کافی بودن شروط کاروش کان تاکر درا ین جا برقرار می باشد زیرا:

تابع هدف یک تابع۲ متغیره محدب است(چرا؟) وتوجه کنید که محدودیت‌ها خطی‌اند و محدب محسوب می‌شوند، لذا هر نقطه که درشرایط KKT صدق کند طبق قضیه۴-۵ " شروط کافی بودن شرایطKKT " به طور قطع جواب بهینه مسأله فوق است. برای این حالت مسأله که x_jها غیرمنفی اند نقطه KKT علاوه بر شدنی بودن باید شرایطKKT مطابق زیر (از بخش ۴-۲-۳ برای NLP با x_jها ی غیرمنفی)صادق باشد.

$$۱)\ \nabla f(\bar{x}) + u_۱\nabla g_۱(\bar{x}) + u_۲\nabla g_۲(\bar{x}) + \cdots \geq ۰$$

$$۲)u_i\left[b_i - g_i(x)\right] = ۰ \qquad i = ۱,۲,...,m$$

$$۳)[\Delta \mathrm{f}(\overline{\mathrm{x}}) + \mathrm{u}_1\Delta \mathrm{g}_1(\overline{\mathrm{x}}) + ... + \mathrm{u}_\mathrm{m}\Delta \mathrm{g}_\mathrm{m}(\overline{\mathrm{x}})](\overline{x}_1,...,\overline{x}_\mathrm{n}) = ۰$$

$$٤)\mathrm{u}_i \geq ۰ \quad i = ۱,...,m$$

۵) $\overline{x}$در محدودیت ها صدق می‌کند

توجه کنید در روابط ۲و۳ به جای عبارات داخل کروشه می‌توان متغیرهای کمکی کمبود [۱] یا مازاد[۲] مربوط به محدودیت را گذاشت. در ضمن نقطه $\overline{x}$ چون باید شدنی باشد در محدودیتها هم باید صدق کند.

شرائط را می‌نویسیم (از قرار دادن علامت – روی u_i و x_j ها خودداری شده است).

شرط ۱)

$$\nabla f(x) + u_۱\nabla g_۱(x) + u_۲\nabla g_۲(x) \geq ۰$$

$$\begin{pmatrix} -1+x_1-x_2 \\ -1+2x_2-x_1 \end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix} 1 \\ +1 \end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x_1-x_2+u_1-2u_2 \\ -1+2x_2-x_1+u_1-3u_2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

or

$$-1+x_1-x_2+u_1-2u_2-e_1 = 0$$
$$-1-x_1+2x_2+u_1-3u_2-e_2 = 0$$

شرط۲)

$$۲)\ u_i\left[b_i - g_i(x)\right] = ۰ \qquad i = ۱,۲$$

به ازای i=۱

[۱] Slack

[۲] Surplus

با توجه به اینکه $x_1+x_2\le 3$ یا $x_1+x_2+s_1'=3$ یا $3-x_1-x_2=s_1'$ پس

$$u_1\left(3-x_1-x_2\right)=0\rightarrow u_1s_1'=0$$

در مورد i=۲

و به طور مشابه با توجه به اینکه $2x_1+3x_2-6\ge 0$ یا $2x_1+3x_2-6-e_1'=0$ یا

$2x_1+3x_2-6=e_1'$. پس:

$$u_2\left(-6+2x_1+3x_2\right)=0\rightarrow u_2\times e_2'=0$$

شرط۳)

$$\left(\nabla f\ (\bar{x})+u_1\nabla g_1(\bar{x})+u_2\nabla g_2(\bar{x})\right)\left(x_1\quad x_2\right)=0$$

$$\left(\begin{pmatrix}-1+x_1 & -x_2\\ -1-x_1+2x_2\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right)\left(x_1\quad x_2\right)=0\Rightarrow$$

or

$$\begin{pmatrix}-1+x_1 & -x_2+u_1-2u_2\\ -1-x_1+2x_2+u_1-3u_2\end{pmatrix}\left(x_1\quad x_2\right)=0$$

or

$$(-1+x_1\quad -x_2+u_1-2u_2)x_1=0\rightarrow e_1x_1=0$$
$$(-1-x_1+2x_2+u_1-3u_2)x_2=0\rightarrow e_2x_2=0$$

شرط۴)

$$u_1\ge 0$$
$$u_2\ge 0$$

شرط۵) شدنی بودن

برای شدنی بودن، $\overline{X}$ باید در محدودیت ها صدق کند

$$x_1+x_2\le 3\qquad\rightarrow x_1+x_2+s_1'=3$$
$$2x_1+3x_2\ge 6\qquad\rightarrow 2x_1+3x_2-e_2'=6$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

لذا با توجه به فهرست زیر برای علایم

شرح

$A_۱$	متغیر مصنوعی رابطه اول KKT جهت تهیه فرم استاندارد طبق الگوریتم سیمپلکس
$A_۲$	متغیر مصنوعی رابطه دوم KKT جهت تهیه فرم استاندارد طبق الگوریتم سیمپلکس
$A'_۲$	متغیر مصنوعی محدودیت دوم مدل جهت تهیه فرم استاندارد طبق الگوریتم سیمپلکس
$e_۱$	متغیر مازاد برای رابطه اول KKT $-1+x_1-x_2+u_1-2u_2\geq 0$
$e_۲$	متغیر مازاد برای برای رابطه دوم KKT $-1+2x_2-x_1+u_1-3u_2\geq 0$
$e'_۲$	متغیر مازاد محدودیت دوم مدل $g_2: 2x_1+3x_2\geq 6$
$s'_۱$	متغیر کمکی (کمبود)محدودیت اول مدل $g_1: x_1+x_2\leq 3$
u_i	ضریب لاگرانژ محدودیت i ا در مدل $i=۱,۲$
$\overline{X}$	نقطه KKT
x_j	متغیر های تصمیم در مدل $(j=۱,۲)$

تمام روابط مربوط به شرائط KKT چنین است

$$
\begin{aligned}
&x_1-x_2+u_1-2u_2-e_1=1\\
&2x_2-x_1+u_1-3u_2-e_2=1\\
&x_1-x_2+s_1^{'}=3\\
&2x_1+3x_2+e_2'=6\\
&x_1,x_2\geq 0 \qquad u_1,u_2\geq 0 \quad e_1,e_2\geq 0 \quad s_1^{'}\geq 0 \quad e_2^{'}\geq 0\\
&u_1s_1'=0 \quad , \quad u_2e_2'=0 \ , \ e_1x_1=0 \ , \ e_2x_2=0
\end{aligned}
$$

توجه کنید بجز ۴ رابطه ردیف آخر تمام روابط فوق یا خطی‌اند یا قیود نا منفی‌اند.
چهار رابطه آخر یعنی

$u_1s_1'=0 \quad , \quad u_2e_1'=0 \ , \quad e_1x_1=0 \ , \ e_2x_2=0$

شرائط کمک مکمل [۱] برای این مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی کوادراتیک (QPP) است.
بطور کلی برای یک QPP اینطور می‌توان شرائط کمک مکمل را توضیح داد:

متغیر اضافی e_i و متغیر x_i هر دو نمی‌توانند مثبت باشند.

---

۱) complementary slackness

متغیر کمبود یا اضافی محدودیت i ام و u_i نمی‌توانند هر دو مثبت باشند.
روش ولف برای یافتن نقطه‌ای که شرایط KKT را ارضاء کند (بجز شرایط کمک مکمل) یک نوع فاز اول از روش ۲ فاز سیمپلکس را بکار می‌گیرد.
به هر محدودیت KKT که متغیر پایه‌ای واضحی نداشته باشد یک متغیر مصنوعی اضافه می‌گردد. سپس سعی در کمینه‌سازی مجموع متغیرهای مصنوعی می‌گردد.

ارضاء شرائط کمک مکمل

برای اطمینان از اینکه جواب نهایی (با تمام متغیرهای مصنوعی= صفر) شرایط کمک مکمل گفته شده دربالا را ارضاء نماید، روش ولف متغیر ورودی را چنین انتخاب میکند تا تضمین لازم برای شرایط کمک مکمل داده شود(وینستون ، ۱۹۹۴ص۷۰۷) :

I)هیچ‌گاه عنصری را که باعث می‌شودهر دو متغیر e_i (از محدودیت i ام در روابط نوع ۱) و x_i پایه شوند به عنوان عنصر لولا(Pivot) انتخاب نکنید.

II)هیچگاه عنصری را که باعث شود متغیر **اضافی یا کمبود** i امین محدودیت ((e_i', s_i') و u_i را باهم وارد پایه شوند لولا قرار ندهید.

اعمال روش ولف

(وینستون ،۱۹۹۴ ص ۷۰۷) :

برای اعمال روش ولف به مثال فوق باید، مطابق مرحله اول روش ۲ فاز، یک مساله برنامه ریزی خطی با داشتن محدودیت های زیر بنویسیم

$$x_1 - x_2 + u_1 - 2u_2 - e_1 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 + u_1 - 3u_2 - e_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 + s_1' = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 - e_2' = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad u_1, u_2 \geq 0 \quad e_1, e_2 \geq 0 \quad s_1' \geq 0 \quad e_2' \geq 0$$

تابع هدف $Min w = A_1 + A_2 + A_2'$ است.

فرم استاندارد مطابق مرحله اول روش ۲ فاز چنین است:

$$
\begin{array}{llll}
w & & -A_1-A_2-A_2' & =0 \\
& x_1-x_2+u_1-2u_2-e_1 & +A_1 & =1 \\
& -x_1+2x_2+u_1-3u_2-e_2 & +A_2 & =1 \\
& x_1+x_2 & +s_1' & =3 \\
& 2x_1+3x_2 & -e_1' \quad +A_2' & =6
\end{array}
$$

حل با سیمپلکس

جدول $T.$ (آغازین)

		+٢	+٤	٢	−٥	−١	−١						
	w	x_1	x_2	u_1	u_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	A_1	A_2	A_2'	RHS
w	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	−١	−١	−١	٠
A_1	٠	١	−١	١	−٢	−١	٠	٠	٠	١	٠	٠	١
A_2	٠	−١	٢	١	−٣	٠	−١	٠	٠	٠	١	٠	١
s_1'	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٣
A_2'	٠	٢	٣	٠	٠	٠	٠	٠	−١	٠	٠	١	٦

برای اینکه جدول فوق جدول آغازین واقعی سمپلکس شود ضرایب متغیرهای A_2', A_2, A_1 باید در سطرw، صفر شوند.

برای اینکار (سطر چهار+ سطر دوم + سطر اول)+ سطر صفر قدیم= سطر صفر جدید

جدول $T.$ (آغازین واقعی)

		+٢	+٤	٢	−٥	−١	−١							
	w	x_1	x_2 ↓	u_1	u_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	A_1	A_2	A_2'	RHS	نسبت
w	١	٢	٤	٢	−٥	−١	−١	٠	−١	٠	٠	٠	٨	
A_1	٠	١	−١	٠	−٢	−١	٠	٠	٠	١	٠	٠	١	−
← A_2	٠	−١	(٢)	٠	−٣	٠	−١	٠	٠	٠	١	٠	١	٠/٥
s_1'	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٣	٣
A_2'	٠	٢	٣	−١	٠	٠	٠	٠	−١	٠	٠	١	٦	٢

دنباله از ص۷۰۸ و ۷۰۹ وینستون (۱۹۹۴)

حدول $T_۱$: اولین جدول برای روش ولف(از وینستون ،۱۹۹۴ ص۷۰۸)

	w	$x_{1\downarrow}$	x	u_1	u_2	e_1	e_2	$s_1^{'}$	e	A_1	A_2	A_2'	RHS	[illegible]
w	۱	٤	۰	۰	۱	–۱	۱	۰	–۱	۰	–۲	۰	٦	
A_1	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$	-$\frac{7}{2}$	–۱	-$\frac{1}{2}$	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	۰	[illegible]	۳
x_2	۰	-$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	-	۰	-$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	
$s_1^{'}$	۰	$\frac{3}{2}$	۰	-$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰	۰	-$\frac{1}{2}$	۰	[illegible]	۱/۷
A_2' ←	۰	($\frac{7}{2}$)	۰	-$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$	۰	–۱	۰	-$\frac{1}{2}$	۱	[illegible]	۱/۲۸

جدول $T_۲$جدول دوم روش ولف(ازوینستون ،۱۹۹٤جدول ۱۱ ص۷۰۸)

	w	x_1	x_2	u_1	u_2	e_1	e_2	$s_1^{'}$	↓e_2'	A_1	A_2	A_2'	RHS	[illegible]
W	۱	۰	۰	$\frac{12}{7}$	$\frac{-29}{7}$	–۱	$\frac{-5}{7}$	۰	$\frac{1}{7}$	۰	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	-$\frac{6}{7}$	
A_1	۰	۰	۰	$\frac{12}{7}$	$\frac{-29}{7}$	–۱	$\frac{-5}{7}$	۰	$\frac{1}{7}$	۱	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	٦
x_2	۰	۱	۱	$\frac{2}{7}$	$\frac{-6}{7}$	۰	$\frac{-2}{7}$	۰	$\frac{-1}{7}$	۰	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	—
$s_1^{'}$ ←	۰	۰	۰	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	۰	$\frac{-1}{7}$	۱	$\frac{۳}{۷}$	۰	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{٤}{۳}$
x_1	۰	۰	۰	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	۰	$\frac{3}{7}$	۰	$\frac{-2}{7}$	۰	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{9}{7}$	—

گر چه در جدول $T_۲$ فوق ضریب مربوط به $u_۱$ بیشترین مقدار در سطر صفر را به خود اختصاص داده است $(\frac{۱۲}{۷})$ و $u_۱$ باید وارد پایه می شد اما بجای آن متغیری باید وارد شود که شرط ۲ را به بهم نزند(s'_1,u_1 نباید باهم در پایه باشند) لذا e'_2 وارد و s'_1 را خارج شده است.

جدول $T_۳$

	w	$x_۱$	$x_۲$	↓ u_1	u_2	e_1	e_2	s'_1	e'_2	A_1	A_2	A'_2	RHS
w	۱	۰	۰	$\frac{۵}{۳}$	-۴	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	-۱	$\frac{۲}{۳}$
A_1 ←	۰	۰	۰	$\frac{۵}{۳}$	-۴	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$
$x_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	-۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۴}{۳}$
e'_2	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	-۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	-۱	$\frac{۴}{۳}$
$x_۱$	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۵}{۳}$

حال u_1به جای $A_۱$ وارد پایه می گردد:

جدول $T_۴$جدول نهایی

	w	$x_۱$	$x_۲$	u_1	u_2	e_1	e_2	s'_1	e'_2	A_1	A_2	A'_2	RHS
w	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	-۱	۰
$u_۱$	۰	۰	۰	۱	$-\frac{۱۲}{۵}$	$-\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$
$x_۲$	۰	۰	۱	۰	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۶}{۵}$
e'_2	۰	۰	۰	۰	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱۲}{۵}$	۱	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	-۱	$\frac{۶}{۵}$
$x_۱$	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۰	$\frac{۹}{۵}$

جدول $T_۴$ نهایی بوده وجواب بهینه این مساله کوادراتیک دارای محدودیت خطی باروش ولف برابربا $x_2^* = \frac{6}{5}$ $x_1^* = \frac{9}{5}$ می باشد و $u_2^* = 0$ $u_1^* = \frac{2}{5}$. پایان مثال ▲

تمرینات

مطلوبست حل مساله های کوادراتیک زیر با روش ولف

۲)	۱)
$Min \quad f(x) = 2x_1^2 - x_2$ $s.t.$ $2x_1 - x_2 \le 1$ $x_1 + x_2 \le 1$ $x_1, x_2 \ge 0$	$Min \quad f(x) = -4x_1 - 10x_2 + x_1^2 + x_2^2$ $s.t.$ $-x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
۳) $Min \quad f(x) = -3x_1 - 5x_2 + 2x_1^2 + x_2^2$ $s.t.$ $3x_1 + 2x_2 \le 6$ $4x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 \,\&\, x_2 \ge 0$	

۶-۳مدل‌های تفکیک پذیر Separable Programming (S.P.)[1]

تابع چند متغیره را تفکیک‌پذیر گویند اگر آنرا بتوان برحسب مجموع چند تابع جداگانه یک متغیره نوشت. مدل‌های مساله NLP، تفکیک پذیر طوری است که تابع هدف و توابع محدودیت آن برحسب **مجموع** چند تابع جداگانه، که هر کدام یک تابع یک متغیره است، بیان می‌شود. واضح است توابع خطی توا بعی تفکیک‌پذیرند. در مسایل تفکیک شدنی اجزای تابع هدف f مربوط به متغیر های nگانه را با $f_1, f_2, \dots, f_j, \dots, f_n$ و اجزای توابع m محدودیت (g_iها) مربوط به متغیر های nگانه را با $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}$ به ازای $(i = 1, \dots, m)$ نشان می دهیم.

$$P$$

$$Max\ or\ Min\ f_1(x_1)+\dots f_n(x_n)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i \equiv g_{i1}(x_1)+\dots+g_{in}(x_n) \le b_i \qquad i=1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j=1,2,\dots,n$$

مثال ۶-۲ :مطلوبست تفکیک توابع مساله زیر(وینستون ،ص۱۹۹۴ص۷۱۱)

$$Max\ f(x)=x_1(30-x_1)+x_2(35+x_2)-x_1^2-2x_2^2$$
$$s.t.$$
$$x_1^2+2x_2^2 \le 250$$
$$x_1+x_2 \le 20$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

در اینجا

$$f_1(x_1)=30x_1-2x_1^2$$
$$f_2(x_2)=35x_2-x_2^2$$

---

[1] ص ۶۸۶-۶۸۴ بازارا(۲۰۰۶)، ص ۷۱۰وینستون (۱۹۹۴) ،ص۴۲۶ مرحوم دکتر اصغر پور(۱۳۸۱)،ص ۵۸۱ هلیه و لیبرمن(۱۹۶۸)

$$g_{11}(x_1)=x_1 \qquad g_{12}(x_2)=2x_2^2$$
$$g_{21}(x_1)=x_1 \qquad g_{22}(x_2)=x_2$$

و مدل تفکیک شده چنین است:

$$Max\ f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$$
$$s.t.$$
$$g_{11}(x_1)+g_{12}(x_2)\le 250$$
$$g_{21}(x_1)+g_{22}(x_2)\le 20$$

پایان مثال ▲

۶-۳-۱ تفکیک پذیر کردن توابع

لازم به ذکراست که برخی از توابع ظاهراً غیرقابل تفکیک با استفاده ازپاره‌ای از تبدیلات نظیرموارد زیر تفکیک پذیر می‌گردند(اصغرپور،۱۳۸۱ص۴۳۴)

شرط x_j	عبارت بظاهر تفکیک نشدنی	جایگزینی با عبارت تفکیک‌پذیر	محدودیت اضافی
-	$x_1\ x_2$	$x_1x_2=y_1^2-y_2^2$	$y_1=\frac{x_1+x_2}{2} \quad y_2=\frac{x_1-x_2}{2}$
$x_1>0$ $x_2>0$	$x_1\ x_2$	$x_1x_2=y$	$\log y=\log x_1+\log x_2$
ندارد	$a^{x_1+x_2^2}$	$a^{x_1+x_2^2}=y$	$\log y=\log a^{x_1+x_2^2}$ یا $\log y-(x_1+x_2^2)\log a=0$
$x_j>0$	$(x_1)(x_2^2)$	$x_1\times x_2^2=y$	$\log y=\log x_1+2\log x_2$

مثال ۶-۳:

مطلوبست تفکیک عبارت $\frac{x_1x_2^2}{(1+x_3)^2}$ با قید مثبت بودن هر سه متغیر.

حل: این عبارت را به Y نشان داده و می نویسیم:

$$logY=log x_1+2\,log x_2-2\log(1+x_3),\quad x_1>0\quad x_2>0\quad x_3\ge 0$$

پایان مثال▲

۶-۳-۲ حل مسایل تفکیک‌پذیر(SP) بی محدودیت با قید فاصله روی متغیرها

اگر محدودیت نداشته باشیم مینیمم $f_n(x_n),\ldots,f_1(x_1)$ را جداگانه بدست می‌آوریم. جواب مینیمم کلی f برابر حاصل جواب مینیمم تک‌تک f_i هاست. اگر f_j ها مقعر باشند برای یافتن ماکزیممِ f کلی که مقعر است، ماکزیمم f_j ها را بدست می‌آوریم.

در ضمن در مسایل تفکیک‌پذیر اگر تک‌تک f_j ها محدب باشند، تابع کلی هم محدب خواهد بود و برای بررسی تحدب مسائل ۲ متغیره توجه داشته باشید که اگر دترمینان هشیان تابع f و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ ها منفی نباشد، تابع f محدب خواهد بود.

۶-۳-۳ حل مسأله های تفکیک‌پذیر(SP) محدودیت‌دار

یک راه حل مسأله‌های قابل تفکیک (S.P.) تقریب زدن هر $f_j(x_j), g_{ij}(x_j)$ با توابع خطی قطعه به قطعه[1]وحل مسأله برنامه ریزی حاصل با سیمپلکس است که ذیلاً به آن پرداخته می شود.

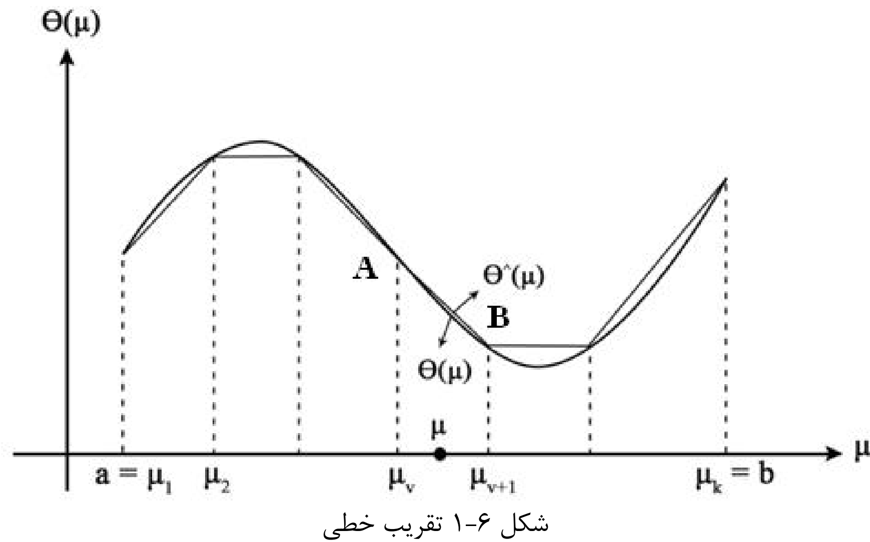
۶-۳-۳-۱ خطی سازی قطعه به قطعه برای تقریب یک مسأله غیر خطیSP

چگونه یک مسأله خطی که مسأله تفکیک پذیری(SP) همانند مسأله P در بخش ۶-۳ را تقریب می‌زند تعریف نماییم؟

مسأله خطی جدید با جایگزینی هر تابع غیرخطی در مسأله P با یک تابع خطی قطعه به قطعه بدست می‌آید.

برای تشریح موضوع یک تابع غیرخطی پیوسته مثل θ از متغیر μ را در نظر بگیرید(شکل زیر). فرض کنیدکه مقادیرμ در فاصله $[a \quad b]$ مدنظرباشد. تابع غیرخطی θ را می‌خواهیم با تابع خطی $\hat{\theta}$ تقریب بزنیم. فاصله $[a \quad b]$ را به زیر فاصله‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم با نقاط بینابینی(نقاط گسستگی)[2] $\mu_2, \mu_3, \ldots.$ که در شکل زیر دیده می‌شود.

---
[1] piece- wise linear
[2] break points = grid points



شکل ۶-۱ تقریب خطی

توجه:

- زیرفاصله‌ها لزوماً هم‌طول نیستند.

- هرچه تعداد زیرفاصله بیشتر شود دقت تقریب بالاتر می‌رود.

تابع θ را بازای هرنقطه متعلق به یک زیرفاصله به صورت ترکیب محدبی از نقاط ابتدا و انتهای زیرفاصله می‌نویسیم.

به عنوان مثال دو نقطه $A\,\Big|_{\theta(\mu_v)}^{\mu_v}$, $B\,\Big|_{\theta(\mu_{v+1})}^{\mu_{v+1}}$ را روی منحنی در نظر بگیرید. مختصات افقی(μ) هریک از نقطه های بین B,A در بازه $[\mu_v \quad \mu_{v+1}]$ واقع بوده و به صورت ترکیب خطی (محدب) از نقاط ابتداو انتهای بازه قابل نوشتن است:

$$\mu=\lambda_1\mu_v+\lambda_2\mu_{v+1} \quad \lambda_1+\lambda_2=1 \quad \text{یا} \quad \mu=\lambda\mu_v+(1-\lambda)\mu_{v+1} \quad 0\le\lambda\le1$$

$\theta(\mu)$ یعنی مقدار تابع در این نقطه هم نیز بصورت ترکیب محدب زیر قابل تقریب است. این مقدار را با $\hat{\theta}(\mu)$ نشان می دهیم و داریم:

$$\hat{\theta}(\mu)=\lambda\theta(\mu_v)+(1-\lambda)\theta(\mu_{v+1}) \qquad 0\le\lambda\le1$$

یا

$$\hat{\theta}(\mu)=\lambda_1\theta(\mu_v)+\lambda_2\theta(\mu_{v+1}) \qquad \lambda_1+\lambda_2=1$$

$\hat{\theta}(\mu)$ در واقع عرض نقطه ای با طول μ از پاره خط AB است.

اثبات

در زیر نشان داده شده که اگر طول یک نقطه از پاره خطی مثل AB را به صورت ترکیب خطی $\lambda_1\mu_v+\lambda_2\mu_{v+1}$ ازطول نقاط ابتداو انتهای آن بنویسیم عرض این نقطه به صورت ترکیب خطی $\lambda_1\theta(\mu_v)+\lambda_2\theta(\mu_{v+1})$ ازطول نقاط ابتداو انتهای آن قابل نوشتن است:

معادله پاره خط AB چنین است:

$$\frac{y-\theta(\mu_v)}{x-\mu_v}=\frac{\theta(\mu_{v+1})-\theta(\mu_v)}{\mu_{v+1}-\mu_v}$$

طول یک نقطه از این پاره خط یک ترکیب محدب است و با جایگذاری $x=\lambda_1\mu_v+\lambda_2\mu_{v+1}$ خواهیم داشت:

$$\frac{y-\theta(\mu_v)}{\lambda_1\mu_v+\lambda_2\mu_{v+1}-\mu_v}=\frac{\theta(\mu_{v+1})-\theta(\mu_v)}{\mu_{v+1}-\mu_v}\Rightarrow$$

$$\frac{y-\theta(\mu_v)}{\lambda_2(\mu_{v+1}-\mu_v)}=\frac{\theta(\mu_{v+1})-\theta(\mu_v)}{\mu_{v+1}-\mu_v}\Rightarrow$$

$$y=\lambda_1\theta(\mu_v)+\lambda_2\theta(\mu_{v+1})$$

پایان اثبات■

مثال ۶-۴:

هر مقدار μ در بازه $1\le\mu\le3$، به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\mu=1\lambda_1+3\lambda_2 \qquad \lambda_1+\lambda_2=1$$

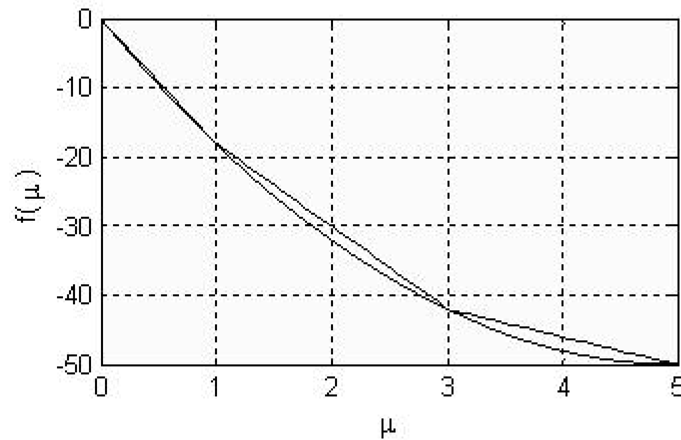
و مقدار تابع برای تابع $f(\mu)=۲\mu^۲-۲۰\mu f(\mu)$ به ازای یک نقطه در بازه $1\le\mu\le3$ برحسب نقاط مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه چنین قابل تقریب است:

$$\hat{f}(\mu)=\lambda_1 f(1)+\lambda_2 f(3) \qquad 1\le\mu\le3$$

$$f(۱)=۲(۱)^۲-۲۰(۱)=-۱۸$$

$$f(۳)=۲(۳)^۲-۲۰(۳)=-۴۲$$

$$\hat{f}(\mu)=-18\lambda_1-42\lambda_2 \qquad 1\le\mu\le3$$



شکل ۶-۲ نقاط گسستگی

و بطور کلی برای مواردی نظیر تابع این مثال در بازه $5 \geq \mu \geq 0$ ونقاط بینابینی۳و۱ $f(\mu)$ را برحسب ترکیب خطی از نقاط ۵،۳،۱،۰ با مقادیر تابع مشخص شده زیر

$$f(0)=0, f(1)=-18=, f(3)=-42, f(5)=-50$$

این چنین قابل تقریب است:

$$\hat{f}(\mu)=\lambda_0 f(0)+\lambda_1 f(1)+\lambda_2 f(3)+\lambda_3 f(5) \quad \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

$$\hat{f}(\mu)=0\lambda_0-18\lambda_1-42\lambda_2-50\lambda_3 \qquad 0\leq\mu\leq 5$$

و μ نیز به صورت ترکیب خطی زیر از نقاط بازه به صورت زیر قابل بیان است.

$$\mu=0\lambda_0+1\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3$$

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

$$\lambda_j\geq 0 \qquad j=0,1,2,3$$

در اینجا مطرح می‌شود که λ_jها باید اصل موسوم به هم‌جواری را نیز ارضاء نمایند. بر طبق این اصل در میان λ_jها ۲ مقدار باید مثبت باشند (و نه بیشتر) و در ضمن این دو همجوار باشند.پایان مثال▲

۶-۳-۳-۲ اصل مجاور بودن(هم‌جواری)[1]

شرط یا اصل موسوم به هم‌جواری یا مجاور بودن بیان می کند**که:**

[1] Adjency Assumption(ص ۴۲۹ اصغرپور ۱۳۸۱، وینستون،۱۹۹۴ص ۷۱۳)

برای کم نشدن دقت در تقریب خطی قطعه به قطعه، در تقریب یک نقطه از تابع به کمک ترکیب محدب چند نقطه، ۲ ارزش(و نه بیشتر) از λ_j ها بایدمثبت شود و متوالی باشند یعنی یا λ_{j+1}, λ_j یا λ_{j-1}, λ_j. اگر ۲ ارزش غیر متوالی مثبت باشد تقریب خوبی نخواهیم داشت. این موضوع طی یک قضیه در مراجعی نظیر بازارا و همکاران(۲۰۰۶) ص ۶۸۷به اثبات رسیده است. اگراصل همجواری تأمین نشود و ارزش‌های دو مقدار (دوλ_j) غیرمجاور مثلاً λ_2, λ_0 مثبت شوند دقت تقریب کم خواهد شد[1].

اصل همجواری در تقریب مسأله کمینه سازی که در آن f_j ها محدب اکید و g_{ij} ها محدب باشند بصورت اتوماتیک تأمین می‌شود امادر غیر آن صورت بایداز یک مکانیزم درحل مسأله خطی با سیمپلکس بهره گرفت(اصغرپور،۱۳۹۱ ص۴۳۴)

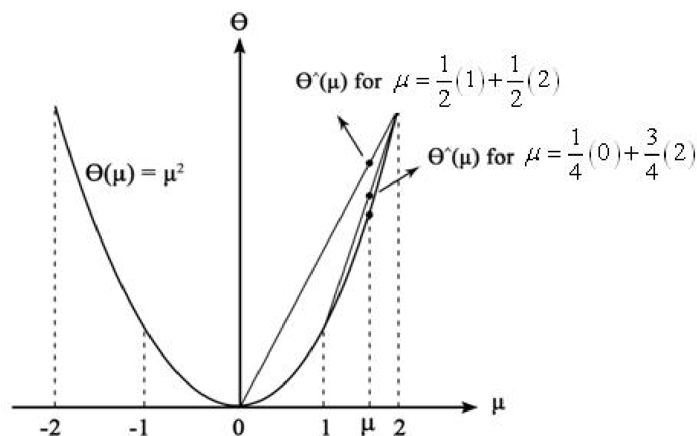
توضیح اصل هم جواری با مثال

(ص ۶۸۵ بازارا و همکاران ،۲۰۰۶)

توجه کنید که در استفاده از تقریب خطی فوق الذکر یک مشکل اینست که نقطه μ در فاصله $[\mu_v , \mu_{v+1}]$ بصورت ترکیب محدب دو نقطه غیرمجاور یا بیشتر نوشته شود(عدم رعایت اصل هم جواری). برای توضیح به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶-۵:

تابع $\theta(\mu) = \mu^2$ شکل زیررا در نظر بگیرید که برای $-2 \le \mu \le 2$ رسم شده است.



شکل ۶-۳ تقریب خطی مربوط به مثال ۶-۵

---

[1] به شرط یا اصل مجاور بودن در اصغر پور(۱۳۸۱) ص ۴۳۴ و قاعده restricted basis entry rule در بازاراو همکاران (۲۰۰۶) ص ۶۸۷ می توانید مراجعه کنید.

$\mu = ۱.۵$ را به ۲صورت $\left(\frac{1}{2}\right)(1)+\left(\frac{1}{2}\right)(2)$ و $\frac{1}{4}(0)+\frac{3}{4}(2)$ می‌توان نوشت.

مقدار دقیق تابع در $\mu = 1.5$ برابر $\theta(1.5) = 1.5^2 = 2.25$

مقدار تابع طبق تقریب اول $\hat{\theta}(\mu) = \frac{1}{2}\theta(1) + \frac{1}{2}\theta(2) = 2.5$

مقدار تابع طبق تقریب دوم $\hat{\theta}(\mu) = \frac{1}{4}\theta(0) + \frac{3}{4}\theta(2) = 3$

واضح است که تقریب اول که از نقاط بینابینی مجاور استفاده می‌کند تقریب بهتری می‌دهد. در تقریب دوم، دو λ_j که مثبت اند همجوار نیستند[۱]. پایان مثال▲

مثال ۶-۶:

مطلوبست حل مسأله زیر به کمک تقریب خطی.

$$Max\ f(x) = 5x_1 - x_1^2 + 3x_2 - x_2^2$$

$$s.t.$$

$$g_1: \quad 2x_1^4 + x_2 \le 32$$

$$g_2: \quad x_1 + 2x_2^2 \le 32$$

$$0 \le x_1 \le 2$$

$$0 \le x_2 \le 4$$

حل:

بازه برای x_1 $[0 \quad 2]$ و برای x_2 $[0 \quad 4]$ می باشد.توابع مسأله تفکیک پذیرو وچنین قابل تفکیک اند:

$$f_1(x_1) = 5x_1 - x_1^2$$

$$f_2(x_2) = 3x_2 - x_2^2$$

$$g_{11}(x_1) = 2x_1^4 \qquad g_{12}(x_2) = x_2$$

$$g_{21}(x_1) = x_1 \qquad g_{22}(x_2) = 2x_2^2$$

برای بازه مربوط به x_1 یعنی [۰ ۲] نقطه بینابینی ۱ را در نظر می‌گیریم(شکل ۶-۴).

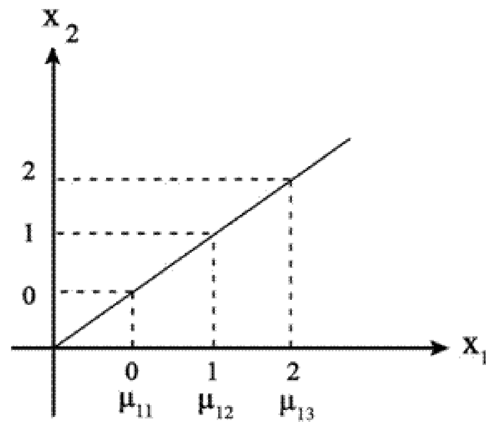
با قرار دادن $\mu_{11} = 0$ $\mu_{12} = 1$ $\mu_{13} = 2$ هر نقطه در $0 \le x_1 \le 2$

باترکیب‌خطی $x_1 = \sum_{k=1}^{3} \mu_{1k}\lambda_{1k}$ یا $x_1 = 0\lambda_{11} + 1\lambda_{12} + 2\lambda_{13}$ و $\sum_{k=1}^{3} \lambda_{1k} = 1$

---

[۱] مطالعه قضیه ص ٦٨٨ بازارا(٢٠٠٦) توصیه می شود.

قابل نمایش است.



شکل ۶-۴

مقادیر توابع تفکیک شده برای متغیر x_1 در جدول زیر داده شده است

مقادیر توابع تفکیک شده به ازای نقاط زیر فاصله برای متغیر x_1						
k	μ_{1k}	$f_1(\mu_{1k})$	$g_{11}(\mu_{1k})$	$g_{21}(\mu_{1k})$	λ	مقدار λ_{1k} (حاصل از حل)
۱	۰	۰	۰	۰	λ_{11}	۰
۲	۱	٤	۲	۱	λ_{12}	$\frac{۱}{۳۰}$
۳	۲	٦	۳۲	۲	λ_{13}	$\frac{۲۹}{۳۰}$

پس تقریب تابع f_1 و g_{11}و g_{21}چنین است:

$$f_1(x1) \approx f(0)\lambda_{11} + f(1)\lambda_{12} + f(2)\lambda_{13} = 0\lambda_{11} + 4\lambda_{12} + 6\lambda_{13}$$

$$g_{11}(x_1) \approx g_{11}(0)\lambda_{11} + g_{11}(1)\lambda_{12} + g_{11}(2)\lambda_{13} = 0\lambda_{11} + 2\lambda_{12} + 32\lambda_{13}$$

$$g_{۲۱}(x_۱) \approx g_{۲۱}(۰)\lambda_{۱۱} + g_{۲۱}(۱)\lambda_{۱۲} + g_{۲۱}(۲)\lambda_{۱۳} = ۰\lambda_{۱۱} + ۱\lambda_{۱۲} + ۲\lambda_{۱۳}$$

و برای بازه مربوط به متغیر $x_۲$ یعنی [۴ ۰] نقاط گسستگی۱،۲و۳ را برمی‌گزینیم. هر نقطه در فاصله $0 \le x_2 \le 4$ با

$$x_۲ = ۰\lambda_{۲۱} + ۱\lambda_{۲۲} + ۲\lambda_{۲۳} + ۳\lambda_{۲۴} + ۴\lambda_{۲۵}$$

$$x_۲ = \sum_{k=۱}^{۵} \mu_{۲k}\lambda_{۲k} \qquad \sum_{k=۱}^{۵} \lambda_{۲k} = ۱$$ یا

قابل نمایش است.

مقادیر توابع تفکیک شده به ازای نقاط زیر فاصله مربوط به $x_۲$ در جدول زیر آمده است.

k	$\mu_{۲k}$	$f_۲(\mu_{۲k})$	$g_{۱۲}(\mu_{۲k})$	$g_{۲۲}(\mu_{۲k})$	λ	مقدار بهینه $\lambda_{۲k}$ (حاصل از حل)
۱	۰	۰	۰	۰	$\lambda_{۲۱}$	۰
۲	۱	۲	۱	۲	$\lambda_{۲۲}$	۱
۳	۲	۲	۲	۸		۰
٤	۳	۰	۳	۱۸		۰
٥	٤	−٤	٤	۳۲		۰

پس تقریب تابع $f_۲$ چنین است:

$$f_۲(x_۲) \approx f(۰)\lambda_{۲۱} + f(۱)\lambda_{۲۲} + f(۲)\lambda_{۲۳} + f(۳)\lambda_{۲۴} + f(۵)\lambda_{۲۵}$$
$$= 0\lambda_{21} + 2\underset{1}{\lambda_{22}} + 2\lambda_{23} + 0\lambda_{24} - 4\lambda_{25}$$

و برای $g_{۲۲}$ و $g_{۱۲}$:

$$g_{۱۲} \approx g_{۱۲}(۰)\lambda_{۲۱} + g_{۱۲}(۱)\lambda_{۲۲} + g_{۱۲}(۲)\lambda_{۲۳} + g_{۱۲}(۳)\lambda_{۲۴} + g_{۱۲}(۵)\lambda_{۲۵}$$

$$= ۰\lambda_{۲۱} + ۱\lambda_{۲۲} + ۲\lambda_{۲۳} + ۳\lambda_{۲۴} + ۴\lambda_{۲۵}$$

$$g_{۲۲} \approx g_{۲۲}(۰)\lambda_{۲۱} + g_{۲۲}(۱)\lambda_{۲۲} + g_{۲۲}(۲)\lambda_{۲۳} + g_{۲۲}(۳)\lambda_{۲۴} + g_{۲۲}(۵)\lambda_{۲۵}$$
$$= ۰\lambda_{۲۱} + ۲\lambda_{۲۲} + ۸\lambda_{۲۳} + ۱۸\lambda_{۲۴} + ۳۲\lambda_{۲۵}$$

لذا مدل تقریب خطی مساله چنین است:

$$Max\ z = 0\lambda_{11} + 4\lambda_{12} + 6\lambda_{13} + 0\lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 2\lambda_{23} + 0\lambda_{24} - 4\lambda_{25}$$

$$s.t.\quad 0\lambda_{11} + 2\lambda_{12} + 32\lambda_{13} + 0\lambda_{21} + 1\lambda_{22} + 2\lambda_{23} + 3\lambda_{24} + 4\lambda_{25} \le 32$$

$$0\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{13} + 0\lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 8\lambda_{23} + 18\lambda_{24} + 32\lambda_{25} \le 32$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} = 1$$

$$\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + \lambda_{24} + \lambda_{25} = 1$$

$$\lambda_{jk} \ge 0 \qquad j = 1,2 \qquad k = 1,...,5$$

Adjency Assumption

نتیجه حل مسئله برنامه ریزی خطی فوق با سیمپلکس :

$$z^* = 11.73 \qquad \lambda_{12}^* = \frac{1}{30} \qquad \lambda_{13}^* = \frac{29}{30} \qquad \lambda_{22}^* = 1$$

بقیه λ_{1k} و λ_{2k}ها صفرند.

بنا بر اصل همجواری برای هر x_j؛ دو λ_{jk} نباید مثبت باشد مگر اینکه مجاور باشند. در اینجا دو مقدار مجاور مثبت برای λ بدست آمده پس اصل همجواری رعایت شده است.

$$x_1^* \cong \sum_{k=1}^{3}(\mu_{1k})(\lambda_{1k}^*) = 0\times 0 + (1)\left(\frac{1}{30}\right) + 2\times\frac{29}{30} \cong 1.97$$

$$x_2^* \cong \sum_{k=1}^{5}(\mu_{2k})(\lambda_{2k}^*) = 0 + \mu_{22}\times\lambda_{22}^* = 1\times 1 = 1$$

برای یافتن مقدار تابع هدف مساله اصلی ، x_2^*, x_1^* را در تابع هدف آن می‌گذاریم[1]:

$$f(x) = 5x_1 - x_1^2 + 3x_2 - x_2^2$$

$$f^* \cong 5\times 1.97 - (1.97)^2 + (3)(1) - (1)^2 \cong 7.97$$

حل مساله اصلی با لینگو

مدل

```
model:
max=۵*x۱-x۱^۲+۳*x۲-x۲^۲;
۲*x۱^۴+x۲<=۳۲;x۱+۲*x۲<=۳۲;x۱<=۲;x۲<=۴;end
```

نتیجه: $x_1^* \cong$ ۱,۹۷۶ ، $x_2^* \cong$ ۱,۴۹۱ ومقدار تابع هدف برابر ۸,۲۲۶. پایان مثال ▲

---

۱ مطالعه صفحات ۷۱۵-۷۱۰ وینستون (۱۹۹۴) مناسب است.

مثال ۶-۷: مطلوبست حل مساله تفکیک شدنی زیر

$$Min \quad f(x) = 6x_1 - 2x_1^2 + 5x_2 + 3x_2^2$$
$$s.t.$$
$$3x_1^3 - 2x_2 \le 6$$
$$x_1^4 + 3x_2^2 \le 20$$
$$0 \le x_1 \le 4$$
$$0 \le x_2 \le 6$$

حل[1]

$$f_1(x_1) = 6x_1 - 2x_1^2$$
$$f_2(x_2) = 5x_2 + 3x_2^2$$
$$g_{11}(x_1) = 3x_1^3, \quad g_{12}(x_2) = -2x_2,$$
$$g_{21}(x_1) = x_1^4, \quad g_{22}(x_2) = 3x_2^2$$

مقادیر توابع تفکیک شده به ازای نقاط x_1 در زیر فاصله[۴ ۰] :

k	μ_{1k}	$f_1(\mu_{1k})$	$g_{11}(\mu_{1k})$	$g_{21}(\mu_{1k})$	λ	بهینه λ_{1k}
۱	۰	۰	۰	۰	λ_{11}	۰.۹٦۸۷٥
۲	۱	٤	۳	۱	λ_{12}	۰
۳	۳	۰	۸۱	۸۱	λ_{13}	۰
٤	٤	−۸	۱۹۲	۲٥٦	λ_{14}	۰.۰۳۱۲٥

مقادیر توابع تفکیک شده به ازای نقاط x_2 در بازه[۶ ۰] :

k	μ_{2k}	$f_2(\mu_{2k})$	$g_{12}(\mu_{2k})$	$g_{22}(\mu_{2k})$	λ	مقدار بهینه λ_{2k}
۱	۰	۰	۰	۰	λ_{21}	۱
۲	۲	۲۲	−٤	۱۲	λ_{22}	۰
۳	٤	٦۸	۸−	٤۸	λ_{23}	۰
٤	٦	۱۳۸	۱۲−	۱۰۸	λ_{24}	۰

[1] توسط مهندس مسعود حاج غنی دانش آموخته کارشناسی وارشد دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان

حال مساله برنامه ریزی خطی زیر بایدحل شود:

$$MinZ$$
$$= 0\lambda_{11} + 4\lambda_{12} + 0\lambda_{13} - 8\lambda_{14} + 0\lambda_{21} + 22\lambda_{22} + 68\lambda_{23} + 138\lambda_{24}$$
$$s.t.$$
$$0\lambda_{11} + 3\lambda_{12} + 81\lambda_{13} + 192\lambda_{14} + 0\lambda_{21} - 4\lambda_{22} - 8\lambda_{23} - 12\lambda_{24} \leq 6$$

$$0\lambda_{11} + 1\lambda_{12} + 81\lambda_{13} + 256\lambda_{14} + 0\lambda_{21} + 12\lambda_{22} + 48\lambda_{23} + 108\lambda_{24} \leq 20$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = 1$$
$$\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = 1$$
$$x_{jk} \geq 0 \quad j = 1,2 \quad k = 1,2,3,4$$

جواب این مساله با استفاده از لینگو

$$\lambda_{11}^* = 0.96875 \qquad \lambda_{12}^* = \lambda_{13}^* = 0 \qquad \lambda_{14}^* = 0.03125$$
$$\lambda_{21}^* = 1 \qquad \lambda_{22}^* = \lambda_{23}^* = \lambda_{24}^* = 0$$

طبق اصل همجواری اگر برای یک متغیر، دو مقدار λ_j مثبت شوند(وینستون،۱۹۹۴، ص ۷۱۳) آندو باید مجاور باشند. چون دو λ مثبت یعنی λ_{14} وλ_{11} غیر هم جوارند شرط همجواری نقض شده است.. در ادامه با توجه به نزدیکی مقدار این دو بترتیب به صفر ویک, آنها را چنین قرار می دهیم:

$$\lambda_{11}^* = 1 \quad \lambda_{12}^* = \lambda_{13}^* = \lambda_{14}^* = 0$$

و لذا:

$$x_1^* = \sum_{k=1}^{4} \mu_{1k}\lambda_{1k} = 0 \times 1 = 0$$
$$x_2^* = \sum_{k=1}^{5} \mu_{2k}\lambda_{2k} = 0 \times 1 = 0$$
$$f(x) = 6x_1 - 2x_1^2 + 5x_2 + 3x_2^2 \rightarrow f^*(x) = 0$$ پایان مثال ▲

۶–۳–۳ –۳ تقریب با فرم δ در مقابل تقریب با فرم λ

دیدید که تقریب تابعی مثل تابع شکل ۶-۱ این چنین شد:

$$\hat{\theta}(\mu) = \sum_{v=1}^{k} \lambda_v \theta(\mu_v) \qquad \sum \lambda_v = 1 \quad \lambda_v \geq 0 \quad v = 1, \dots, k$$

که در آن

حداکثر دو تا از λ_{ν} ها باید مثبت واین ۲باید مجاور باشند تا تقریب خطی خوبی داشته باشیم. این تقریب به تقریب با فرم λ در خطی سازی مدلهای تفکیک پذیر[۱] شهرت دارد. البته تقریبی هم با نام فرم δ برای خطی سازی این نوع مدلها وجود داردکه در مراجعی نظیرمارتل وکوول[۲](۱۹۸۰) ومک کارل و اونال[۳](۱۹۸۹) آمده است.

۶-۴ مدل‌های برنامه‌ریزی کسری خطی[۴]

در خاتمهٔ این بخش شایسته است که گفته شود برخی از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی عملی، با بهینه‌سازی یک تابع هدف به صورت خارج قسمت دو تابع خطی چندمتغیره یعنی $f(\mathbf{x}) = \frac{f_{۱(\mathbf{x})}}{f_{۲(\mathbf{x})}}$مشروط به تعدادی محدودیت خطی سروکار دارد که از جمله مسایل کلاسیک بوده و به مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی شهرت داشته و تعمیم برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.

این نوع بهینه‌سازی در مراجعی مثل بازارا و همکاران (۲۰۰۶) ص ۷۰۶، آوریل (۱۹۷۶) ص ۱۷۹ توضیح داده شده است. از جمله حوزه‌های کاربردآن عبارتند از (عرشام و کان، ۱۹۹۰):

مسئلهٔ کاهش ضایعات برش رول کاغذ به رولهای کوچکتر با اندازه و تعداد معین با هدف به حداقل رساندن نسبت ضایعات به خروجی مفید،

برنامه‌ریزی کشتی‌ها برای به حداکثر رساندن نسبت سود در هر سفر به کل زمان سفر در حضور تعدادی محدودیت خطی و یافتن سیاست‌های حداقل هزینه برای مدیریت سیستم‌های استوکستیک تحت مفروضات مارکفی.

---

[۱] The lambda form of separable programming

[۲] Martel & Ouelle

[۳] McCarl & Onal

[۴] Linear Fractional Programming

برای حل مسایل کسری کوششهای زیادی صو رت گرفته است.. ازجمله اگر امکان خطی سازی مساله وجود داشته باشد مساله خطی شود[i] فرض کنید برنامه ریزی کسری به صورت زیر باشد:

$$\min f(x) = \frac{cx + c_\circ}{dx + d_\circ} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge \circ$$

که در آن

c= (c_1 c_2 ….. cn)

d= (d_1 d_2 ….. dn)

x= (x_1 x_2 ….. x_n)

با تغییر متغیر زیر

$$y = \frac{x}{dx + d_\cdot} \quad t = \frac{1}{dx + d_\cdot} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{t}$$

و جایگذاری $x = \frac{y}{t}$ در مساله اگر مخرج یعنی $dx + d_. = f_{2(\mathbf{x})}$ همواره مثبت باشد ، جهت نامساوی اصلی $Ax \le b$ تغییر نمی کند ومسئله به صورت زیر تبدیل خواهد شد :

$$\min Z = cy + c_\circ t$$

$$Ay - bt \le \circ$$

$$dy + d_\circ t = 1$$

$$y \ge \circ \ , \ t > \circ$$

توجه کنید t و y مستقل نیستند. این مطلب یا محدودیت $dy + td_. = 1$ بیان شده است. مثال ۶-۸ با این روش حل شده است. اما لازم به ذکر است که همواره این

روش کار ساز نیست.. در ضمن اگر مخرج یعنی $dx + d_{.} = f_{۲(x)}$ همواره منفی باشد آنگاه با ضرب مخرج کسر در منفی[1]

$$\max \frac{cx+c_{\circ}}{-(dx+d_{\circ})} = \frac{f_{۱}(x)}{-f_{۲}(x)}$$

$$y = \frac{x}{-(dx+d_{\circ})} \qquad t = \frac{۱}{-(dx+d_{\circ})} \qquad x = \frac{y}{t}$$

مسئله به صورت زیر تبدیل می شود که با سیمپلکس قابل حل است

$$\max \quad cy + c_{\circ} t$$

$$Ay - bt \leq \circ$$

$$dy + d_{\circ} t = -۱$$

$$y \geq \circ \quad t \geq \circ$$

لازم به ذکر است که همواره این روش کار ساز نیست.

ازجمله پژوهشهای زمینه حل مسایل کسری، کار عرشام و کان (۱۹۹۰) است که یک الگوریتم مفصل برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی ارائه داده‌اند.

مثال ۶-۸[1]

مسأله کسری زیر را خطی کرده و جواب بهینه آن را بیابید.

$$\text{Min} Z = \frac{۵\,x_{۱} + ۲\,\,x_{۲} - ۳\,x_{۳}}{۲x_{۱} + ۳x_{۲} + x_{۳} + ۲}$$

$$x_{۱} + ۲x_{۲} + ۳\,x_{۳} \leq ۱۰$$

$$x_{۱}, x_{۲}, x_{۳} \geq ۰$$

حل

$$C = (۵ \quad ۲ \quad -۳), \quad d = (۲ \quad ۳ \quad ۱), \quad C_{.} = ۰, \quad d_{.} = ۲, \quad X = \begin{pmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{pmatrix}, \quad A = (۱ \quad ۲ \quad ۳), \quad b = ۱۰$$

با تعریف متغیر های جدیدزیر

---

[1] از: مهندس سینا بیگ مرادی دانشجوی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه شهید باهنر

$$y_۱ = \frac{x_۱}{۲\ x_۱+۳\ \ x_۲+x_۳+۲} \qquad y_۲ = \frac{x_۲}{۲\ x_۱+۳\ \ x_۲+x_۳+۲}$$
$$y_۳ = \frac{x_۳}{۲\ x_۱+۳x_۲+x_۳+۲},\ t = \frac{۱}{۲\ x_۱+۳x_۲+x_۳+۲}$$
$$t = \frac{۱}{۲x۱ + ۳x۲ + x۳ + ۲}$$

داریم:

$$\min Z = ۵y_۱ + ۲y_۲ - ۳y_۳$$
$$\text{s.t.}$$
$$y_۱ + ۲y_۲ + ۳y_۳ - ۱۰t \leq ۰$$
$$۲y_۱ + ۳y_۲ + y_۳ + ۲t = ۱$$
$$y_۱, y_۲, y_۳, t \geq ۰$$

حل این مساله LP منجر به جواب $z^* = -۱.۸۷۵$ و مقادیر زیر می شود:

$t^* = ۰/۱۸۷۵$ و $y_۱^* = ۰$ و $y_۲^* = ۰$ و $y_۳^* = ۰/۶۲۵$

لذا:

$$۰ = \frac{x_۱}{۲\ x_۱+۳x_۲+x_۳+۲} \Longrightarrow\ x_۱ = ۰$$
$$۰ = \frac{x_۱}{۲x_۱ + ۳\ x_۲ +\ x_۳ + ۲} \Longrightarrow\ x_۲ = ۰$$

$$۰.۶۲۵ = \frac{x_۳}{۲x_۱ + ۳x_۲ + x^۳ + ۲} \Longrightarrow ۱.۲۵\ x_۱ + ۱.۸۷۵\ \ x_۲ + ۰.۶۲۵\, x_۳ + ۱.۲۵ = x_۳$$
$$x_۳^* = ۳.۳۳$$

$z^* = -۱.۸۷۵$ پایان مثال ▲

در خاتمه بحث با الگوریتم مقالهٔ چدها[۱] (۱۹۹۹) یک مساله کسری ساده حل می‌شود[۲].

مثال ۶-۹ توضیح الگوریتم برگرفته از مقالهٔ چدها[۱] (۱۹۹۹) به نقل از سایت مندرج در پاورقی[۱].

---

[۱] Chadha

[۲] http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre٦٤٠a/nonlinear.htm#rproducttnceent

[۱] Chadha

مطلوبست رسم ناحیه شدنی و حل و ارائه یک بازه برای مقدار بهینه مساله کسری زیر

$$\text{Max } f(\mathbf{X}) = \frac{۲x_۱ + ۶x_۲}{x_۱ + x_۲ + ۱}$$

s. t:

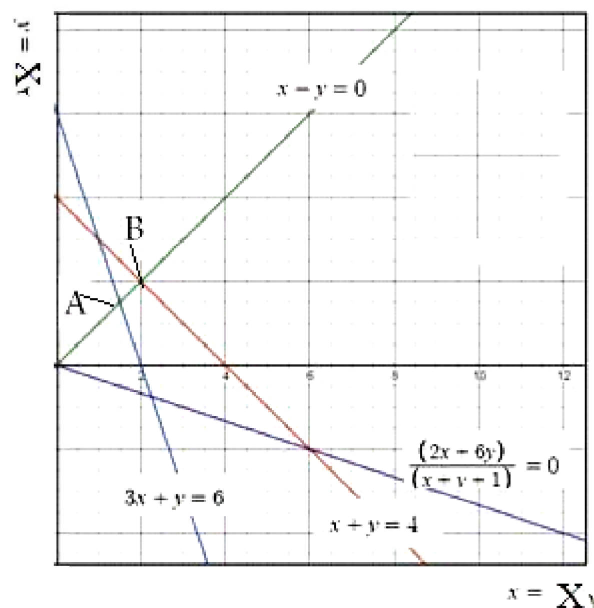
$x_۱ + x_۲ \leq ٤$

$۳x_۱ + x_۲ \geq ٦$

$x_۱ - x_۲ = ۰$

$x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰$

حل:



شکل۶-۵ ناحیه شدنی مساله فوق(پاره خط AB)

ناحیهٔ شدنی پاره‌خط واصل دو نقطهٔ $A=\left(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$ و B=(۲،۲) است با:

f(A)=۳ و $f(B)=\frac{۱۶}{۵}$.

[۱] http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre٦٤٠a/nonlinear.htm#rproducttnceent

نمایش پارامتری پاره خط AB به صورت زیر است:

$X_1 = \frac{۳}{۲}\lambda_1 + ۲\lambda_۲ = \frac{۳}{۲}\lambda_1 + ۲(۱ - \lambda_1) = ۲ - \lambda_1/۲ , \quad ۰ < \lambda_1 < ۱$

واضح است که مخرج تابع هدف در ناحیهٔ شدنی صفر نمی‌شود؛ بنابراین، این یک مسئلهٔ بهینه‌سازی پیوسته با ناحیهٔ شدنی محدود است.

تابع هدف مسئله روی پاره خط AB به صورت زیر می گردد:

$\text{Max } f(\lambda ۱) = (۱۶ - ۴\lambda_1) / (۵ - \lambda_1), \quad ۰ < \lambda_1 < ۱$

یافتن نقاط بحرانی

نقطهٔ بحرانی یک تابع پیوسته نقطه‌ای است که مشتق در آن صفر یا نامعین باشد.
مشتق تابع $f(\lambda_1)$ برابر است با:

$$f'(\lambda_1) = \frac{-۴}{(۵-\lambda_1)^۲}$$

که همیشه در دامنه خود یعنی $۱ > \lambda_1 > ۰$ منفی است. بنابراین، هیچ نقطه بحرانی طبق تعریف فوق برای این مسئله وجود ندارد.

اکنون با ارزیابی$f(X)$ در نقاط A, B، نتیجه می‌گیریم که جواب بهینه در نقطه B که مختصات (۲، ۲) را دارد با مقدار بهینه تابع برابر $\frac{۱۶}{۵}$ می باشد. این جواب نسبت به Aبا مختصات $(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$ =(x۱,x۲)َ و مقدارتابع هدف ۳ برتری دارد زیرا مساله بیشینه سازی است در ضمن با در اختیار داشتن اطلاعات فوق محدوده زیر را برای تابع هدف در ناحیه شدنی می توان نوشت:

$$۳ \leq \frac{۲x_1 + ۶x_۲}{x_1 + x_۲ + ۱} \leq \frac{۱۶}{۵}$$

پایان مثال▲

تمرینات

۱-مطلوبست حل مساله تفکیک شدنی زیر

$$
\begin{aligned}
&Min \quad f\left(x\right)=-3x_1-5x_2+2x_1^2+x_2^2\\
&s.t.\\
&3x_1+3x_2\le 6\\
&4x_1+2x_2\le 4\\
&-1\le x_1\le 1\\
&2\le x_2\le 4
\end{aligned}
$$

۲-مطلوبست حل مساله زیر

$$
\begin{aligned}
&Min \quad f\left(x\right)=-3x_1-5x_2+2x_1^2+x_2^2\\
&s.t.\\
&3x_1+2x_2 \quad \le 6\\
&4x_1+x_2\le 4\\
&x_1 \,\&\, x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

۳-مطلوبست حل مساله تفکیک شدنی زیر

$$
\begin{aligned}
&Min \;\; f(\mathbf{x}) = x_۱^۲ + x_۳^۲ + x_۲^۲\\
&\text{s.t.}\\
&\quad g_۱: ۲x_۱ + x_۲ \le ۵\\
&\quad g_۲: x_۱ + x_۳ \le ۲\\
&\quad x_۱ \ge ۱\\
&\quad x_۲ \ge ۲\\
&\quad x_۳ \ge ۰
\end{aligned}
$$

را هنمایی برای حل : حد بالا برای $x_۳, x_۲, x_۱$ داده نشده

برای حد بالای $x_۱$:

$$\begin{cases} x_۲ \le ۵ - ۲x_۱ \\ ۲ \le x_۲ \end{cases} \rightarrow ۲ \le ۵ - ۲x_۱ \rightarrow x_۱ \le ۱.۵$$

برای حد بالای $x_۲$:

$$\begin{cases} ۲x_۱ \le ۵ - x_۲ \\ x_۱ \ge ۱ \end{cases} \rightarrow ۱ \le ۲.۵ - \frac{۱}{۲}x_۲ \rightarrow x_۲ \le ۳$$

برای حد بالای x_3 :

$$\begin{cases} x_1 \leq 2 - x_3 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow x_3 \leq 1$$

براساس حدود بالا وپایین x_3, x_2, x_1 مساله حل شود

$$Min\ \ Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$f_1(\mathrm{x}_1) = x_1^2 \qquad f_2(\mathrm{x}_2) = x_2^2 \qquad f_3(\mathrm{x}_3) = x_3^2$$

$$g_{11}(\mathrm{x}_1) = 2x_1 \qquad g_{12}(\mathrm{x}_2) = x_2$$

$$g_{21}(\mathrm{x}_1) = x_1 \qquad g_{22}(\mathrm{x}_2) = 0 \qquad g_{23}(\mathrm{x}_2) = x_3$$

۶–۵ خطی سازی عبارات غیرخطی[1]

نوشته مهندس مسعود حاج غنی

در این بخش خواننده با یک سری تبدیلات و تغییر متغیرهای مناسبی آشنا می‌شود که با آنها عبارتی غیرخطی به صورت دقیق یا تقریبی خطی می‌شود؛ از کاربردهای این مبحث:

ممکن است بتوان یک NLP را به برنامه‌ریزی خطی(LP) تبدیل و با روش‌های LP متداول از قبیل سیمپلکس حل کرد.

ممکن است دریک NLP با تبدیل محدودیت های غیر خطی به خطی بتوان مساله را با الگوریتم خاصی مثل الگوریتم ولف حل نمود. در برخی از دروس هم چون آمار برای پاره ای از محاسبات ممکن است به خطی سازی نیاز باشد.

ذیلاً چند تکنیک که در زمینه خطی‌سازی انجام می‌پذیرد آورده می شود:

۶–۵–۱ – خطی سازی عبارت حاصلضربی (Multiplicative Model) :

در اینجا منظور از عبارات حاصلضربی مدلهایی نظیر فرم غیرخطی

$\beta_{\cdot} > \cdot, x_j \geq \cdot$ $\quad y = \beta_{\cdot} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_k^{\beta_k}$ است که با استفاده از تبدیل لگاریتمی خطی‌می شود :

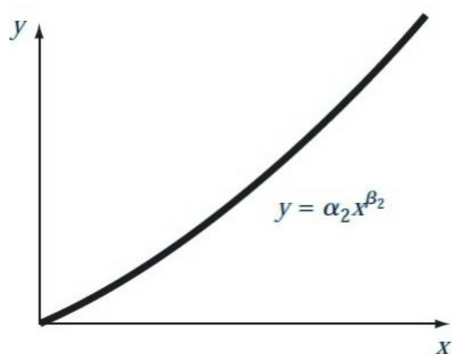
$$\log y = \log \beta_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \dots + \beta_k \log x_k + \log \varepsilon$$

حال اگر $\log x_j$ را با u_j و $\log y$ را با v نشان دهیم با یک رابطه خطی روبرو خواهیم شد.

به عنوان مثال برای مدل ساده زیر

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2} \qquad (\beta_2 \neq 0 \text{ or } 1), \quad \alpha_2 > 0$$

[1] Linearization

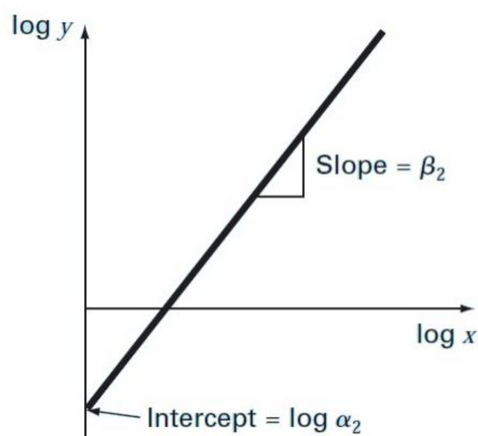


شکل ۶-۶ مدل $y = \alpha_2 x^{\beta_2}$

خطی‌سازی چنین صورت می گیرد:

$$\log(y) = \beta_2 \log(x) + \log(\alpha_2)$$

log(x), log(y) رابطه خطی دارند (شکل ۶-۶)



شکل ۶-۷مدل $y = \alpha_2 x^{\beta_2}$ خطی شده

۶-۵-۲-خطی سازی عبارت نمایی(Exponential Model) :

فرم غیرخطی زیر :

$$y = \varepsilon \times \beta.\left(e^{\beta_1 x_1 + \cdots + x_k \beta_k}\right),$$

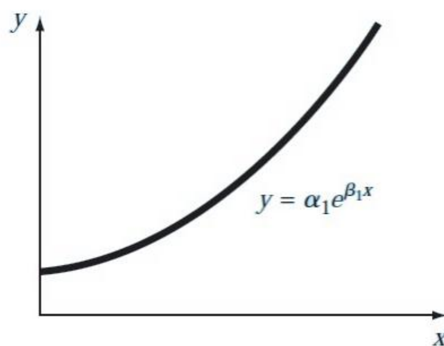
که در آن β_i اسکالر $\varepsilon > 0$, می باشد چنین قابل خطی‌سازی است:

$$\ln y = ln\beta_۱ + \sum_{i=۱}^{k} \beta_i x_i + ln\varepsilon$$

x_i و $\ln(y)$ ها رابطه خطی دارند.

به عنوان مثال فرم غیرخطی:

$$y = \alpha_1 e^{\beta_1 X} \qquad \beta_1 \neq 0,\ \alpha_1 > 0$$

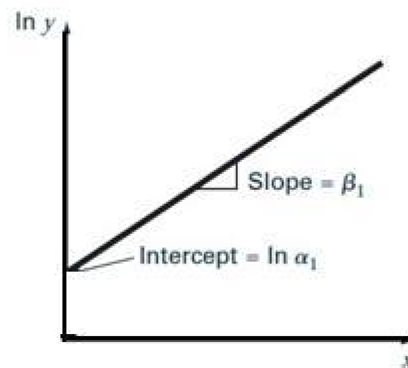


شکل ۶-۷ مدل $y = \alpha_1 e^{\beta_1 X}$

به صورت زیر قابل خطی‌سازی است:

$$\ln(y) = \ln(\alpha_۱) + \beta_۱ x$$

x و $\ln(y)$ رابطه خطی دارند:



شکل ۶-۸ مدل $\ln(y) = \ln(\alpha_۱) + \beta_۱ x$ ($y = \alpha_1 e^{\beta_1 X}$ خطی شده)

۶-۵-۳- خطی سازی مدل معکوس (Reciprocal Model):

فرم غیرخطی:

$$y = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon}$$

چنین خطی‌می شود:

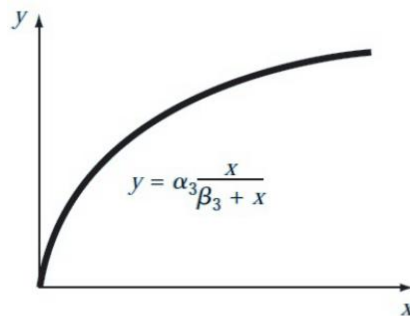
$$\frac{1}{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

با معرفی $y' = \frac{1}{y}$ با یک رابطه خطی روبرو خواهیم شد.

۶-۵-۴- خطی سازی مدل کسری خطی:

فرم غیرخطیزیر را در نظر بگیرید:

$$y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x} \qquad x \neq 0$$

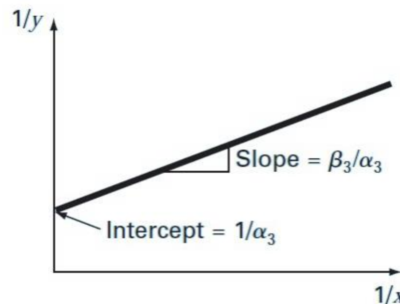


شکل ۶-۹ مدل کسری $y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x}$

خطی‌سازی آن جتین می تواند باشد:

$$\frac{1}{y} = \frac{\beta_3}{\alpha_3}\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha_3}$$

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ رابطه خطی دارند:



شکل ۶-۱۰ مدل $\frac{1}{y}=\frac{\beta_3}{\alpha_3}\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha_3}$ ($y=\alpha_3\frac{x}{\beta_3+x}$ خطی شده)

۶-۵-۵- خطی سازی روابط دارای قدر مطلق[1]

قدر مطلق می‌تواند در تابع هدف یا محدودیت مدل‌ها ظاهر شود که در ادامه به هر دو مورد اشاره می‌شود.

۶-۵-۵-۱ خطی سازی مدل‌های دارای قدر مطلق در تابع هدف

فرض کنید که در قسمتی از تابع هدف عبارت $|x-y|$ وجود داشته باشد. برای حذف این قدر مطلق کافی است تغییر متغیر

$$x-y=z-t \qquad \text{(I)}$$

را اعمال کنیم. در این صورت به شرطی که از بین دو متغیر z و t حداقل یکی صفر باشد، ثابت می‌شود که $|x-y|=z+t$. لذا می‌توان در تابع هدف، به جای $|x-y|$ عبارت $z+t$ را قرار داد و رابطه (I) را نیز در قالب یک محدودیت به مدل اضافه کرد. برای روشن شدن بحث به مثال عددی زیر توجه کنید:

فرض کنید x و y به ترتیب برابر با ۲ و ۵ باشند. بر اساس رابطه (I) می‌توان نتیجه گرفت که $z-t$ نیز باید برابر ۳- باشد. برای اینکه $z-t=-3$ شود، z و t مقادیر مختلفی را می‌توانند اتخاذ کنند، اما تنها زمانی می‌توان به جای $|x-y|$ از $z+t$ استفاده کرد که $z=0$ و $t=3$ باشد. در واقع اگر که $z=0$ و $t=3$ باشد، هر دو رابطه $x-y=z-t$ و $|x-y|=z+t$ برقرار خواهند بود. پس اگر بتوان ثابت کرد

[1] مرجع این قسمت : کتابِ هنر مدلسازی ریاضی، تالیف علیرضا رشیدی کمیجان، ۱۳۹۴، نشر دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه است.

که حداقل یکی از دو متغیر z و t صفر است، با توجه به رابطه $x-y=z-t$، تنها حالت ممکن آن است که $z=0$ و $t=3$ باشد که در این صورت استفاده از $z+t$ به جای $|x-y|$ مجاز خواهد بود. اگر مدل خطی و پیوسته باشد ثابت می‌شود که از بین دو متغیر z و t حداقل یکی برابر صفر است (برای توضیحات بیشتر به مرجع مندرج در پاورقی مراجعه شود).

۶-۵-۵-۲ خطی سازی مدل‌های دارای قدر مطلق در محدودیت

فرض کنید که محدودیتی به فرم رابطه زیر در مدل باشد:

$$|2x-y| \le 10$$

این محدودیت را می‌توان به راحتی با محدودیت ذیل جایگزین کرد:

$$-10 \le 2x-y \le 10$$

اگر محدودیت به فرم رابطه زیر باشد:

$$|2x-y| \ge 10$$

در این صورت یا $2x-y \ge 10$ است یا $2x-y \le -10$ می‌باشد. لذا می‌توان به فرم زیر قدر مطلق را از مدل حذف کرد:

$$2x-y \ge 10-Mz$$
$$2x-y \le -10+M(1-z)$$

در این روابط M عددی بزرگ و z متغیر صفر و یک است.
فرم فوق تضمین می‌کند $2x-y$ یا بزرگتر مساوی ۱۰ باشد یا کوچکتر مساوی ۱۰- که در هر دو صورت، قدر مطلق آن بزرگتر مساوی ۱۰ خواهد بود.

حال فرض کنید که محدودیت چنین باشد:

$$5 \le |2x-y| \le 10$$

در این صورت می‌توان آن را با ۳ محدودیت

$$2x-y \ge 5-Mz$$
$$2x-y \le -5+M(1-z)$$
$$-10 \le 2x-y \le 10$$

جایگزین کرد.

با توجه به روابط فوق اگر $z=1$ باشد، $-10 \le 2x-y \le -5$ خواهد بود و در صورتی که $z=0$ باشد، $5 \le 2x-y \le 10$ خواهد بود که در هر دو صورت، $|2x-y|$ بین ۵ و ۱۰ قرار می‌گیرد.

محدودیت اگر به فرم

$$|2x-y|=10$$

باشد، می‌توان آن را به صورت دو محدودیت زیر نوشت:

$$|2x-y| \le 10$$
$$|2x-y| \ge 10$$

سپس این محدودیت‌ها به فرم زیر ساده می‌شوند:

$$-10 \le 2x-y \le 10$$
$$2x-y \ge 10-Mz$$
$$2x-y \le -10+M(1-z)$$

واضح است که مقدار $2x-y$، در صورت صفر شدن z برابر ۱۰ و در صورت یک شدن z برابر ۱۰- خواهد شد. البته راه دیگر خطی سازی $|2x-y|=10$ به صورت زیر است:

$$2x-y=10z-10(1-z)$$

که در آن z متغیر صفر و یک است.

۶-۵-۶- خطی سازی روابط دارای توان دو:

برخی از محدودیت های درجه ۲ نظیر محدودیت مساله زیر

$$Min\, f(x)=x^2$$
$$s.t.\quad g:(x-1)^2-1 \le 0 \quad \equiv x \in X$$

براحتی به ۲ محدودیت خطی زیر قابل تبدیل است:

$$(x-1) \le 1 \quad or \quad x \le 2$$
$$(x-1) \ge -1 \quad or \quad x \ge 0$$

۶-۵-۷- خطی سازی مدل‌های دارای حاصل‌ضرب متغیرهای تصمیم[1]

۶-۵-۷-۱- ضرب دو متغیر صفر و یک (باینری)

یکی از شرایطی که می‌تواند باعث غیرخطی شدن مدل‌ها شود، ضرب دو متغیر صفر و یک در یکدیگر می‌باشد. فرض کنید در قسمتی از مدل، دو متغیر صفر و یک x_1 و x_2 در هم ضرب شده‌اند. می‌توان به جای این حاصل‌ضرب، از متغیر صفر و یک دیگری نظیر y استفاده کرد. تنها کار باقی‌مانده آن است که این مفهوم را به مدل منتقل کنیم که y حاصل‌ضرب دو متغیر صفر و یک است. برای این امر از ۲ محدودیت زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 \leq y + 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 2y$$

بین سه متغیر x_1 و x_2 و y هشت حالت مختلف طبق جدول زیر وجود دارد:

حالات ممکن بین سه متغیر صفر و یک

حالت	$x_۱$	$x_۲$	y
۱	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۱
۳	۰	۱	۰
٤	۰	۱	۱
٥	۱	۰	۰
٦	۱	۰	۱
۷	۱	۱	۰
۸	۱	۱	۱

طبیعی است با توجه به تعریفی که از y به عمل آمد، تنها حالات ۱، ۳، ۵ و ۸ قابل قبولند. محدودیت‌های $x_1 + x_2 \leq y + 1$ و $x_1 + x_2 \geq 2y$ نیز به گونه‌ای تعریف شده‌اند که حالات مطلوب را ممکن می‌سازند و جلوی تحقق حالات نامطلوب را می‌گیرند.

در حالت کلی اگر n متغیر ۰ و ۱در هم ضرب شوند، به جای حاصل، از متغیر صفر و یک y استفاده می‌کنیم و ۲ محدودیت‌داده شده در زیررا به مدل اضافه می‌نماییم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_n \leq y + n - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_n \geq ny$$

[1] مرجع این بند کتاب: هنر مدلسازی ریاضی، تالیف علیرضا رشیدی کمیجان، ۱۳۹۴، نشر دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه است.

۶-۵-۷-۲- ضرب یک متغیر صفر و یک (باینری) در متغیر پیوسته یا گسسته

یکی دیگر از شرایطی که باعث غیرخطی شدن مدل می‌گردد، ضرب یک متغیر صفر و یک (باینری) در متغیر غیر صفر و یک (خواه پیوسته، خواه گسسته) است. فرض کنید x یک متغیر صفر و یک و y یک متغیر غیر صفر و یک باشد و در مدل عبارت xy باعث غیرخطی شدن مساله شده باشد. در این حالت می‌توان از متغیر جدید z به جای xy استفاده کرد و محدودیت‌های زیر را نیز به مدل افزود:

$$z-(1-y)M \le x \le z+(1-y)M$$

$$x \le My$$

که در آن M عددی بزرگ است.

طبق نامساوی اول ، اگر $y=1$ شود $x=z$ خواهد شد و محدودیت $x \le My$ نیز تاثیری در مدل نخواهد داشت. اما اگر $y=0$ شود، x نیز طبق رابطه $x \le My$ برابر صفر خواهد شد و محدودیت اول در مدل بی تاثیر است. شایان ذکر است که جنس متغیر z همانند x است.

۶-۵-۸- خطی سازی عبارت شامل ماکزیمم یا مینیمم چند متغیر

به جای محدودیت غیرخطی $t = \min(x_1, \ldots, x_n)$

می توان محدودیت های زیر را نوشت وبه مجموعه محدودیت ها اضافه نمود:

$$t \le x_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

برای خطی کردن عبارت زیر $t = \max(x_1, \ldots, x_n)$

می توان محدودیت های زیر را نوشت وبه مجموعه محدودیت ها اضافه نمود:

$$t \ge x_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

۶-۵-۹ – خطی سازی تقریبی جزء به جزء

این روش تقریبی برای خطی کردن توابع در بخش ۶-۳-۳-۱ تشریح شد.

جدول۶-۱ که شامل برخی از موارد بالا و چند مورد دیگر است برای خطی سازی قابل استفاده است.

۶-۵-۱۰-تقریب خطی توابع با بسط تیلور:

با بسط تیلور می‌توان یک تقریب خطی از توابع یک متغیره و چندمتغیره ارائه داد.

۶-۵-۱۰-۱ تقریب خطی توابع یک متغیره:[۲]

اگر $f: R \to R$ تابعی باشد که در بازه شامل اسکالر c از همه مراتب مشتق‌پذیر باشد و برای هر عدد دلخواه z بین x و c داشته باشیم:

جدول ۶-۱ برخی تبدیلات مفید در خطی سازی(مرجع در پاورقی[۱])

تابع $y=f(x)$	فرم خطی $Y=AX+B$	تغییر متغیر ها و ثابت ها
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x},\ Y = y$
$y = \frac{D}{x + C}$	$y = \frac{-1}{C}(xy) + \frac{D}{C}$	$X = xy,\ Y = y$ $C = \frac{-1}{A},\ D = \frac{-B}{A}$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x,\ Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{A + Bx}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x},\ Y = \frac{1}{y}$
$y = A\ln(x) + B$	$y = A\ln(x) + B$	$X = \ln(x),\ Y = y$
$y = C\exp(Ax)$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x,\ Y = \ln(y)$ $C = \exp(B)$
$y = Cx^A$	$\ln(y) = A\ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x),\ Y = \ln(y)$ $C = \exp(B)$
$y = (Ax + B)^{-2}$	$y^{-1/2} = Ax + B$	$X = x,\ Y = y^{-1/2}$
$y = Cx\exp(-Dx)$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln(C)$	$X = x,\ Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ $C = \exp(B),\ D = -A$
$y = \frac{L}{1 + C\exp(Ax)}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln(C)$	$X = x,\ Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)$ $C = \exp(B)$ and L is a constant that must be given

[۱] https://neuron.eng.wayne.edu/auth/ece۳۰٤۰/lectures/lecture۱۸.pdf

[۲] مرجع این بند و بند بعدی: درس طراحی سیستم‌های کنترل دپارتمان مهندسی کامپیوتر و برق دانشگاه John Hopkins است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=0$$

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول اسکالر c را می‌توان به فرم زیر نشان داد:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{n}(c)}{n!}(x-c)^n+\ldots$$

حال اگر نقطه c به x نزدیک شود، یعنی مقدار x-c کوچک شود؛ عبارات شامل توان‌های دو و بالاتر در بسط فوق مقدارشان بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی می‌شوند از این رو می‌توان $f(x)$ را به صورت تقریبی با عبارت خطی زیر بیان کرد :

$$f(x)\approx f(c)+f'(c)(x-c)$$

اهمیت تقریب فوق در خطی بودن آن برای x است؛ به این علت است که این تقریب را با اصطلاح خطی‌سازی نیز می‌شناسند.

مثال ۶-۹:

عبارت $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)}$ را با بسط تیلور حول c=۲ خطی کنید وماکزیمم خطای نسبی رادربازه $x\in[1.5,\ 2.5]$ بیابید.

حل:

$$f(c)=\frac{8}{3} \text{ و } f'(x)=\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} \text{ و } f'(2)=\frac{28}{9}\ .$$

پس تقریب خطی این تابع برابر است با:

$$f(x)\approx\frac{28x-32}{9}$$

برای پیدا کردن ماکزیمم خطای نسبی، ابتدا مفهوم خطا را یادآوری می‌کنیم:

خطا=f(x)-[f(x)تقریب]

خطای نسبی را که با $\delta(x)$ نشان می دهیم از تقسیم کردن خطا بر $f(x)$ بدست می‌آید. پس:

$$\delta(x)=\frac{\frac{x^{۳}}{x+۱}-\frac{۲۸x-۳۲}{۹}}{\frac{x^{۳}}{x+۱}}=\frac{9x^3-28x^2+4x+32}{9x^3}$$

برای یافتن نقطه‌ای با بیشترین مقدار خطای نسبی بایستی از $\delta(x)$ مشتق گرفته و مینیمم و ماکزیمم موضعی آن را یافت. تابع مورد نظر ما در نقطه x=۲ مینیمم محلی و در $x=\frac{۱۲}{۷}$ ماکزیمم محلی دارد که در بازهٔ مورد نظر ما قرار ندارد. پس حداکثر خطای نسبی در بازه مورد نظر بایستی در یکی از نقاط مرزی: $\delta(۲.۵)\approx ۰.۰۵$ یا $\delta(۱.۵)\approx ۰.۱۸$ رخ دهد که نتیجه نقطه ۱,۵ می باشدپایان مثال▲

۶-۵-۱۰-۲ تقریب خطی توابع چند متغیره با بسط تیلور:

در بخش قبل، خطی سازی توابع یک متغیره (وابسته به یک متغیر x) بررسی شد. حال اگر تابع f به بیش از یک متغیر وابسته باشد چه باید کرد؟ در این حالت نیز بسطی مانند بسط تیلور را ارائه می‌دهیم. ابتدا حالتی که $f:R^2\to R$ است را بررسی می‌کنیم. در این حالت f تابعی دو متغیره است؛ مثلاً دو متغیر x_1 و x_2 ، پس: $f=f(x_1,x_2)$. با همان فرضیات حالت یک متغیره، داریم:

$$f(x_1,x_2)=\underbrace{f(c_1,c_2)}_{0\ order\ term}+\underbrace{\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{c_1,c_2}(x_1-c_1)+\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{c_1,c_2}(x_2-c_2)}_{1st\ \text{order terms}}$$

$$\underbrace{+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{c1,c2}(x_1-c_1)^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{c_1,c_2}(x_1-c_1)(x_2-c_2)+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{c_1,c_2}(x_2-c_2)^2}_{2nd\ \text{order terms}}+\dots$$

مانند حالت یک متغیره در اینجا نیز با عبارات خطی برحسب x_1 و x_2 به دنبال تقریبی برای f هستیم، لذا:

$$f(x_1,x_2)\approx f(c_1,c_2)+\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=c_1,x_2=c_2}(x_1-c_1)+\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=c_1,x_2=c_2}(x_2-c_2)$$

به منظور ساده‌سازی، تقریب فوق را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f(x_1,x_2)\approx f(c_1,c_2)+\nabla f\Big|_{x=c}.(\mathbf{x}-\mathbf{c})$$

در عبارت فوق علامت "." نشانگر عملیات ضرب داخلی است، سایر نمادها به شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix},\qquad \nabla=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

رویه تقریب خطی تابع دلخواه $f : R^n \to R$ نیز عیناً مشابه حالت فوق است. برای راحتی در نمادگذاری، $x \in R^n$ را به عنوان متغیرهای فضای n بعدی و عملگر گرادیان را در این حالت به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla^T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

تقریب خطی f(x) در این حالت برابر است با:

$$f(x)\approx f(\boldsymbol{c})+\nabla f\Big|_{x=c}.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})$$

مثال ۶- ۱۰: تابع دو متغیره $f(x,y)=4x^3-6x^2y^3+y^5$ را با بسط حول نقطه $(x,y)=(1,1)$ به طور تقریبی خطی کنید.

حل: داریم:

$$f(1,1)=-1,\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=12x\left(x-y^3\right)\Big|_{(1,1)}=0,\quad \text{and}\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=y^2\left(5y^2-18x^2\right)\Big|_{(1,1)}=-13$$

پس داریم:

$$f(x,y)\approx-1+0(x-1)-13(y-1)=-13y+12$$

پایان مثال▲

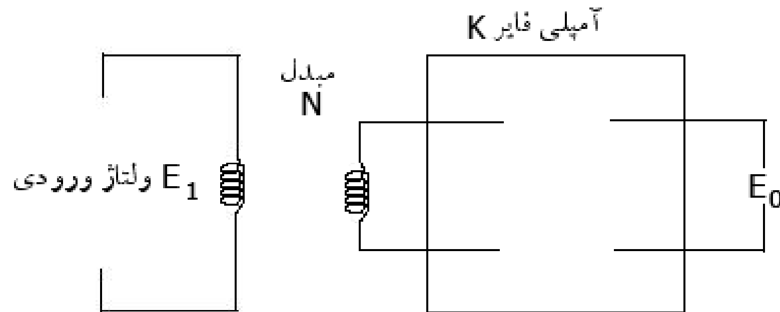
مثال ۶- ۱۱:[1]

با توجه به شکل و تلرانس های داده شده، میانگین و انحراف معیار $E_0=E_1NK$ را بدست آورید. توزیع K,N,E_1 نرمال با میانگین برابر با مقدار اسمی[2] فرض می‌شود.

---

[1] از آمار مهندسی: بازرگان(۱۳۹۲)

[2] nominal value



	nominal value	±	
$E_۱$	$E_۱^* = ٤٠$	۰.۵	٤٠±۰.۵
N	$N^* = \frac{۱}{۲}$	۱٪	$\frac{۱}{۲} \pm ۰.۰۱ \times \frac{۱}{۲}$
K	$K^* = ۳$	۲٪	۳±۰.۰۲×۳

برای بدست آوردن یک ترکیب خطی از K, N, E_1 جهت E_0 از بسط تیلور کمک گرفته ورابطه غیرخطی $E_0 = NKE_۱$را به یک رابطه تقریباً خطی تبدیل می کنیم. قبلاً یادآوری می‌شود که طبق بسط تیلور

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x,y)\Big|_{x=a,\, y=b}$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right] f\Big|_{x=a,y=b} + \dots$$

$$f(x,y,z) = f(a,b,c) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial}{\partial z}\right] f(x,y,z)\Big|_{x=a,y=b,z=c} + \dots$$

بسط تیلور مرتبه اول E_0 حول $E_۱^*$و K^* , N^*: E_0 با استفاده از فرمول اخیر :

$$E_0 \cong E_1^* N^* K^* + \frac{1}{1!}\left[(E_1 - E_1^*)N^*K^* + (N - N^*)E_1^*K^* + (K - K^*)E_1^*N^*\right] \Rightarrow$$

$$E_0 \cong N^*K^*E_1 + E_1^*K^*N + E_1^*N^*K - 2E_1^*N^*K^*$$

یک عبارت خطی از ۳ متغیر $E_۱$ ، N وK است.

توجه کنید که به طور نمونه اولین بخش مشتق دار بسط چنین بدست آمده است:

$$E_0 = E_1NK \Rightarrow (E1-E_1^*)\left(\frac{\partial E_0}{\partial E_1} = NK\Big|_{\substack{E_1=E_1^*\\ N=N_1^*\\ K=K_1^*}}\right) = (E1-E_1^*)N^*K^*$$

با فرض نرمال بودن توزیع‌های K, N, E_1، توزیع E_0 براساس بسط تیلور مرتبه اول یک توزیع تقریبا نرمال خواهد بودبا میانگین

$$\mu_{E_0} = E(N^*K^*E_1 + E_1^*K^*N + E_1^*N^*K - 2N^*E_1^*K^*)$$

چون توزیع های K, N, E_1 دارای میانگین برابر با مقدار اسمی است.

$$\mu_{E_0} = N^*K^*\mu_{E_1}^{E_1^*} + E_1^*K^*\mu_N^{N^*} + E_1^*K^*N^* - 2N^*K^*E_1^*$$

$$\mu_{E_0} = E_1^*K^*N^*$$

این انتظار هم می‌رفت زیرا امیدریاضی حاصل ضرب چند متغیر تصادفی مستقل برابر حاصل ضرب امید ریاضی آن متغیرها می‌شود. واریانس $E.$ برابراست با :

$$\sigma_{E_0}^2 = \left(N^*K^*\right)^2\sigma_{E_1}^2 + \left(E_1^*K^*\right)^2\sigma_N^2 + \left(N^*E_1^*\right)^2\sigma_K^2$$

در بازرگان(۱۳۹۲) نشان داده شده است که اگرتلرانس طراحی یک اندازه درمحصولی به صورت $a \pm b$ داده شده باشد و α نسبتی از تعداد تولید شده ازمحصول باشد که مجاز است خارج بازه $a \pm b$ قرار گیرد آنگاه حداکثر انحراف معیاری که روش تولیدی می‌تواند داشته باشد. از رابطه $\sigma = \frac{b}{z_{\frac{\alpha}{۲}}}$ بدست می‌آید.

با فرض $\alpha = ۰.۲۷\%$ داریم: $Z_{\frac{\alpha}{۲}} = z_{\frac{۰.۰۰۲۷}{۲}} = ۳$. پس:

$$\sigma_{E_۱} = \frac{۰.۵}{۳} \ , \ \sigma_N = \frac{\frac{۱}{۲}(۰.۰۱)}{۳} = ۰/۰۰۱۷ \qquad \sigma_K = \frac{۳\times۰.۰۲}{۳} = ۰.۰۲,$$

با جایگذاری مقادیر فوق در طرف راست رابطه زیر

$$\sigma_{E.}^۲ = \left(N^*K^*\right)^۲\sigma_{E_۱}^۲ + \left(E_۱^*K^*\right)^۲\sigma_N^۲ + \left(E_۱^*N^*\right)^۲\sigma_K^۲$$

$\sigma_{E_.} = ۰.۵۱۲$ بدست می‌آید. پایان مثال ▲

تمرین

۱- آیا می توان $Y = \frac{x_1 x_2^2}{(1+x_3)^2}$ را خطی کرد؟

بهترین راه کشتن وقت این است
که آنقدر از آن کار کِشیده شود تا بمیرد

۷

کاربرد نرم افزار در بهینه سازی غیر خطی



کا ربرد نرم افزار در بهینه سازی غیر خطی

هدف فصل

این فصل به کاربرد چند نرم افزار در مسایل برنامه ریزی غیر خطی (NLP) می‌پرداد .

۷–۱ مقدمه

با پیشرفت کامپیوتر نرم افزارهایی زیادی به‌کمک بهینه سازی آمده‌اند اما می‌توان گفت که یک نرم افزار واحد برای حل تمام انواع مسایل بهینه سازی وجود ندارد و باید نرم افزار مناسب برای مساله مورد نظرخود یافت. نرم افزارهای چندی وجود داشته که به حل مسایل غیر خطی می پردازد اما (وینستون، ۱۹۹۴ آخر ص ۶۴۰) تضمینی مبنی بر اینکه همواره جواب بدست آید وجود ندارد. این نرم افزارها را به دسته‌های ابتدایی، کاربردی و حرفه‌ای قابل دسته بندی است.

در دسته ابتدایی نرم افزار ساده ای مثل WinQSB قرار دارد که قابلیت حل مسایل کوچک در حد تمرین دروس تحقیق در عملیات را دارد.

در دسته کاربردی می توان از لینگو، گمز، متلب و مِیپِل[1] نام برد

[1] LINGO, GAMS, MATLAB, MAPLE

در دسته نرم افزار های حرفه ای می توان به نرم افزاز سی پلکس ۱۲٫۶۱ شرکت آی بی ام[1] اشاره نمود. استفاده از حل کننده سی پلکس ۱۲٫۶ در زبان برنامه نویسی C# نیز از کارهای حرفه ای می باشد که مستلزم تسلط به زبان برنامه نویسی OPL و C# می باشد .ازجمله مزیت این حل کننده ها سرعت بالای پردازش می باشد. این دو نرم افزار توانایی حل مسایل خطی، خطی عدد صحیح ، عدد صحیح محض و همچنین مسائل کوادراتیک و کوادراتیک عدد صحیح را دارا می‌باشند.

IPOPT[2] نیز یک نرم افزار برای بهینه سازی مسائل غیر خطی است که از روش های نقطه درونی استفاده می‌کند. شایان ذکر است که IPOPT وCPLEX دارای یک مجموعه برنامه اند که زبانی مثل JAVA می تواند آنهارا فرا خوانی کند.

در ادامه به چند مثال در مورد حل مسایل NLP با چند نرم افزار پرداخته می شود

۷-۲ حل مساله های غیر خطی با نرم افزار لینگو

این نرم افزار قابلیت حل اکثریت مسایل برنامه‌ریزی ریاضی را دارد؛ اما در مقایسه با نرم افزار GAMS کارایی بسیار پایینی دارا ست.

۷-۲-۱ حل مساله های غیر خطی بی محدودیت با نرم افزار لینگو

مثال ۷-۱ :

مطلوبست بیشینه سازی تابع ۲ متغیره زیر با لینگو

$$Z = ۸۰S + \frac{S^۲}{۱۵} + ۱۵۰D - \frac{D^۲}{۵}$$

$$\text{s.t.}$$

$$D \geq ۰, \quad S \geq ۰$$

حل

در محیط لینگو در پنجره مدل تابع هدف را به صورت زیر تایپ و در آخر علامت ; را بگذارید: نیازی به دادن $D \geq ۰,\ S \geq ۰$ نیست زیرا پیش فرض لینگو غیر منفی

---

[1] IBM ILOG CPLEX OPTIMIZER STUDIO ۱۲٫۶

[2] Interir Point Optimizer

بودن متغیر است. اما برای متغیر های آزاد در علامت حتماً دستور (نام متغیر)@free اضافه شود.

Max=۸۰*S-(۱/۱۵)*S^۲+۱۵۰*D-(۱/۵)*D^۲;

برای حل، دستور Solve را از منوی لینگو بر گزینید. جواب زیر ظاهر می شود

Local optimal solution found at iteration: ٦٥

Objective value: ٥٢١٢٥,٠٠

Variable	Value	Reduced Cost
S	٥٩٩,٩٩٩٩	٠,١٤٥٥١٩٢E-٠٦
D	٣٧٤,٩٩٩٩	٠,٣٨٨٠٥١٢E-٠٧

Row	Slack or Surplus	Dual Price
١	٥٢١٢٥,٠٠	١,٠٠٠٠٠٠

مقدار بهینه متغیر ها و تابع هدف چنین است:

$S^* = ٦٠٠ \quad D^* = ٣٧٥ \quad Z^* = ٥١٢٥$

پایان مثال ▲

۷-۲-۱-۱توضیح Reduced Cost و Dual Price داده شده در جواب لینگو

Reduced Cost نرح بدشدن تابع هدف به ازای افزایش یک واحد مقدار متغیر است

توضیح Reduced Cost در مساله کمینه سازی

Reduced Cost داده شده در حل لینگو مقابل یک متغیر در مساله کمینه سازی نشان می‌دهد که اگر یک واحد مقدار متغیر را افزایش دهیم تابع هدف به اندازه آن مقدارِ Reduced Cost افزایش می‌یابد.

Dual Price (متغیر دوال، قیمت سایه) یک محدودیت نرخ بهبود تابع هدف به ازای افزایش درسمت راست محدودیت است.

توضیح Dual Price در مساله کمینه سازی

Dual Price یک محدودیت عبارتست از: نرخ کاهش تابع هدف به ازای افزایش درسمت راست آن محدودیت. اگر سمت راست در محدودیت مربوطه به اندازه یک واحد افزایش یابد، تابع هدف این مساله به اندازه Dual Price کاهش می یابد.

۷-۲-۲ حل مساله های غیر خطی محدودیت دار با لینگو

مثال ۷-۲ مطلوبست حل مساله زیر با لینگو

$$Max\ Z = x_۱^۴ + ۲x_۲^۲ + ۳x_۳^۲ - ۴x_۱ - e^{(۴x_۲x_۳)}$$
s.t.
$$۲x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲x_۱x_۲ \leq ۱۸$$
$$x_۱ + lnx_۲ \geq ۲$$
$$\sin x_۳ = ۰.۵$$
$$x_۳^۳ - x_۱ \leq ۵$$
$x_۱$: عدد صحیح
$$-۲ \leq x_۲ \leq ۹$$

حل

در محیط لینگو در پنجره مدل هر سطر مدل را تایپ و در آخر سطر علامت ; را می گذاریم

```
max=x۱^۴+۲*x۲^۲+۳*x۳^۲-۴*x۱-@exp(۴*x۲*x۳);
۲*x۱^۲+x۲^۲-۲*x۱*x۲<=۱۸;
x۱+ @LOG( x۲)>=۲;
@SIN( x۳)=۰.۵;
x۳^۳-x۱<=۵;
@GIN( x۱);
@BND( -۲, x۲, ۹);
```

برای حل, دستور Solveرا از منوی Lingo بر گزینید. جواب زیر ظاهر می شود.

```
Optimal solution found at step:        ۲۹
```

Objective value: ۶۷,۹۳۲۳۲
Branch count: ۱

Variable	Value	Reduced Cost
X۱	۳,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
X۲	۰,۳۶۷۸۷۹۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
X۳	۰,۵۲۳۵۹۸۸	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

Row	Slack or Surplus	Dual Price
۱	۶۷,۹۳۲۳۲	۱,۰۰۰۰۰۰۰
۲	۲,۰۷۱۹۴۱	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
۳	-۰,۳۲۰۱۰۰۹E-۰۷	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰
۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰	-۰,۴۳۷۹۱۴۵E-۰۱
۵	۷.۸۵۶۴۵۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

پایان مثال▲

مثال ۷-۳ حل یک نمونه مساله با lingo

```
max=x*y;
۴*x+y=۸;
x>=۰;
y>=۰;
```

Local optimal solution found at iteration: ۲۲
Objective value: ۴,۰۰۰۰۰۰۰

Variable	Value	Reduced Cost
X	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰
Y	۴,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰

Row Slack or Surplus Dual Price

۱	۴,۰۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰۰
۲	۰,۰۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰۰
۳	۱,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰
۴	۴,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰

توضیح Reduced Cost وDual Price در بخش ۷-۲-۱-۱ آمده است.

شایان ذکر است لینگو دستگاه های معادلات خطی و غیر خطی را نیز حل می کند.. البته همواره جواب دقیق نمی دهد.

مثال ۷-۴ : مطلوبست حل دستگاه با lingo:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 \\ u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ u_2(-x_2) = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ u_0, u_1, u_2 \geq 0 \\ (u_0, u_1, u_2) \neq (0, 0) \end{cases}$$

حل

```
model:
u۰=u۱;
u۱=u۲;
u۱*(x۱+x۲-۱)=۰;
u۲*(-x۲)=۰;
x۱+x۲-۱<=۰;
x۲>=۰;
@free(x۱);
u۰>=۰;u۱>=۰;
u۰^۲+u۱^۲+u۲^۲>۰.۰۰۰۰۰۰۱;
end
```

جواب:

Variable	Value
U۰	۰,۱۲۵۰۰۰۰E-۰۱
U۱	۰,۱۲۵۰۰۰۰E-۰۱
U۲	۰,۱۲۵۰۰۰۰E-۰۱
X۱	۱,۰۰۰۰۰۰
X۲	۰,۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰

پایان مثال▲

۷–۳حل مساله های برنامه ریزی غیر خطی با نرم افزار متلب

دستورات چندی در محیط متلب برای بهینه سازی در جعبه ابزار Optimization Toolboxآن وجود دارد که از آن جمله است:

تابع	کاربرد
fminunc	کمینه سازی غیر خطی بی محدودیت چند متغیره
fmincon	کمینه سازی غیر خطی محدودیت دار چند متغیره
quadprog	برنامه ریزی درجه ۲

۷–۳–۱ بهینه سازی مسایل غیرخطی بدون محدودیت با متلب

برای حل مسایل کمینه سازی تک متغیره و چند متغیره NLP بدون محدودیت از دستور "fminunc" استفاده کنید.

مثال ۷–۵

مطلوبست یافتن مینیمم تابع f(x)= x(x-۱,۵) با نقطه اولیه . x. = ۰

حل

```
>> [ x, fval]= fminunc(@(x) x*(x-۱,۵), ۰)
x=      ۰,۷۵۰۰
fval = -۰,۵۶۲۵
```

مینیمم تابع در x* = ۰,۷۵ با مقدار تابع f* =-۰,۵۶۲۵ اتفاق می افتد

پایان مثال▲

مثال ۷-۶ مطلوبست مینیمم تابع زیر با نقطه اولیه $x_. = (۱.۲ \ ,۱)'$

$$f(x_۱,x_۲) = ۱۰۰(x_۲ - x_۱^۲)^۲ + (۱ - x_۱)^۲$$

حل

دستور "fminunc" با نقطه اولیه [-۱,۲،۱,۰] = x۰ به صورت زیر در محیط متلب داده می شود

```
[x, fval]= fminunc(@(x)  ۱۰۰* (x(۲)-x(۱) *x(۱))^۲+(۱-x(۱))^۲,[-۱,۲،۱,۰])
```

یا

```
[x, fval]= fminunc(@(x)  ۱۰۰* (x(۲)-x(۱)^۲)^۲+(۱-x(۱))^۲,[-۱,۲،۱,۰])
```

خروجی به این صورت خواهد بود:

```
x = ۱,۰۰۰۰   ۱,۰۰۰۰

fval =  ۲,۸۳۳۶e-۰۱۱
```

یعنی جواب بهینه $x^* = (۱،۱)'$ را می‌دهد با مقدار تابع $f^* = ۰$. پایان مثال▲

۷-۳-۲ بهینه سازی مسایل غیرخطی با محدودیت با متلب

ذیلاً رویه عمل برای حل مسایل کمینه سازی با محدودیت تک متغیره یا چند متغیره NLP با استفاده از دستور "fmincon" با ذکر یک مثال ذکر شده است

مثال ۷-۷ مطلوبست جواب مساله زیر با متلب

$$Min \ f(x) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3$$

$$s.t.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 4$$

$$x_3 \le 5$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$$

حل

ابتدا تمام محدودیت هارا به صورت ≤ 0 در می آوریم

$$\text{Minimize} \quad f(X) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3$$

$$\text{subject to}: \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq 0$$

$$4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \leq 0$$

$$x_3 - 5 \leq 0$$

$$-x_i \leq 0 \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

یک Mفایل به صورت زیربا نام constraints.m برای محدودیتها می‌نویسیم:

```
function [c, ceq] = constraints (x)
% nonlinear inequality constraints
c = [x(۱)^۲+x(۲)^۲-x(۳)^۲;۴-x(۱)^۲-x(۲)^۲-x(۳)^۲;x(۳)-۵;
-x(۱);-x(۲);-x(۳)];
% Nonlinear equality constraints
ceq = [];
```

اجرای دستور

```
>>[x fvalue]= fmincon(@(x) x(۱)^۳-
۶*x(۱)^۲+۱۱*x(۱)+x(۳),[۱;۲;۲],[],[],[],[],[],[],@(x) constraints(x))
```

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

x =       ۰   ۱,۴۱۴۲   ۱,۴۱۴۲
fval =   ۱,۴۱۴۲
```

یعنی جواب بهینه[۱,۴۱۴۲ ۱,۴۱۴۲ ۰] = *xرا می دهد با مقدار تابع = *f. ۱/۴۱۴۲

پایان مثال▲

مثال ۷-۸ [1]

در مساله زیر مقادیر X_{ij}وy_{ij} معلوم بوده و اجزای ماتریس های y, X اند:

y=[۰ ۱ ۲;۳ -۱ ۲;۴ ۰ ۱];

X=[۰:۰,۰۲:۰,۰۴]';

مطلوبست مقدار بهینه A_i و B_i i=۱،۲،۳ :

$$Min\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}(y_{ij}-A_i-B_iX_{ij})^2$$

s.t.

$A_i \le A_{i+1} \rightarrow A_i-A_{i+1} \le 0 \quad i=1,2,3$

$B_i \le B_{i+1} \rightarrow B_i-B_{i+1} \le 0 \quad i=1,2,3$

حل با متلب

الف-ابتدا تمام محدودیت هارا به صورت ≤ 0 د ر آورید. توجه محدودیت های فوق معادل ۴ محدودیت زیر به صورت ≤ 0 است

$A_1 - A_2 \le 0$

$A_2 - A_3 \le 0$

$B_1 - B_2 \le 0$

$B_2 - B_3 \le 0$

ب-برای حل با دستور fminconباید یک نوع متغیر داشته باشیم . به همین منظور ۲ متغیر A,B به صورت متغیر V چنین تعریف میشود:

$V(1)=A_1;V(2)=A_2;V(3)=A_3;$

$V(4)=B_1;V(5)=B_2;V(6)=B_3;$ h

ج-دراین صورت محدودیت ها را چنین می شودنوشت :

$MV \le 0$

[1] با تشکرخانم مهندس ارمی دانش آموخته ارشد دانشکده فنی داشگاه شهید باهنر کرمان

که در آن V بردار ۶ عنصری فوق است و

```
M=[…
۱ -۱ ۰ ۰ ۰ ۰
۰ ۱ -۱ ۰ ۰ ۰
۰ ۰ ۰ ۱ -۱ ۰
۰ ۰ ۰ ۰ ۱ -۱];
```

د-یک ام فایل با نام myfunct.m مطابق زیر تشکیل دهید

```
function f=myfunct(v)
global X y n t
y=[۰ ۱ ۲;۳ -۱ ۲;۴ ۰ ۱];
X=[۰:۰,۰۲:۰,۰۴]';
n=۳;
t=۳;
for i=۱:n
   for j=۱:t
     JJ(i,j)=(y(i,j)-v(i)-v(i+t)*X(i,۱))^۲;
   end
end
f=sum(sum(JJ(i,j)));
```

ه. آنگاه دستورات زیر را در یک M فایل با عنوانی مثل problem۱ نوشته و اجرا کنید

```
M=[
۱ -۱ ۰ ۰ ۰ ۰
۰ ۱ -۱ ۰ ۰ ۰
۰ ۰ ۰ ۱ -۱ ۰
۰ ۰ ۰ ۰ ۱ -۱]; % Matrix
b=[۰;۰;۰;۰]; %  right hand side
v۰=[۰;۰;۰;۰;۰;۰]; %initial point
% instead of 'active-set' other algorithms in fmincons could be used
options=optimset('Algorithm ','active-set');
[V,fval]=fmincon(@myfunct,v۰,M,b ,[],[],[],[],[],options);
```

```
disp(' ');disp(' ');disp(' ');disp(' ');
 disp('  A۱        A۲      A۳       B۱         B۲      B۳     ');
disp(sprintf(' ٪۷,۳f    ٪۷,۳f    ٪۷,۳f    ٪۷,۳f     ٪۷,۳f   ٪۷,۳f          ٪۷,۳f
',V(۱) ,V(۲),V(۳),V(۴),V(۵),V(۶)))
disp(' ');disp(' ');disp(' ');disp(' ');
MinOfThefunc =fval
```

[]ها در دستور fmincon مربوط به مواردی مثل نداشتن تساوی درمحدودیت و....است.

اجرای فایل problem ۱ منجر به جواب زیر می شود

```
MinOfThefunc =
 ۵,۵۳۴۲e-۰۱۷
```

$$A_1^* = V(1) = 0; A_2^* = V(2) = 0; A_3^* = V(3) = 0.998$$

$$B_1^* = V(4) = 0; B_2^* = V(5) = 0; B_3^* = V(6) = 0.040$$

$$objective_func\ optimal\ value = 5.5342 \times 10^{-17}$$

۴-۷ حل مساله های غیر خطی با نرم افزار MAPLE[۱]

در مِیپِل با دستور NLPSolve می‌توان مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی محدودیت دار و بدون محدودیت را حل کرد. در حالت کلی با فرض این‌که فضای شدنی مساله محدب باشد، یک نقطه مینیمم (یا ماکزیمم) محلی به عنوان جواب بدست می-آید، با این حال دستیابی به یک جواب بهینه کلی نیز در شرایط خاصی امکان‌پذیر است. بیشتر الگوریتم‌هایی که در نرم‌افزار میپل توسط دستور NLPSolve به منظور حل مساله غیرخطی استفاده می‌شوند بر این فرض استوارند که تابع هدف و محدودیت‌های مساله همگی به طور پیوسته مشتق پذیرند. با این حال حتی در وضعیتی که این شرایط برقرار نباشد نیز گاهی اوقات دستور NLPSolve به جواب منجر می‌شود.

دستورNLPSolve چنین است :

```
with(Optimization) :
NLPSolve(opfobj, ineqcon, eqcon, opfbd, opts)
```

[۱] تهیه شده توسط مهندس مسعودحاج غنی

توضیحاتی مختصر راجع به برخی از عبارت‌های به‌کار رفته در قسمت **opts** (Options) ذیلاً داده می‌شود :

با وارد کردن assume = nonnegative همه متغیرها غیرمنفی درنظر گرفته می‌شوند.

با دستور feasibilitytolerance = realcons(positive) می‌توان حداکثر مقدار مجاز انحراف محدودیت را اعمال کرد.

با دستور initialpoint = set(equation), list(equation) , or list(numeric) می‌توان یک نقطه شروع اولیه برای حل تعیین نمود. توجه شود که در مسائل برنامه ریزی غیرخطی تعیین نقطه شروع اولیه غالباً در میزان کیفیت جواب نهایی بسیار تاثیرگذار است.

برای تعیین حداکثر تعداد تکرار مجاز برای حل یک مساله توسط سالوِر از دستور iterationlimit = posint استفاده می‌شود.

تعیین نوع مساله

برای تعیین نوع مساله (ماکزیمم یا مینیمم‌سازی) از دستور maximize or maximize = truefalse استفاده می‌شود. اگر این عبارت با مقدار true وارد شود مساله ماکزیمم‌سازی و اگر با مقدار false وارد شود مساله مینیمم‌سازی است. پیش‌فرض نرم‌افزار، مساله مینیمم‌سازی است.

برای تعیین روش حل بایستی عبارت زیر را وارد کنید.

method =
branchandbound, modifiednewton, nonlinearsimplex, pcg, quadratic, or sqp

برای تعیین حداکثر تعداد گره‌هایی که در روش شاخه و کران جست‌وجو می‌شوند از عبارت nodelimit = posint استفاده می‌شود.

اگر روش حل شاخه و کران انتخاب شده باشد با رسیدن به یک مقدار مشخص برای تابع هدف، می‌توان لگوریتم حل را متوقف نمود، این امر با دستور objectivetarget = realcons انجام می‌شود.

برای تعیین تلرانس همسایگی نقطه بهینه، از دستور optimalitytolerance = realcons(positive) می‌توان استفاده کرد.

برای تعیین متغیرهای تابع هدف در حالت جبری، از عبارت variables = list(name) or set(name) استفاده می‌شود.

مثال ۷-۹ مینیمم‌سازی یک تابع یک متغیره در یک بازه مشخص:

$> with(Optimization) :$

$> NLPSolve(\frac{\sin(x)}{x}, x = 1..30)$

جواب:

در زیر از سمت چپ اولین مقدار متناظر با مقدار بهینه تابع هدف به ازای جایگذاری مقدار بهینه متغیر x بر حسب رادیان است:

[−۰,۰۴۲۴۷۹۶۱۶۹۷۷۶۱۲۶,[*x*=۲۳,۵۱۹۴۵۲۵۰۲۳۲۳۵]]

پایان مثال▲

مثال ۷-۱۰ ماکزیمم‌سازی یک تابع با اعمال نقطه اولیه دلخواه برای رویه حل:

$> with(Optimization) :$

$>$

$NLPSolve\left(x^3 + 2xy - 2y^2, x = -10..10, y = -10..10, initialpoint = \{x = 3, y = 4\}, maximize\right)$

جواب:

[۱۰۵۰.,[*x*=۱۰.,*y*=۵.]]

پایان مثال▲

مثال ۷-۱۱ حل یک مساله مینیمم سازی محدودیت دار با فرض نامنفی بودن همه متغیرها:

$> with(Optimization) :$

$> NLPSolve\left(w^2(v-w)^2 + (w-x-1)^2 + (x-y-2)^2 + (y-z-3)^2, \{v+x+y+z \le 5, 3x+2v-3=0\}, assume = nonnegative\right)$

حل در عبارت زیر از سمت چپ اولین مقدار متناظر با مقدار بهینه تابع هدف به ازای جایگذاری مقدار بهینه متغیر ها است :

[٦,٤٣٨٤٥٩٦٣٨٧٦٥٠٤٧٩٠,[*v*=١,٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠,*w*=١,٦٨٨٥٧٣٧٥٣٨٢٨٥٥,*x*=١,٩٣٧١٤٢٠٨٢٠٠٨٥٨,*y*=
١,٣٧٤٢٨٤١٦٤١٦٢٨٧,*z*=٠.]]

پایان مثال▲

مثال ۷-۱۲ جواب مساله غیرخطی محدودیت دار زیر را بدست آورید

$$Min\ \ f(x) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 4$$
$$x_3 \le 5$$
$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$$

حل

کد مساله در نرم‌افزار میپل:

برای سهولت، از متغیرهای x و y و z متناظر با متغیرهای x۱ و x۲ و x۳ استفاده شده است.

```
> with(Optimization) :
>
NLPSolve(x^3 - 6x^2 + 11x + z, {x^2 + y^2 <= z^2, x^2 + y^2 + z^2 >= 4, z <= 5}, assume = nonnegative)
```

جواب :

از سمت چپ: اولین مقدار مقدار بهینه تابع هدف است:

[۱,۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۱۰۰۴۷,

[x = -۲,۲۲۰۴۴۶۰۴۹۲۵۰۳۱ 10^{-16},y= ۱,۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۱۰,z = ۱,۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۱۰]]

توجه شود که مقدار متغیر x بسیار کوچک و تقریباً برابر با صفر است، این جواب تضادی با فرض نامنفی بودن متغیرها ندارد و در نرم‌افزارهای بهینه‌سازی مشابه این حالت رخ می‌دهد.پایان مثال▲

مثال ۷-۱۳ جواب مدل زیر را بدست آورید

$$Max\ Z = x_1^4 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 - e^{(4x_2x_3)}$$
S.t.
$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \le 18$$
$$x_1 + lnx_2 \ge 2$$
$$\sin x_3 = 0.5$$
$$x_3^3 - x_1 \le 5$$

$x_۱$ صحیح عدد

$-۲ \leq x_۲ \leq ۹$

حل:در ابتدا می‌توان مساله را ساده تر کرد، با توجه به $\sin x_۳ = ۰.۵$

$\arcsin(۰,۵) = ۰,۵۲۳۵۹۸۷۷۶ \text{ rad}$

یعنی به جای متغیر مجهول x۳ می‌توان از مقدار فوق در مدل استفاده کرد (زیرا میپل با واحد رادیان کار می‌کند)، یا اینکه به جای این متغیر مقدار دقیق(۰,۵)arcsinرا قرار دهیم (البته از اینکار صرفه نظر شده است).

برای سادگی بیشتر به جای متغیرهای مدل اصلی در نرم افزار از x و y و z به ترتیب استفاده شده است.

نحوه کدنویسی در نرم‌افزار میپل با لحظ کردن $۰ \leq x_۲ \leq ۹$ و بدون در نظر گرفتن قید صحیح بودن $x_۱$:

```
>with(Optimization) :
>
NLPSolve(x^4 + 2y^2 + 3z^2 - 4x - e^(4·y·z), {2x^2 + y^2 - 2·x·y ≤ 18, x + ln(y) ≥ 2, sin(z)
    = 0.5, z^3 - x ≤ 5}, y = 0..9, maximize)
```

جواب این مساله چنین است::

```
[149.545993729631476, [x = 3.73768744118548, y = 1.73027801806997, z = 0.523598775598299]]
```

پایان مثال▲

ذکر دو نکته ضروری است:

۱- نرم‌افزار میپل در بهینه‌سازی مدل‌های غیرخطی با دستورNLPSolve اجازه استفاده از دستور Ingteervariables را نمی‌دهد؛ از اینرو متغیر x پیوسته فرض شده است.

۲- در مساله فوق متغیر y متغیری کراندار است؛ که بین مقادیر ۲- تا ۹ قرار دارد؛ در هنگام کدنویسی این محدودیت در مدل، در زمان حل مدل با خطای مواجه شدن با اعداد مختلط روبرو شدیم (یعنی جواب بهینه مدل با فرض این محدودیت به شکل عدد مختلط خواهد بود و میپل آنرا نشان نمی‌دهد) لذا در جهت رفع این مشکل، متغیر yدر بازه صفر تا ۹ تعریف شد.

در خاتمه شایان ذکر است که

در عمل برای حل مدل‌هاو مسائل از مقیاس بزرگ عموماً از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی GAMS ، LINGO ، IBM CPLEX وگاه متلب استفاده می‌شود. علت این امر تمرکز گمز، لینگو و سیپلکس بر مساله بهینه‌سازی، دقت و سرعت عمل بالا در محاسبات، ارائه جزئیات فراوان در فرآیند مدل‌سازی و حل و نیز وجود حل کننده‌های متعدد (خصوصاً در گمز) است. از این رو آشنایی با این نرم‌افزارها به دانشجویان توصیه می‌شود. به عنوان یک مقایسه بد نیست بدانید که: نمی توان گفت کدام نرم افزار بهتر است. هرکدام مزایا و معایب خاص خود را دارند. نرم افزار گمز به دلیل اینکه از روش شاخه و برش مساله را حل می‌کند لذا دارای سرعت عمل بالاتری نسبت به نرم‌افزار لینگو هست اما در مسائل غیرخطی که فضای حل نامحدب دارند ممکن است در بهینه محلی قرار گیرد که حتی با استفاده از انتخاب(option) های موجود در نرم‌افزار هم نمی‌توان این مشکل را حل نمود. زیرا این انتخابها اختلاف در همسایگی را کاهش می‌دهند نه در کل فضای شدنی.

نرم‌افزار لینگو از روش شاخه و کران مسائل را حل می‌کند لذا سرعتش نسبت به گمز کمتر است اما در برخورد با مسائل غیرخطی با فضای نامحدب درصورتی که از حل کننده گلوبال استفاده شود قوی تر از گمز عمل کرده و در بهینه محلی نمی ماند. اما نرم افزار سیپلکس فقط مدل‌های خطی آمیخته عدد صحیح و کوادراتیک را قادر به حل است و سرعتش از گمز در این مدل‌ها بیشتر است اما سایر مدل‌ها را نمی‌توان با سیپلکس حل نمود. ضمن اینکه کدنویسی در نرم‌افزار سیپلکس شاید برای مبتدیان کمی سخت باشد. اما نرم‌افزار متلب را می‌توان یک شبه زبان برنامه‌نویسی نامید. هر مساله‌ای که نیاز به کدنویسی داشته باشد با متلب قابل اجرا است. اما یک ویژگی جذاب این نرم‌افزار این است که نیازی به کد کردن همه جزئیات نیست و می‌توان با استفاده از یک سری توابع و تولباکس‌های از پیش تعریف شده (مثل شبکه عصبی و فازی) در متلب بنابر نیاز و کاربرد، مساله مورد نظر را با آن‌ها حل کرد و از پیچیدگی مسائل کاست.

قابلیت حل مسائل ریاضی به صورت پارامتریک و عددی و کار به صورت برداری و ماتریسی از ویژگی های دیگر متلب اند که مزایای نرم‌افزارهایی مانند میپل را نیز ارائه می‌دهد. قابل ذکر است که در مدل‌های پیچیده از ترکیب نرم‌افزارهایی مانند متلب و گمز نیز برای حل مسائل استفاده می‌شود.

نرم‌افزار میپل توانایی حل اکثر مدل‌های متداول برنامه‌ریزی ریاضی را دارد، مهم تشخیص نوع مدل‌ها و استفاده از دستور مناسب برای حل آن‌ها است. به عنوان مثال دستور LPSolve برای حل مدل‌های خطی (همه‌ی توابع هدف و محدودیت‌ها خطی باشند)؛ دستور QPSolve به منظور حل مدل‌های کوادراتیک (درجه دوم) است، که تابع یا توابع هدف درجه دوم و محدودیت‌ها خطی هستند. پس به منظور یافتن بهترین و مناسب‌ترین راه‌حل، انتخاب صحیح دستورات حل، امری لازم است[۱].

دستور حل مسائل بهینه‌سازی خطی در میپل مشابه با دستور حل در بهینه‌سازی غیرخطی است[۲] : LPSolve(obj, constr, bd, opts)

۵-۷ حل مساله های غیر خطی با نرم افزار گمز GAMS[۳]

نرم افزار گمز با داشتن بیش از ۲۰ حل کننده تجاری، که هر کدام توانایی خاص دارد[۴]، قابلیت حل اکثریت مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی را دارد. حل کننده هایی همچون CPLEX ،Gurobi ، برای مسایل خطی

LINDO Global برای مسایل غیرخطی و

هم چنین MINOS, SNOPT ، برای مسائل بزرگ.

SCIP براي mixed-integer nonlinear و Constraint Integer Programs

به دلیل سادگی وانعطاف پذیری در برنامه نویسی از نرم افزار گمز به طور وسیع استفاده میگردد. همچنین روشهای حلی همچون آزاد سازی لاگرانژ، تجزیه بندرز و برخی دیگر الگوریتمهای ابتکاری برپایه برنامه ریزی ریاضی در این نرم افزار قابل پیاده سازی می باشد. قبل از ذکر یک مثال چند واژه و علامت مورد استفاده در گمز ذیلاً معرفی می شود:

---

[۱] برای جزئیات بیشتر راجع به حل مسائل غیرخطی با استفاده از نرم‌افزار میپل به لینک زیر مراجعه شود:

http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Optimization/NLPSolve

برای جزئیات بهینه‌سازی مدل‌های غیرخطی با نرم‌افزار میپل در شرایطی که مدل ماتریسی باشد به help میپل سایت زیر مراجعه شود

http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Optimization/NLPSolveMatrixForm

[۲] برای جزئیات لینک زیر قابل مراجعه است:

https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=Optimization/LPSolve

[۳] با تشکر از مهندس میلاد میر نجفی و خانمها مهندس اکبری،مهندس پور فارسی و مهندس ناد علی

[۴] به لینک زیر مراجعه شود:

http://www.gams.com/help/index.jsp?topic=٢٪Fgams.doc٢٪Fsolvers٢٪Findex.html

Sets	برای تعریف اندیس‌ها از عبارت sets استفاده می‌شود. مانند: set j /۱*٤/;
Data: در گمز داده ها به سه نوع Scalar، Parameter، Table تعریف می شود:	
Scalar	پارامترهای بدون اندیس که مقدار ثابتی را نشان می دهند مانند m که به صورت زیر تعریف می شود: Scalar m large number /۱۰۰۰۰۰/;
Parameter	پارامترهای ۱ بعدی: پارامترهایی که تنها یک اندیس دارند مانند demand i که به صورت زیر تعریف می شود: Parameter demand (i) demand for customers /۱ ۱۰۰۰،۲ ۲۰۰۰،۳ ٦۰۰،٤ ۱۰۰۰/;
Table	پارامترهای ۲ بعدی و بالاتر: پارامترهایی که دو اندیس یا بیشتر دارند مانند c(i,j) هزینه از منبع i به مقصد j که به صورت زیر تعریف می شود: table c(i,j) translate cost from i to j (I \ J: ۱، ۲، ۳) ۱: ۱۲٥، ۲۳٤، ۱۰۰ ۲: ۳۲۰، ۱۳۲، ۲۰۰;
Variables - از انواع متغیر در گمز:	
Binary V.	متغیرهای ۰ و ۱.
Integer V.	متغیرهای صحیح ...،۰،۱،۲،۳
Positive V.	متغیرهای پیوسته و مثبت $(۰,\infty)$
Negative V.	متغیرهای پیوسته و منفی $(-\infty,۰)$
Nonnegative .	متغیرهای پیوسته صفر یا مثبت
Free V.	متغیرهای پیوسته آزاد در علامت$(-\infty,\infty)$
همان‌طور که در مثال‌های ذکر شده نمایش داده شد برای معرفی هر عنصر از به یک کلمه کلیدی متناسب (set, parameter, table, …) سپس معرفی نماد (m, i, c(i,j), …) ، یک توضیح مختصر که ذکر آن اختیاری است و درنهایت مقدار آن استفاده می‌شود	
علائم برای نوشتن نمادهای ریاضی در گمز	

نمادریاضی	شرح	نماد در نرم‌افزار گمز
$\neq$	مخالف	< >
$\leq$	کوچکتر یا مساوی	=l=
$=$	مساوی	$= e =$
$\geq$	بزرگتر یا مساوی	$= g =$
<	کوچکتر	Lt
>	بزرگتر	Gt

مثال ۷-۱۴ [1] مطلوبست حل مساله زیر با نرم افزار گمز

$$Min\ \ f(x) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 4$$
$$x_3 \le 5$$
$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$$

حل

کد نرم افزار گمز :

```
variable  Z  ;
nonnegative variables X۱ , X۲ , X۳ ;
equations
obj
co۱
co۲
co۳    ;
obj..          Z =e= X۱**۳ -٦*X۱**۲ + ۱۱*X۱ + X۳      ;
co۱..          X۱**۲ + X۲**۲ =l= X۳**۲                ;
co۲..          X۱**۲ + X۲**۲ + X۳**۲  =g= ٤           ;
co۳..          X۳  =l=  ٥                             ;
model  mymodel /all/   ;
option  NLP = BARON ;
Solve mymodel using NLP Minimizing z ;
```

جواب مساله:

```
OBJECTIVE VALUE      =       ۱,٤۱٤۲
X۱ = ۰      X۲ = ۱,٤۱٤          X۳ = ۱,٤۱٤
```

پایان مثال▲

[1] با تشکر از مهندس امین فرحبخش دانش آموخته ارشد ورودی ۹۲ مهندسی صنایع دانشگاه با هنرکرمان

مثال ۷-۱۵ یک مثال برنامه ریزی خطی به منظور استفاده از سیگما ($\sum_{i=1}$) در نرم افزار گمز[1]

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
&s.t \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \le 300 \\
&3x_1 + 2x_3 \le 400 \\
&x_1 + 4x_2 \le 300 \\
&x_1 \le 100 \\
&x_2 \le 100 \\
&x_3 \le 100 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

مساله را به این فرم در نظر می گیریم :

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = \sum_{i=1}^{3} c_i . x_i \\
&\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i \le d_j \qquad \forall j \\
&x_i \le 100 \qquad \forall i \in \{1,2,3\} \\
&x_i \ge 0
\end{aligned}$$

$$d = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

کد گمز :

```
set i /۱*۳/ ;
alias (i,j) ;
parameter c(i)  /۱  ۳
                 ۲  ۲
                 ۳  ۵/ ;
parameter d(j)  /۱ ۳۰۰,۲ ٤۰۰,۳ ۳۰۰/;
table   a(j,i)
     ۱  ۲  ۳
   ۱    ۱  ۲  ۱
   ۲    ۳  ۰  ۲
   ۳    ۱  ٤  ۰      ;
variables x(i)
          z        ;
Equation  obj        objective function
          cont۱(j)   constraint one
          cont۲(i)   constraint two     ;
```

---

[1] منبع: سایت gamsbook.ir :

```
obj..          z =e= sum(i,c(i)*x(i))      ;
cont۱(j)..     sum(i,a(j,i)*x(i)) =l= d(j)  ;
cont۲(i)..     x(i) =l= ۱۰۰                 ;
model modelname /all/ ;
solve modelname using lp maximazing z ;
```

لازم به ذکر است در قسمتی که جدول a(j,i) وارد شده، بایستی دقت شود که ستون ها به صورت موازی و مرتب وارد شوند تا نرم افزار هنگام اجرا با خطا مواجه نشود.

جواب : تابع هدف= ۸۱۶٫۶۶۶۷

$X_۱$ = ۶۶٫۶۶۷ $X_۲$ = ۵۸٫۳۳۳ $X_۳$ = ۱۰۰ پایان مثال ▲

۷–۶ پیرامون حل مسایل غیر خطی با الگوریتم های جستجوی ابتکاری و فرا ابتکاری

در خاتمه این بحث مناسب است که ذکر شود در کنار روش‌های کلاسیک بهینه سازی ریاضی، روشهایی ابتکاری توسط پژوهشگران ارائه شده است. تعدادی از این روش‌ها، مبتنی بر جستجوی تصادفی بوده وبسیاری از آنها ازرفتار طبیعت و خلقت الهی الهام گرفته اند . از دلایل استفاده از این روشهای موسوم به ابتکاری وفرا ابتکاری پیچیدگی بیش از حد بسیاری از مسائل بهینه‌سازی در مهندسی است که روش‌های دقیق مرسوم برنامه‌ریزی ریاضی قادر به ارائه جواب بهینه آنها نمی باشند (بشیری وکریمی,۱۳۹۲ص ب) اما ممکن است جواب بهینه محلی ارائه دهند. الگوریتم‌های ابتکاری وفرا ابتکاری می‌تواند به حل مسائل غیرخطی همراه با محدودیت یا بدون محدودیت دارای فضای شدنی محدب وغیرمحدب بپردازد.

تضمینی نیست که جواب به دست آمده بهینه باشد ولی با انتخاب پارامترهای مناسب برای الگوریتم و تجربه کافی می‌توان جوابی خوب (نسبتاً دقیق و نزدیک به بهینه) در زمانی محدود برای یک مسأله به دست آورد. ذیلاً به عنوان نمونه چند پژوهش ازمیان چندین تحقیق که درآن از الگوریتم‌های جستجوی ابتکاری و فراابتکاری در NLP استفاده نموده‌اند ذکر می‌شود: زکچین[۱] ودیگران(۲۰۰۵) از دو الگوریتم مورچگان (MMAS)[۲] در بهینه‌سازی سیستم توزیع آب استفاده نموده اند.

---

[۱] Zecchin

[۲] Max-Min Ant System

پاول[۱] (۲۰۱۱) از روش ابتکاری جستجوی تابو[۲] برای حل مسایل تخصیص درجه دوم استفاده می کند.

حسیاه[۳](۲۰۱۴) از الگوریتم تکاملیِBiEA [۴] در بهینه سازی مساله تخصیص پایایی در سیستمهای چند سطحی[۵] بهره گرفته است

چات واتانا سیری[۶] و دیگران(۲۰۱۶) از روش ابتکاری "جستجو در همسایگی"[۷] در بهینه کردن پایایی برای یک مساله با تخصیص افزونگی(RAP[۸]) استفاده نموده اند.

تمرین

مطلوبست جواب کد لینگوی زیر. درضمن سعی کنید که این مساله را با نرم افزارهای دیگر حل کرده و جواب هارا مقایسه کنید.

```
min=٥*x١^٤-٣*x١^٢-@log(x٢)+٨*x١*x٢+x٢^٢;
x١^٢+١>=٠; @exp(x١-٢*x٢)<=١; x١-@cos(x٢)<=٤;
@free(x١);@BND(-١,x٢,٢);end;
```

---

[۱] Paul

[۲] Tabu

[۳] Hsieh

[٤] bacterial-inspired evolutionary algorithm

[٥] multi-level

[٦] Chat-wattana-siri

[٧] neighborhood search

[٨] Redundancy Allocation Problem

کاش جوانها می‌دانستند وپیرها می‌توانستند

Si jeunesse savait et si vieillesse pouvait

if the youth but knew if old age but could



frz40.wordpress.com



ضرب المثل فرانسوی

واژه نامه فارسی – انگلیسی

اختصار	فارسی	انگلیسی
	الف	
	اختلال ، نویز	Noise
	استقلال مثبت خطی	Positive-linear independence
	استنتاج، نتیجه	Corollary
	اصل مجاورت یا هم‌جواری	Adjency Assumption
	اصلی	Master
BiEA	الگوریتم تکاملیِ BiEA	bacterial-inspired evolutionary algorithm
	الگوریتم ژنتیک	Genetic Algorithm
RG	الگوریتم گرادیان تحویل یافته	Reduced gradient Algorithm
	الگوریتم‌مختصات‌دوره‌ای (مختصات محاطی؟)	Cyclic Coordinates algorithm
	الگوریتم های جریمه ای و مانعی	Penalty &Barrier Methods
	الگوریتم های حذف متغیرها	Variable Elimination Algorithms
	الگویی	Pattern
	امتداد شدنی	Feasible Direction
	انیلینگ شبیه سازی شده	Simulated annealing
	اولیه	Primal
	اینفیمم	Infimum
	ب	
	برازش چند جمله ای	Polynomial fit
	برنامه ریزی آرمانی	Goal Programming
SQP	برنامه ریزی درجه ۲ ترتیبی (دنباله ای یامتوالی)	Sequential (successive) Quadratic Programming
	برنامه ریزی کسری خطی	Fractional linear Prog.

English	فارسی	Abbr.
linear complement programming	برنامه ریزی متمم خطی	
Convex Programming	برنامه ریزی محدب	
Geometric Programming	برنامه ریزی هندسی	
Integer Programming	برنامه‌ریزی با اعداد صحیح	IP
Dynamic Programming	برنامه‌ریزی پویا	
Linear Programming	برنامه‌ریزی خطی	LP
Non-linear Programming	برنامه‌ریزی غیر خطی	NLP
Closure	بستار	Cl
Closed	بسته	
optimal search	بهین	
steepest ascent	بیشترین افزایش	
maximal increase	بیشترین افزایش	
maximal decrease	بیشترین کاهش	
Steepest Descent	بیشترین کاهش	SD
Ellipsoid	بیضیوار	

پ،ت،ث

English	فارسی	Abbr.
Stable	پایدار	
convex envelope	پوش محدب	
smooth function	تابع نَرم	
Operations Research	تحقیق در عملیات	**OR**
binding	تساوی آور	
linear piece- wise linearization	تقریب خطی جزء به جزء	
golden section	تقسیم طلایی	
Unimodal	تک کوهانه	
strictly unimodal	تک کوهانه اکید	
Strongly Unimodal	تک کوهانه قوی	
Differential evolution	تکامل تفاضلی	
iterative	تکراری	
Distinguishibility constant	ثابت تمیزیا تشخیص پذیری	
resolution constant	ثابت تمیزیا تشخیص پذیری	

ج، چ

Coercive	جاذب، نزدیک شونده
Dichotomous search	جستجوی دو رسته ای
Sequential Search	جستجوی ترتیبی
Golden Section Search	جستجوی تقسیم زرین
Golden Section Search	جستجوی تقسیم طلائی
Sequential Search	جستجوی دنباله ای
Fibboacci Search	جستجوی فیبوناتچی
equal-interval search	جستجوی متساوی ا لفاصله
simultaneous search	جستجوی همزمان
Exhaustive search	جستجوی یکنواخت
Uniform search	جستجوی یکنواخت
Line Search	جسنجوی خطی
global optimal soluion	جواب بهین کلی
ascend direction	جهت افزایش(صعودی)
Steepest feasible Ascent direction	جهت شدنی با بیشترین افزایش ممکن
Steepest feasible Descent direction	جهت شدنی با بیشترین کاهش ممکن
Descent direction	جهت کاهش
multi-level	چند سطحی

ح،خ

Multiplicative	حاصلضربی	
Least squared error	حداقل مجذورات خطا	LSE
outer linearization	خطی ساز ی برونی	
Linearization	خطی سازی	
Contour	منحنی یا خَم همتراز	

د

Quadratic	در جه دوم
Interior	درون
Accuracy	دقت، صحت ، درستی
Bisection	دو نیم سازی

ر

English	فارسی	Abbr.
Maximum likelihood	روش حداکثر درستنمایی	MLE
gradient projection method	روش تصویر گرادیان	
Gradient Method	روش گرادیانی (گرادیان محور)	
Sequential Uncostrained Minimization Techniques	تکنیک های کمینه سازی بی محدودیت ترتیبی	SUMT
Natural Arc Methods	روشهای قوس طبیعی	

س،ش

English	فارسی	Abbr.
Stationary	ساکن	
Quasiconvex	شبه محدب، کوازی کنوکس	
strictly- quasiconvex	شبه محدب اکید	
strongly- quasiconvex	شبه محدب قوی	
strictly –quasiconvex	شبه محدب اکید	
Quasiconcave	شبه مقعر	
Pseudo-newton	شبه نیوتن	
Quasi-Newton	شبه نیوتن	
Feasible	شدنی	
Dual Feasibility	شدنی بودن دوآل	DF
Primal Feasibility	شدنی بودن مساله اولیه	PF
Regularity condition	شرط منظم بودن	
duality gap	شکاف دو گانگی	
supremum	سوپریمم	Sup

ص، ط

English	فارسی	Abbr.
Constraint Qualifications	صلاحیت محدودیت‌ها	CQ
Linear Independence Constraint Qualification	صلاحیت محدودیتی مستقل خطی	LIQC
step size	طول گام	

غ

English	فارسی	Abbr.
double sweep	غربال گری مضاعف،	
non-increasing	غیرصعودی	
non-decreasing	غیرنزولی	

ف،ق

Compact	فشرده	
Fibonacci	فیبو ناتچی	
Constraint	قید	

ک،گ

Rubber	کائوچو	
Quadratic	کوادراتیک	
Descent	کاهش	
Gradient Desent	کاهش گراد یانی	GD
Bounded	کراندار	
Complementary Slackness	کمک مکمل	**CS**
Slack	کمکی	
principal minor	کهاداصلی	
Gradient	گرادیان	
Condugate Gradient	گرادیان مزدوج	

ل ، م

Rubber	لاستیک
Pivot	لولا
Surplus	مازاد
Suplinear	مافوق خطی
principal minor	ماینور اصلی
leading principal minor	ماپ(ماینور اصلی پیشتاز)
Cutting plane method	روش برش صفحه ای
augmented Lagrangian	روش لاگرانژی فزوده
slack variable	متغیر کمبود
Finite set of closed half	مجموعه ای متناهی از نیم
Convex	محدب
pseudo-convex	محدب گونه، سودوکنوکس
strictly pseudo -convex	محدب گونه اکید
strictly convex	محدب اکید
strictly convex	محدب اکید
Non-decreasing convex	محدب غیر کاهشی
Bounded	محدود ،کرا تدار

	محدودیت	Constraint
	محور مختصاتی	Exploratory
	محلی، نسبی	Local
	مرز	Boundary
SP	مسائل تفکیک پذیر	Separable Programming
RAP	مساله با تخصیص افزونگی	Redundancy Allocation Problem
QPP	مساله برنامه ریزی درجه ۲	quadratic programming
	مساله پایدار	stable problem
	معین غیر مثبت	negative semidefinite
	معین غیر منفی	positive semidefinite
	مُعین مثبت	positive definite
	مُعین منفی	negative definite
	مقادیر ویژه ماتریس	eigen values
	مقدار ویژه	Eigen Value
	مقعر اکید	strictly concave
	مقیاس بندی افایِن	affine scaling
	منحنی درجه سوم	Cubic curve
	منحنی همتراز	Contour
	منفرد، غیر منظم	Nonregular
ماپ	مینور اصلی پیشتاز	Leading Principal Minor
	مینیمم مو ضعی اکید	strict local minimum

ن

	نا مُعین	Indefinite
	نرم	Smooth
	نزدیک به بهینه	Near Optimal
	نقطه زینی	saddle point
KKT	نقطه کاروش- کان تاکر	Karush-Kahn –Tacker
	نقطه منظم(غیر منفرد)	Regular point
	نیمه مُعین مثبت	Positive semidefinite
	نیمه مُعین منفی	negative semidefinite
	نیمه پیوسته از پایین	Lower semi-continuous

ه

	هشیان	Hessient
	هم خط، هم راستا؟	Collinear
	وابسته خطی	Collinear
	همگرایی	Convergenge

واژه نامه انگلیسی – فارسی

انگلیسی	فارسی	اختصار
A		
Accuracy	درستی، صحت، دقت	
Adjency Assumption	اصل مجاور بودن یا هم‌جواری	
affine scaling	مقیاس بندی آفاین	
ascend direction	جهت افزایش(صعودی)	
augmented Lagrangian method	روش لاگرانژی فزوده	
B		
bacterial-inspired evolutionary algorithm	الگوریتم تکاملیِ BiEA	**BiEA**
binding	تساوی آور	
Bisection	دو نیم سازی	
Boundary	مرز	
Bounded	کراندار	
Bounded	محدود،کرا تدار	
C		
Closed	بسته	
Closure	بستار	Cl
Coercive	جاذب، نزدیک شونده	
Collinear	هم خط، هم راستا؟	
Collinear	همخط، وابسته خطی	
Compact	فشرده	
Complementary Slackness	کمک مکمل	**CS**
Condugate Gradient	گرادیان مزدوج	
Constraint	قید	
Constraint	محدودیت	
Constraint Qualification	صلاحیت محدودیت‌ها	**CQ**
Contour	خَم هم تراز	
Contour	منحنی هم تراز	

Convergenge	همگرایی
Convex	محدب
Convex Programming	برنامه ریزی محدب
Convex envelope	پوش محدب
Corollary	استنتاج، نتیجه
Cubic curve	منحنی درجه سوم
Cutting plane method	روش برش صفحه ای
Cyclic Coordinates algorithm	الگوریتم مختصات دوره ای (مختصات محاطی؟)

D

Descent	کاهش
descent direction	جهت کاهش
Dichotomous search	جستجوی دو رسته ای
Differential evolution	تکامل تفاضلی
Distinguishibility constant	ثابت تمیز یا ثابت تشخیص پذیری
double sweep	غربال گری مضاعف،
	پسگرایی مجدد
Dual Feasibility	شدنی بودن دوآل
duality gap	شکاف دو گانگی
Dynamic Programming	برنامه‌ریزی پویا

DF

E

Eigen Value	مقدار ویژه
Ellipsoid	بیضیوار
eigen values	مقادیر ویژه ماتریس
equal-interval search	جستجوی متساوی ا
Exhaustive search	جستجوی یکنواخت
Exploratory	محور مختصاتی
Feasible	شدنی

F

Feasible Direction	امتداد شدنی
Fibboacci Search	جستجوی فیبوناتچی

Fibonacci	فیبو ناتچی	
Finite set of closed half spaces	مجموعه ای متناهی از نیم فضاهای بسته	
Fractional linear Prog.	برنامه ریزی کسری	

G

Genetic Algorithm	الگوریتم ژنتیک	
Geometric Programming	برنامه ریزی هندسی	
Global optimal solution	جواب بهین کلی	
Goal Programming	برنامه ریزی آرمانی	
golden section	تقسیم طلایی	
Golden Section Search	جستجوی تقسیم زرین	
Golden Section Search	جستجوی تقسیم طلائی	
Gradient	گرادیان	
Gradient Desent	کاهش گراد یانی	GD
Gradient Method	روش گرادیانی (گرادیان	
gradient projection method	روش تصویر گرادیان	

H,I,K

Hessient	هشیان	
Indefinite	نا مُعین	
Infimum	اینفیمم	
Integer Programming	برنامه‌ریزی با اعداد	IP
Interior	درون	
Iterative	تکراری	
Karush-Kahn –Tacker point	نقطه کاروش- کان تاکر	**KKT**

L

Leading Principal Minor	مینور اصلی پیشتاز	ماپ
Least squared error	حداقل مجذورات خطا	**LSE**
leading principal minor	ماینور اصلی پیشتازماپ	
Line Search	جسنجوی خطی	

linear complement programming	برنامه ریزی متمم خطی	
Linear Independence Constraint Qualification	صلاحیتِ محدودیتیِ مستقلِ خطی	**LIQC**
linear piece wise linearization	تقریب خطی جزء به جزء	
Linear Programming	برنامه‌ریزی خطی	**LP**
Linearization	خطی سازی	
Local	محلی، نسبی	
Lower semi-continuous	نیمه پیوسته از پایین	

M

Master	اصلی	
Maximal decrease	بیشترین کاهش	SD
Maximal increase	بیشترین افزایش	
Maximum likelihood	روش حداکثر درستنمایی	**MLE**
multi-level	چند سطحی	
Multiplicative	حاصلضربی	

N

Natural Arc Methods	روشهای قوس طبیعی	
Near Optimal	نزدیک به بهینه	
negative definite	مُعین منفی	
negative semidefinite	معین غیر مثبت	
negative semidefinite	نیمه مُعین منفی	
noise	اختلال، نویز	
non-decreasing	غیرنزولی	
Non-decreasing convex	محدب غیر کاهشی	
non-increasing	غیرصعودی	
Non-linear Programming	برنامه‌ریزی غیرخطی	NLP
Nonregular	غیر منظم، منفرد	

O,P

Operations Research	تحقیق در عملیات	**OR**

English	Persian	Abbreviation
Optimal	بهین	
outer linearization	خطی ساز ی برونی	
Pattern	الگویی	
Penalty &Barrier Methods	الگوریتم های جریمه ای	
Pivot	لولا	
Polynomial fit	برازش چند جمله ای	
Positive semidefinite	معین غیر منفی	
Positive semidefinite	نیمه مُعین مثبت	
positive definite	مُعین مثبت	
Positive-linear independence	استقلال مثبت خطی	
Primal	اولیه	
Primal Feasibility	شدنی بودن مساله اولیه	PF
principal minor	کهاداصلی	
principal minor	ماینور اصلی	
pseudo-convex	محدب گونه، سودو کنوکس	
pseudo- newton	شبه نیوتن،سودو	

Q

English	Persian	Abbreviation
Quadratic	در جه دوم	
Quadratic	کوادراتیک	
quadratic programming problem	مساله برنامه ریزی درجه ۲	QPP
Quasiconcave	شبه مقعر	
Quasiconvex	شبه محدب	
Quasi-Newton	شبه نیوتن	

R

English	Persian	Abbreviation
Reduced Gradient algorithm	الگوریتم گرادیان تحویل یافته	RG
Redundancy Allocation Problem	مساله با تخصیص افزونگی	RAP
Regular point	نقطه منظم(غیر منفرد)	
Regularity condition	شرط منظم بودن	

resolution constant	ثابت تمیزیا تشحیص پذیری	
rubber	لاستیک ،کائوچو	

S

saddle point	نقطه زینی	
Separable Programming	مسائل تفکیک پذیر	**SP**
sequential search	جستجوی ترتیبی	
sequential search	جستجوی دنباله ای (ترتیبی)	
sequential (successive) quadratic programming	برنامه ریزی درجه ۲ ترتیبی یا دنباله ای یا	**SQP**
Sequential Uncostrained Minimization Techniques	تکنیک های کمینه سازی بی محدودیت ترتیبی	**SUMT**
Simulated annealing	انیلینگ شبیه سازی شده	
simultaneous line search	جستجوی همزمان	
simultaneous line search	جستجوی همزمان	
Slack	کمکی	
slack variable	متغیر کمبود	
Smooth	نرم	
smooth function	تابع نَرم	
stable problem	مساله پایدار	
Stationary	ساکن	
Steepest Ascent	بیشترین افزایش	
Steepest Descent	بیشترین کاهش	SD
Steepest feasible Ascent direction	جهت شدنی با بیشترین افزایش ممکن	
Steepest feasible Descent direction	جهت شدنی با بیشترین کاهش ممکن	
step size	طول گام	
Strict local minimum	مینیمم مو ضعی اکید	
strictly concave	مقعر اکید	

strictly convex	محدب اکید
strictly convex	محدب اکید
strictly pseudo -convex	محدب گونه اکید
strictly- quasiconvex	شبه محدب اکید
strictly –quasiconvex	شبه محدب اکید
strictly unimodal	تک کوهانه اکید
strongly- quasiconvex	شبه محدب قوی
Strongly Unimodal	تک کوهانه قوی
Suplinear	مافوق خطی
supremum	سوپریمم **Sup**
Surplus	مازاد

U,V

Uniform search	جستجوی یکنواخت
Unimodal	تک کوهانه
Variable Elimination Algorithms	الگوریتم های حذف متغیرها

مراجع

منبع اصلی

Bazaraa, Mokhtar.S., Sherali, Hanif.D.,Shetty, C. Malavika.,۲۰۰۶
Nonlinear Programming Theory and Algorithms
John Wiley

دیگر مراجع:

اخوان، یوسف،۱۳۸۹
روش های ترکیبی جستجوی خطی و ناحیه اعتماد برای مسایل مقید با قیود تساوی
پایان نامه ۴۱۴۵۴-۰۲دانشگاه صنعتی شریف

اسکروچی، محمد رضا، ۱۳۷۴
روشهای ناحیه اعتماد درحل مسائل بهینه سازی غیرخطی
پایان نامه ۰۲-۴۷۶۲۴ دانشگاه صنعنی شریف

اصغرپور، محمد جواد، ۱۳۸۱
تحقیق در عملیات پیشرفته
اننشارات دانشگاه تهران

بازرگان ،حمید،۱۳۹۲
نگاهی به آمار مهندسی
انتشارات جهاد دانشگاهی کرمان

انجمن ریاضی و آمار +گروه ریاضی وآمار مرکز نشر،۱۳۹۶
واژه نامه ریاضی وآمار چاپ نهم
مرکز نشر دانشگاهی

بازرگان, حمید ۱۳۹۵
تحقیق در عملیات I- جزوه درسی
دانشکده فنی دانشگاه شهید باهنر کرمان
قابل دانلود ازاینترنت

بشیری, مهدی و کریمی، حسین ،۱۳۹۲
کاربرد الگوریتم های ابتکاری و فرا ابتکاری در طراحی سیستم های صنعتی,
دانشگاه شاهد

جزوه کلاسی برنامه ریزی غیر خطی
دانشگاه تهران -دانشکده مهندسی صنایع

چزوه کلاسی برنامه ریزی غیر خطی دکتر ترابی
دانشگاه صنعتی (شریف فعلی)
خواجویی ، مونا۱۳۹۰
پیاده سازی یک الگوریتم نقطه درونی با گامهای ترکیبی جستجوی خطی و
ناحیه اعتماد برای بهینه سازی غیر خطی
پایان نامه دانشگاه صنعتی شریف
سیلور من،۱۹۸۵ (نویسنده)، عالم زاده علی اکبر(مترجم)، ۱۳۸۵
حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی،
نشر ققنوس
عامری و دیگران ، ۱۳۹۵
مدل سازی خطی و غیر خطی ماهیچه های چشم در بیماری استرا بیسم
فصلنامه پیرا پزشکی و توا نبخشی دوره چهارم شماره ۳ ص ۹۳-۵۹

Arsham, H. and Kahn, A. B.۱۹۹۰
A COMPLETE ALGORITHM FOR LINEAR FRACTIONAL PROGRAMS
Computers Math. Applic. Vol. ۲۰, No. ۷, pp. ۱۱-۲۳,

Arora, Jasbir Singh,۲۰۱۱
Introduction to Optimum Design
Academic Press

Avriel, M. ۲۰۰۳
Nonlinear Programming Analysis and Methods
Dover Publications, Inc

Avriel, M. ۱۹۷۶
Nonlinear Programming Analysis and Methods
Prentice Hall

Beckenbach,H.E, ۱۹٤۸
Convex Functions
Bull. Amer Math Soc ٥٤, pp٤۳۹-٤٦۰

Besterkas,D.P.,۱۹۹۹
Nonlinear Programming
Athena Scientific

Bergamini,D. (Author),Dubos,R. Margenau, H. & Snow C.P. ,(Consulting Editors); ۱۹٦۳
Mathematics
Time incorporation, New York

Bergin, James,۲۰۱۵

Mathematics for Economists with Applications
Publisher: Routledge

Chatwattanasiri, Nida, Coit, David W. , Wattanapongsakorn, Naruemon, ۲۰۱٦

System redundancy optimization with uncertain stress-based …..
Reliability Engineering & System Safety, Volume ١٥٤, October ۲۰۱٦, Pages ۷۳-۸۳

Chadha S.S ۱۹۹۹.

A linear fractional program with homogeneous constraints,
Opsearch, ۳٦(٤), ۳۹۰-۳۹۸. Operational Research Society of India

Cambini,A., Martein,L.,۲۰۰۸

Generalized Convexity and Optimization Theory and Applications
Springer Science & Business Media

Deb,K, ,Gupta,S Dutta, J., Ranjan, B, ۲۰۱۳

Solving dual problems using a coevolutionary optimization algorithm.
. Journal of Global Optimization ٥۷ (۳), ۸۹۱-۹۳۳,

Exner ,George R. ,۲۰۰۰

Inside Calculus
Springer

Konic, F.G.۲۰۰۷

Traffic optimization under route constraints with Lagrangian relaxation….
Operations Research Proceedings ۲۰۰٦-۲۰۰۷, pp. ٥۳-٥۹. Springer, Heidelberg

Giorgio,G., Guerraggio, A. Thierfelder, . J,۲۰۰٤

Mathematics of Optimization: Smooth and Nonsmooth Case
Elsevier Science

Goldfarb, D., Idnani, A., ۱۹۸۳

Numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs.
Math. Program. ۲۷, ۱–۳۳.

Goodwin, G.C., Sermon,M.M. Dona, J.A.,۲۰۰٤

Constrained Control and Estimation: An Optimisation Approach
Springer

Hadley ,G.,Within, T.M. ۱۹٦۳

Analysis of inventory systems
Prentice Hall

Hsieh, Tsung-Jung,۲۰۱٤

Hierarchical redundancy allocation for multi-level reliability systems employing a bacterial-inspired evolutionary algorithm
Information Sciences, Volume ۲۸۸, ۲۰ December ۲۰۱٤, Pages ۱۷٤-۱۹۳

Hillier F.S,&Lieberman G .J.١٩٦٨

Introduction to Operations Research
Holden Day

Himmelblau,D.M.,١٩٧٢

Applied Nonlinear Programming
McGrawHill

Jeter, Melvyn,١٩٨٦

Mathematical Programming: An Introduction to Optimization
CRC Press

John, Fritz, ١٩٤٨,

Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions,
in Studies and Essays, K. O. Friedrichs, O. E. Neugebauer, and J. J. Stoker, Eds.,
Interscience, New York, pp. ١٨٧–٢٠٤.

Li , Ming Zhao, Wei, ٢٠١٣
Golden Ratio Phenomenon of Random Data Obeying von Karman Spectrum
Math. Problem in Eng.Vol ٢٠١٣ |Article ID ١٣٠٢٥٨
https://doi.org/١٠,١١٥٥/٢٠١٣/١٣٠٢٥٨

Luenberger, David G and Ye, Yinyu ٢٠١٥

Linear and Nonlinear Programming
Springer , Switzeland

Karush, W., ١٩٣٩,

Minima of functions of several variables with inqualities as side conditions,
Dept. of Mathematics, University of Chicago, Chicago, IL, USA

Kelley,J.E.Jr,١٩٦٠,
The Cutting Plane Method for Solving Convex Program
Jr of SIAM, ٨, pp٧٠٣–٧١٢

Master's thesis,
University of Chicago, Chicago, Illinois.

Kasana, H.S. , Kumar, K.D. ٢٠٠٤

Introductory Operations Research: Theory & Applications
Springer

Kuhn, H.W; Tucker, A.W. ,١٩٥١

Nonlinear Programming
In Proceedings of ٢nd Berkeley Symposium on Math., Statstics and Probability,
Universityof California Press: pp٤٨١–٤٩٢. Berkeley,CA

MATLAB software ٢٠٠٩

Marsden,J.E. Trombaa A.T.٢٠٠٣

Vector Calculus
W.H. Freeman &Company
ترجمه یک چاپ این کتاب: عالم زاده و داوودی ۱۳۷۷نشر دانش بهار

McMillan, C.,۱۹۷۰

Mathematical Programming
John Wiley

McCormic, G.P., ۱۹۸۳

Nonlinear Programming :Theoery, Algorithm, Application
John Wiley

Nemhauser, G.L, et al., Eds.,۱۹۸۹

Handbooks in OR & MS, Vol. ۱

Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland)

Noceda, Jorge , Wright, Stephen J ۲۰۰٦

A comprehive description of the most effective methods in continuous optimization.
Springer

Paul , G., ۲۰۱۱

An efficient impl. of the robust tabu search heuristic for sparse quadratic problems
European Journal of Oper. Research, Volume ۲۰۹, Issue ۳, ١٦, Pp ۲۱۵–۲۱۸

Ponstein,J.۱۹٦۷

Seven kinds of convexity
SIAM Review vol ۹ no (۱), pp۱۱۵–۱۱۹

(doi: ۱۰,۱۱۳۷/۱۰۰۹۰۰۷)

Rardin,L.R., ۱۹۹۸

Optimization in Operations Research
Prentice Hall

Rao, S., S., ۱۹۹٦

Engineering Optimization, Theory and Practice
John Wiley & Sons

Rao, S., S., ۲۰۰۹

Engineering Optimization, Theory and Practice
John Wiley & Sons

Raviravindran ,A, Ravi,۲۰۰۸

Operations Research
CRC press

Ravindran,A., Ragsdell, K. M. ,Reklaitis , G. V.۲۰۰۷

Engineering Optimization, Methods and Applications
John Wiley &Sons

Robson Edward,۲۰۱۸

Computable general equilibrium modelling for urban transport planning and appraisal
School of Civil and Environmental Engineering , University of New South Wales
http://unsworks.unsw.edu.au/fapi/datastream/unsworks:۵۱۸۰۲/SOURCE۰۲?view=true

Ross,Kenneth A. ١٩٨٠

Elementary Analysis: The Theory of Calculus
Springer

Shisha, Oved, ١٩٧٢

Inequalities-III, Proceedings
Academic Press

Sivazlian, B.D., Stanfel, L.E.,١٩٧٥

Optimization Technique in Operations Research
Prentice Hall

Smith, Donald R.١٩٩٧

Variational Methods in Optimization
Courier Corporation

Tersine R.J.١٩٩٤

Principles of Inventory and Material Management
Prentice-Hall

Wagner, H. M.١٩٦٩

Principles of Operations Research with application to management decisions
Prentice Hall

Winston,W.L.,١٩٩٤

Operations Research
Duxbury

Zecchin ,A. C., Simpson, Angus , Maier , Holger R, Leonard,, Michael , Roberts ,Andrew J , Berrisford ,Matthe , ٢٠٠٦

Application of ant colony optimisation algorithms to water dist. system optimisation

Mathematical and Computer Modelling ,٤٤ pp ٤٥١–٤٦٨